ANA I/II - Zusammenfassung

Jan-Cornelius Molnar, Version: 25. Oktober 2008 11:02

Professor Pöschel ist für den Inhalt dieses Dokuments nicht verantwortlich.

1 Mengen

Im Folgenden sei A immer eine Teilmenge eines normierten Raumes.

- *Eine Menge A heißt beschränkt, falls*

$$\sup_{a \in A} \|a\| < \infty.$$

- *Eine Menge A heißt induktiv, falls*

$$1 \in A \text{ und } a \in A \Rightarrow a + 1 \in A.$$

- *Eine Menge A heißt offen, wenn A mit a auch eine Umgebung von a enthält.*

$$\forall\ a \in A\ \exists\ \delta > 0 : B_\delta(a) \subset A.$$

- *Eine Menge A heißt abgeschlossen, wenn A^c offen ist.*
- *Eine Menge A heißt kompakt, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.*
- *Ein Punkt a nicht notwendiger Weise $\in A$ heißt Häufungspunkt von A, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.*
- *Die Menge A' aller Häufungspunkte von A heißt abgeleitete Menge.*
- *Die Menge $A^- = A \cup A'$ heißt Abschluss von A.*
- *Ein Punkt $a \in A$ heißt innerer Punkt von A, wenn A eine Umgebung von a enthält.*
- *Die Menge A° aller inneren Punkte von A heißt offener Kern von A.*
- *Eine Menge A heißt zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten in A eine ganz in A liegende, differenzierbare Kurve gibt, die die zwei Punkte verbindet.*
- *Eine Menge Ω heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist.*
- *Für zwei Punkte u, v bezeichnet*

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv \ : \ t \in [0, 1]\}$$

die Verbindungsstrecke.

- *Eine Menge A heißt konvex, falls für $u, v \in A$ auch $[u, v] \subset A$ ist.*
- *Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte einer Menge, dann heißt die Linearkombination*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

eine Konvexkombination, falls $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

- *Eine Norm auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},$$

mit den Eigenschaften

(a) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in V$ *und* $\|x\| = 0$, *wenn* $x = 0$.

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ *für alle* $x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

(c) $||x + y|| \leq \|x\| + ||y||$ *für alle* $x, y \in V$.

- *Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

mit folgenden Eigenschaften für $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.

1.1 Beispiele für Normen

(a) Summennorm eines Vektors

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,.$$

(b) p-Norm eines Vektors

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

(c) Supremumsnorm einer stetigen Abbildung $f : K \to W$

$$||f||_\infty = \sup_{x\in K} |\, f(x) \,| \,.$$

(d) Operatornorm eines linearen Operators $A : V \to W$

$$\|A\| = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|Ax|_W}{|x|_V} = \sup_{|x|_V=1} |Ax| \,.$$

(e) L_1 Norm einer stetigen integrablen Abbildung f

$$||f||_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x) \,| \, \mathrm{d}x \,.$$

1.2 Sätze in einem normierten Raum

- *Ist N eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, so gilt $N = \mathbb{N}$.*
- *$\varnothing$ und E sind offen und abgeschlossen.*
- *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*
- *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
- *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- *Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.*
- *A ist abgeschlossen genau dann, wenn A alle seine Häufungspunkte enthält, also genau dann, wenn $A = A^-$.*
- *A ist offen genau dann, wenn alle Punkte von A innere Punkte sind, also genau dann, wenn $A = A^\circ$.*
- *Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.*
- *Eine kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.*
- *Eine Menge K ist konvex genau dann, wenn sie mit den Punkten $x_1, \ldots, x_n \in K$ auch jede Konvexkombination dieser Punkte enthält.*
- *Auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent.*

Bolzano Weierstraß *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Überdeckungslemma von Heine-Borell *Sei K kompakt und $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige Familie offener Intervalle. Gilt*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \supset K,$$

so existieren endlich viele Umgebungen $I_1, \ldots, I_m$, sodass

$$\bigcup_{1\le i\le m} I_i \supset K.$$

2 Folgen

- *Eine Folge in einer Menge M ist eine Funktion $\mathbb{N} \to M$.*
- *Ist (a_n) eine Folge in M und (n_k) eine strikt wachsende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt (a_{n_k}) Teilfolge von (a_n) und (n_k) Auswahlfolge.*

- *Ist (a_n) eine Folge und $W = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, dann heißt (a_n) beschränkt, falls W beschränkt ist.*

- *Eine Folge (a_n) in $(M, \|\cdot\|)$ heißt konvergent gegen a bezüglich $\|\cdot\|$, wenn*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 > 0\ \forall\ n \geq N_0 : \|a_n - a\| < \varepsilon,$$
$$n \geq N_0 \Rightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

- *Eine Folge (a_n) heißt uneigentlich konvergent gegen ∞ bzw. $-\infty$, wenn in jeder Umgebung von ∞ bzw. $-\infty$ fast alle Folgenglieder liegen.*

- *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.*

- *Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, wenn*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 > 0\ \forall\ n, m \geq N_0 : \|a_n - a_m\| < \varepsilon,$$
$$n, m \geq N_0 \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

- *Für eine Folge (a_n) in $M \subset E$ heißt ein Element $a \in E$ Häufungspunkt, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.*

- *Den Raum der beschränkten Folgen nennt man c, den Raum der Nullfolgen c_0.*

2.1 Allgemeine Sätze für Folgen in normierten Räumen

- *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

- *Gilt $\|a_n - a\| \leq \|b_n\|$ für eine Nullfolge b_n und fast alle n, dann ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a.*

- *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

- *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

- *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, dann ist die gesamte Folge konvergent mit dem selben Grenzwert.*

- *Sind (a_n) und (b_n) Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, so gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*

$$\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$$

- *Ist (b_n) beschränkt und (c_n) eine Nullfolge, so gilt $\langle b_n, c_n \rangle \to 0$.*

- *Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit Grenzwert a und b, dann gilt $\langle a_n, b_n \rangle \to \langle a, b \rangle$.*

2.2 Sätze für Folgen in Banachräumen

- *Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

- *Die Folgenräume c und c_0 mit der Supremumsnorm sind vollständig.*

2.3 Sätze für Folgen im $\mathbb{R}^n$

- *Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert.*

- *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

2.4 Sätze in $\mathbb{R}$

- *Sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und gilt $a_n \leq b_n$ für unendlich viele n, dann ist auch* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

- *Allgemeine Grenzwertsätze*

  (a) $a_n \to \infty$ *und* $b_n \geq c \Rightarrow a_n + b_n \to \infty$,

  (b) $a_n \to \infty$ *und* $b_n \geq c > 0 \Rightarrow a_n b_n \to \infty$,

  (c) $|a_n| \to \infty \Rightarrow a_n^{-1} \to 0$,

  (d) $a_n \to 0$ *und* $a_n > 0 \Rightarrow a_n^{-1} \to \infty$.

- *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ gilt $q^n \to 0$.*

- *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt $n^z q^n \to 0$.*

- *Für jede reelle Zahl a gilt $\frac{a^n}{n!} \to 0$.*

- $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Erweiterter Annäherungssatz *In jeder nichtleeren Menge A existiert eine Folge, die gegen $\sup A$ konvergiert. Entsprechendes gilt für $\inf A$.*

Erweiterter Satz von der monotonen Konvergenz *Jede monotone Folge konvergiert gegen einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert.*

Erweiterter Satz von Bolzano Weierstrass *Jede reelle Folge besitzt eine eigentlich oder uneigentlich konvergente Teilfolge.*
Jede reelle Folge besitzt einen eigentlichen oder uneigentlichen Häufungswert.

3 Reihen

- *Eine Reihe ist ein Ausdruck der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.*

- *Die endlichen Summen $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißen n-te Partialsummen der Reihe.*

- *Eine Reihe heißt konvergent, falls die Folge ihrer Partialsummen konvergiert, andernfalls divergent.*

- *Eine Reihe heißt absolut konvergent, falls ihre Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Ist eine Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent, heißt sie bedingt konvergent.*

- *Eine reelle Reihe $\sum_k b_k$ mit nichtnegativen Gleidern heißt Majorante der Reihe $\sum_k a_k$, wenn für fast alle Folgenglieder gilt $|a_k| \le b_k$.*

3.1 Beispiele

(a) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert, falls $|q| < 1$.

(b) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

(c) Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist bedingt konvergent.

(d) Die Zetafunktion $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergiert für $r > 1$ und divergiert für $r \le 1$.

(e) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergent.

3.2 Sätze für Reihen in Banachräumen

Nullfolgenkriterium *Ist eine Reihe $\sum_k a_k$ konvergent, bilden ihre Glieder a_k eine Nullfolge.*

Cauchykriterium *Ist eine Reihe $\sum_k a_k$ konvergent, dann gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \ge 0\ \forall\ m, n \ge N : \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\| < \varepsilon.$$

- *Eine Reihe ist absolut konvergent, genau dann wenn ihre Absolutreihe beschränkt ist. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.*

Umordnungssatz *Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent.*

Majorantenkriterium *Sei $\sum_k a_k$ eine Reihe. Existiert eine reelle konvergente Reihe $\sum_k b_k$ so, dass für fast alle k gilt $\|a_k\| \le b_k$, dann ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent.*

Wurzelkriterium *Sei $\sum_k a_k$ eine Reihe. Existiert dann ein $q < 1$, sodass gilt*

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \le q, \ \text{für fast alle } n,$$

konvergiert die Reihe absolut. Gilt andernfalls

$$\sqrt[n]{\|a_n\|} \ge 1, \ \text{für unendlich viele } n,$$

dann divergiert die Reihe.

Quotientenkriterium *Sei $\sum_k a_k$ eine Reihe. Existiert dann ein $q < 1$, sodass gilt*

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \le q, \text{ für fast alle } n,$$

konvergiert die Reihe absolut. Gilt andernfalls

$$\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \ge 1, \text{ für unendlich viele } n,$$

dann divergiert die Reihe.

3.3 Sätze für Reihen in $\mathbb{R}$

- *Ist eine reelle Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jeder Zahl $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung, sodass die Reihe gegen s konvergiert.*

Leibnizkriterium *Die alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ konvergiert, falls (a_k) eine monoton fallende Nullfolge ist.*

Verdichtungssatz *Ist (a_n) eine reelle, monoton fallende Nullfolge, dann sind die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k 2^k a_{2^k}$ entweder beide konvergent oder beide divergent.*

4 Stetigkeit

- *Eine Abbildung $f : D \to W$ heißt stetig im Punkt $a \in V$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass*

$$\|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon, \quad x \in B_\delta(a) \cap D.$$

Mit Quantoren ausgedrückt

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in B_\delta(a) \cap D : \|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon.$$

Ist f in a nicht stetig, heißt sie dort unstetig.

- *Eine Abbildung heißt stetig, wenn sie in allen Punkten ihres Definitionsbereichs stetig ist.*

- *Eine Abbildung $f : D \to W$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x_0, x \in D : \|x - x_0\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_W < \varepsilon.$$

- *Eine Abbildung $f : D \to W$ heißt lipschitzstetig auf D, wenn es eine Konstante $L \ge 0$ gibt, sodass für $x, a \in D$ gilt*

$$\|f(x) - f(a)\|_W \le L\,\|x - a\|_V\,.$$

Dabei ist die beste Lipschitz-Konstante

$$L = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_W}{\|x - y\|_V}.$$

- *Den Raum der Funktionen auf D bezeichnet man mit $F(D)$.*

- *Den Raum der beschränkten Funktionen auf D bezeichnet man mit $B(D)$.*

- *Den Raum der stetigen Funktionen auf D bezeichnet man mit $C(D)$.*

- *Den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf D bezeichnet man mit $CB(D)$.*

- *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls*

$$\forall\ x \in D\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \ge 0 : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

- *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \ge 0 : \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

4.1 Beispiele stetiger Funktionen

(a) Auf einem beliebigen normierten Raum sind die id und die konstanten Funktionen lipschitz.

(b) Auf $\mathbb{C}$ sind $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ lipschitz.

(c) Jede Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist lipschitz.

(d) Jedes reelle Polynom ist stetig.

(e) Die Wurzelfunktion ist stetig auf $[0, \infty)$ und für jedes $b > 0$ auf $[0, b]$ gleichmäßig aber nicht lipschitzstetig.

4.2 Sätze für Funktionen in beliebigen normierten Räumen

Folgenkriterium *Eine Funktion $f : D \to F$ ist stetig in a genau dann, wenn für jede Folge $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.*

Folgenkriterium für Grenzwerte *Ist $f : D \to F$ stetig, und $a \in D$ dann gilt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = w,$$

genau dann wenn für jede Folge $x_n \to a, x_n \neq a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = w.$$

- *$C(D)$, ist eine Algebra.*
- *Ist f auf D stetig und g auf einer Obermenge von $f(D)$, dann ist $g \circ f$ ebenfalls stetig.*
- *$f : D \to F$ ist stetig in a genau dann, wenn $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine D-relative Umgebung $U_\delta(a)$ enthält.*
- *$f : D \to F$ ist stetig auf D genau dann, das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder offenen Menge A offen ist.*
- *Ist $K \subset E$ kompakt und $f : E \to F$ stetig, dann ist auch $f(K)$ kompakt.*
- *Ist $K \subset E$ kompakt und $f : E \to F$ stetig, dann ist $f|_K$ gleichmäßig stetig.*
- *Sind M, N kompakt und $f : M \to N$ bijektiv und stetig, dann ist f^{-1} ebenfalls stetig.*
- *Ist $K \subset E$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f sein Minimum und sein Maximum an.*
- *Ist a ein Häufungspunkt im Definitionsbereich der Funktion $f : D \to F$, und existiert der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x) = w$, so ist die Funktion*

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \to F, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} w, & \text{für } x = a \\ f(x), & \text{sonst,} \end{cases}$$

stetig in a.

4.3 Sätze für Funktionen in Banachräumen

- *Konvergiert eine Funktionenfolge (f_n) in $F(D)$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig (integrierbar), dann ist auch f stetig (integrierbar).*
- *Konvergiert eine Folge (f_n) differenzierbarer Funktionen in $F(D)$ punktweise gegen f und die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig gegen g, dann ist f differenzierbar mit Ableitung g.*
- *$B(D)$ und $CB(D)$ sind mit der Supremumsnorm Banachräume.*
- *Ist K eine kompakte Menge, dann ist $C(K)$ mit der Supremumsnorm Banachraum.*
- *Ist $f : D \to F$ lipschitz, dann existiert genau eine stetige Forstetzung*

$$\Phi : D^- \to F, \quad \Phi|_D = f,$$

von f. Sie ist lipschitz mit der selben L-Konstante wie f.

4.4 Sätze für reellwertige Funktionen

- *Ist $K \subset E$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f gleichmäßig stetig.*

- *Sind f, g stetige Funktionen und $\lim_{x\to a} f(a) = u$, $\lim_{x\to a} g(a) = v$, dann gilt*

  (a) $\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda u + \mu v$.

  (b) $\lim_{x\to a} (fg)(a) = uv$.

  (c) $\lim_{x\to a} (fg^{-1})(a) = uv^{-1}$, *für $v \neq 0$.*

  Gilt außerdem in einer punktierten Umgebung von a $f(x) \le g(x)$, dann gilt

  (d) $\lim_{x\to a} f(a) \le \lim_{x\to a} g(a)$.

4.5 Sätze für Funktionen auf einem Intervall $f : I \to \mathbb{R}$

Zwischenwertsatz von Bolzano *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$, dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{R} : f(a) \le w \le f(b)$ ein $c \in [a,b]$, sodass $f(c) = w$.*

- *Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf f$ und $\sup f$ mindestens einmal an.*

- *Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Satz über stetige Umkehrfunktionen *Ist I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend, dann gilt*

(a) *$f(I) = J$ ist ein Intervall.*

(b) *$f : I \to J$ ist bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$.*

(c) *f^{-1} ist stetig und streng monoton steigend auf J.*

- *Für $n \ge 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ eine stetige streng monoton steigende Umkehrfunktion, die n-te Wurzel.*

- *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f.*

5 Integration

- *Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a,b]$ ist ein Tupel reeller Zahlen mit*

$$a = t_1 < \ldots < t_n = b.$$

- *Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn eine Zerlegung und reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ existieren, sodass*

$$\varphi(x)\big|_{t_k, t_{k+1}} = c_k.$$

Der Raum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wird mit T_a^b bezeichnet.

- *Das Integral der Treppenfunktion ist*

$$J_a^b(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

- *Der Abschluss von T_a^b bezüglich der Supremumsnorm heißt Raum der Regelfunktionen auf $[a,b]$ und wird mit R_a^b bezeichnet.*

Die stetige Fortsetzung von J_a^b heißt Cauchyintegral auf $[a,b]$ und wird mit $\int_a^b$ bezeichnet.

- *Es sei $a < b \le \infty$, und die Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Intervall $[a,c] \subseteq [a,b)$ integrabel. Existiert der Limes*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

so heißt er das uneigentliche Integral von f über $[a,b)$ und man sagt, das uneigentliche Integral konvergiert. Andernfalls sagt man, es divergiert.

Analoges gilt für $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ und $-\infty \le a < b$.

- *Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt absolut konvergent, falls das Absolutintegral*

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

existiert.

5.1 Sätze für Treppenfunktionen

- $T_a^b \leq B_a^b$.
- *Das Integral $J_a^b(\varphi)$ hängt nicht von der Darstellung von φ ab.*
- *Das Funktional*

$$J_a^b : T_a^b \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto J_a^b(\varphi),$$

hat die Eigenschaften.

(a) *Lineartiät.* $J_a^b(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda J_a^b(\varphi) + \mu J_a^b(\psi)$.

(b) *Monotonie.* $\varphi \leq \psi \Rightarrow J_a^b(\varphi) \leq J_a^b(\psi)$.

(c) *Normiertheit.* $\varphi\big|_{(a,b)} = c \Rightarrow J_a^b(\varphi) = c(b-a)$.

(d) *Lipschitzstetigkeit mit L-Konstante $(b-a)$.*

5.2 Sätze für das Cauchyintegral

- *Das Cauchyintegral hat die selben Eigenschaften wie das Integral der Treppenfunktionen.*

Intervalladditivität *Vereinbart man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, dann gilt auf einem Intervall, das a, b, c umfasst*

$$f \in R_a^b \Leftrightarrow f \in R_a^c \text{ und } f \in R_c^b$$

und außerdem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- *Ist f auf $[a,b]$ integrierbar, dann auch $|f|$ und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Riemann'sches Lemma *Ist f auf I integrierbar und in $c \in [a,b]$ stetig, dann gilt*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung *Sei f auf $[a,b]$ stetig, p auf $[a,b]$ integrabel und $p \geq 0$, dann gibt es ein $c \in [a,b]$, sodass*

$$\int_a^b (fp)(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt links- und rechtsseitige Grenzwerte besitzt. Insbesondere sind stetige und monotone Funktionen Regelfunktionen.*
- *Eine Regelfunktion besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

5.3 Sätze für das uneigentliche Integral

- *Ist $a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.*

(b) *Für jede Stammfunktion F von f existiert $\lim\limits_{x\to b} F(x)$.*

(c) *Es gilt das Cauchykriterium. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $c \in [a,b)$, sodass*

$$\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

für alle $u, v \in (c,b)$.

Satz von der absoluten Konvergenz *Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist genau dann absolut konvergent, wenn es beschränkt ist. In diesem Falle ist es auch konvergent.*

Majorantenkriterium *Gilt $|f| \leq g$ auf $[a,b)$ und existiert das Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, so ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent.*

- *Nützliche Majoranten sind beispielsweise*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1,$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

6 Differentiation

- *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in I$, wenn es eine in a stetige Funktion r gibt mit $r(a) = 0$, so dass*

$$f(t) = f(a) + m(t-a) + r(t)(t-a), t \in I.$$

Dann heißt m die erste Ableitung von f im Punkt a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.

- *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf I, wenn sie in jedem Punkt aus I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$f' : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(t)$$

die Ableitung von f.

Ist f' außerdem stetig, so heißt f stetig differenzierbar auf I.

- *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $a \in I$ ein lokales Maximum, wenn eine Umgebung $U_\delta(a)$ existiert, sodass*

$$f(x) \leq f(a), \ \forall \ x \in I \cap U_\delta(a).$$

Gilt sogar $f(x) < f(a)$ in $I \cap \dot{U}_\delta(a)$, so heißt das Maximum strikt.

- *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ in c differenzierbar und $f'(c) = 0$, so heißt c stationärer oder kritischer Punkt von f.*

- *Die Klasse der r-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \to F$ wird mit $C^r(D, F)$ bezeichnet.*

- *Ist $f : I \to \mathbb{R}$, dann heißt F eine Stammfunktion von f, falls $F' = f$.*

- *Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion f ist die Parallelschar*

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\},$$

aller Stammfunktionen von f auf einem Intervall.

- *Ist f n-mal stetig differenzierbar auf I und $a \in I$, so heißt*

$$T_a^n f(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i,$$

das n-te Taylorpolynom an der Stelle a.

- *Für $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$, heißt*

$$T_a f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}}{i!}(t-a)^i,$$

die Taylorreihe von f. Konvergiert diese Reihe in einer Umgebung um a und gilt $T_a f(t) = f(t)$, dann heißt f um a in seine Taylorreihe entwickelbar.

6.1 Beispiele für differenzierbare Funktionen

(a) Die Identitätsfunktion, sowie konstante und affine Funktionen, reell e Polynome, sin, cos und die Exponentialfunktion sind von der Klasse $C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Die Betragsfunktion ist für jedes $t \neq 0$ stetig differenzierbar, aber in $t = 0$ nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\frac{|t| - |0|}{t - 0} = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

(c) Die Wurzelfunktion $\sqrt{t}$ ist für jedes $t > 0$ stetig differenzierbar, aber in $t = 0$ nicht differenzierbar.

(d) Die Funktion $f(t) = t^2 \sin(\frac{1}{t})$ ist differenzierbar, aber in $t = 0$ nicht stetig differenzierbar.

6.2 Sätze für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

- *Ist f im Punkt a differenzierbar, so ist f im Punkt a stetig und es gilt*

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

- *Der Raum der differenzierbaren Funktionen ist eine Algebra und für in a differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Ist $J \subset \mathbb{R}$ und $g : I \to J$ in a differenzierbar und $f : J \to \mathbb{R}$ in $g(a)$, dann gilt außerdem

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)f(g(a)).$$

- *Der Raum C^r ist eine Algebra. Sind f, g von der Klasse C^r und f im Wertebereich von g definiert, dann ist auch $f \circ g$ von der Klasse C^r.*

Ableitung der Umkehrfunktion *Ist $f : I \to J$ stetig, bijektiv, in a differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist $g = f^{-1} : J \to I$ ebenfalls stetig und in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ist f außerdem C^r und verschwindet f' nirgends auf I, so ist auch f^{-1} C^r.

Satz von Fermat *Besitzt $f : I \to \mathbb{R}$ in $c \in I^\circ$ ein Extremum, so gilt $f'(c) = 0$.*

Satz von Rolle *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so besitzt f einen kritischen Punkt in (a,b).*

Mittelwertsatz *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann existiert ein $c \in (a,b)$, sodass*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Monotoniesatz *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann gilt*

(a) *f ist konstant auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f' \equiv 0$.*

(b) *f ist monoton steigend auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f' \geq 0$.*

(c) *f ist streng monoton steigend, wenn $f' > 0$.*

- *Sei f in einem offenen Intervall I differenzierbar und besitzte in $c \in I$ einen kritischen Punkt. Ist dann f' in einer Umgebung um c monoton fallen bzw. steigend, besitzt f in c ein Maximum bzw. Minimum.*

- *Die Stammfunktionen einer Funktion f auf einem Intervall unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.*

- *Sei f auf I integrierbar und $t_0 \in I$, dann wird durch*

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

eine Funktion mit den Eigenschaften definiert.

(a) *Φ ist lipschitz auf I mit L-Konstante $||f||_I$.*

(b) *Ist f in a stetig, dann ist Φ in a differenzierbar und es gilt $\Phi'(a) = f(a)$.*

(c) *Ist f stetig, so ist Φ stetig differenzierbare Stammfunktion f.*

Haupsatz der Differential und Integralrechnung *Ist f auf $[a,b]$ stetig und F irgendeine Stammfunktion von f, dann gilt*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- *Ist f auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f' = f\big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Partielle Integrationsregel *Sind f, g auf I stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Substitutionsregel *Ist φ stetig differenzierbar auf $I = [a, b]$ und f stetig, so ist*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Restgliedformel nach Lagrange *Ist $f \in C^{n+1}(I)$ und sind $t, a \in I$, dann existiert ein $\xi \in (a, t)$, so dass gilt*

$$R_a^n f(t) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Restglied in Integralform *Ist $f \in C^{n+1}(I)$ und $t, a \in I$, dann gilt*

$$R_a^n f(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Variante der Integralformel *Ist $f \in C^{n+1}(I)$ und sind $a, a+h \in I$, dann gilt*

$$R_a^n f(a+h) = \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+sh)\,\mathrm{d}s\,.$$

- *Es gilt $T_a f(t) = f(t)$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_a^n f(t) = 0$.*

Regel von l'Hopital *Seien $f, g \in C^1(I)$ und x_0 sei eigentlicher oder uneigentlicher Randpunkt des (punktierten) Intervalls I. Darüber hinaus sei*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

oder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

sowie $g'(x) \neq 0$, für $x \in I$. Existiert dann $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert, so existiert auch $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7 Differentialgleichungen

- *Sei I ein Intervall, $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : I \times D \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung auf $I \times D$. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi(t) : J \to \mathbb{R}, \quad \emptyset \neq J \subset I,$$

mit der Eigenschaft

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in J.$$

- *Eine Differentialgleichung heißt autonom, falls f nicht explizit von t abhängt, also gilt $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\dot{x} = f(x)$. Andernfalls nichtautonom.*

- *Ein zu einer Differentialgleichung gehörendes System*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

nennt man Anfangswertproblem, wobei $(t_0, x_0) \in I \times D$. Eine lokale Lösung ist eine Lösung $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I_0 \subset I.$$

7.1 Lineare Differentialgleichungen - Der homogene Fall

- *Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

mit auf I stetigen Funktionen a und b. Sie heißt homogen, falls $b = 0$, andernfalls inhomogen.

- *Sei a stetig auf I. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x,$$

gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}c, c \in \mathbb{R}$$

mit einer beliebigen Stammfunktion A von a. Sie existiert auf ganz I.

- *Die Gesamtheit aller Lösungen bildet einen eindimensionalen Vektorraum*

$$L_0 = \left\{e^{A(t)}c \, : \, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

- *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0,$$

besitzt auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)x_0.$$

7.2 Lineare Differentialgleichungen - Der inhomogene Fall

- *Sei φ_0 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

dann hat jede andere Lösung die Form $\varphi_0 + \varphi$, mit einer Lösung φ der homogenen Gleichung.

- *Die Gesamtheit aller Lösungen bildet einen eindimensionalen affinen Vektorraum*

$$L = \varphi_0 + L_0 = \left\{\varphi_0 + e^{A(t)}c \, : \, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

- *Sind a und b stetig auf I, dann ist die allgemeine Lösung von*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

auf ganz I erklärt und gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}(c + c_0(t)),$$

mit einer Stammfunktion A von a und c_0 von $e^{-A}b$.

- *Sind a und b stetig auf I, dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad \varphi(t_0) = x_0,$$

auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s.$$

Prozedur *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Zunächst löst man die homogene Gleichung $\dot{x} = a(t)x$, und erhält damit

$$\varphi(t) = e^{A(t)}c, \quad A(t) = \int a(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mit Hilfe von $A(t)$ ergibt sich

$$c_0 = \int e^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s,$$

und somit kann die inhomogene Gleichung gelöst werden

$$\varphi(t) = e^{A(t)}(c + c_0).$$

Nun setzt man $\varphi(t_0) = x_0$ und löst nach c auf.

7.3 Separierbare Differentialgleichungen

- *Eine Differentialgleichung der Form*

$$\dot{x} = g(t)h(x),$$

mit stetigen Funktionen $g: I \to \mathbb{R}, h: J \to \mathbb{R}$ heißt separierbar.

- *Sind g, h stetig und x_0 Nullstelle von h, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Ist h lipschitz, so ist φ auch die einzige Lösung.

- *Seien g, h stetig auf I bzw. J und $h(x) \neq 0$ für $x \in J$. Dann existiert genau eine lokale Lösung $\varphi: I_0 \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \quad \varphi(t_0) = x_0,$$

mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$. Diese erfüllt die Gleichung

$$H(\varphi(t)) = G(t), \quad t \in I_0,$$

wobei

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)}, \quad G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Prozedur *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Zunächst prüft man $h(x)$ auf Nullstellen n_i. Gilt $n_i = x_0$ für ein i und ist $h(x)$ lipschitz, dann ist die einzige Lösung $\varphi(t) \equiv x_0$.

Andernfalls separiert man die Variablen t und x und erhält

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= g(t)h(x) \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} &= g(t)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow H(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} &= \int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t). \end{aligned}$$

Kann man H invertieren, erhält man als lokale Lösung

$$\varphi(t) = x = H^{-1}(G(t)).$$

Zuletzt setzt man $\varphi(t_0) = x_0$ und löst nach c auf.

7.4 Homogene Differentialgleichung

- *Eine Differentialgleichung der Form*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

heißt homogen, falls $f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x)$. In diesem Fall kann man $f(t, x)$ schreiben als $h\left(\frac{x}{t}\right)$.

- *Sei h stetig auf I und $\frac{x_0}{t_0} \in I$. Eine Funktion $\varphi: I_0 \to \mathbb{R}$ ist eine lokale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right), \quad x(t_0) = x_0,$$

genau dann, wenn die Funktion

$$\psi: I_0 \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t},$$

eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = \frac{h(z) - z}{t}, \quad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0},$$

darstellt.

Prozedur *Gegeben sei ein Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Um die Prozedur anwenden zu können, ist es notwendig zu überprüfen, ob $f(\lambda t, \lambda x)$ für $\lambda > 0$. In diesem Fall lässt sich f schreiben als $f(t, x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$.

Zunächst substituiert man $z = \frac{x}{t}$ und damit gilt

$$t\dot{z} - z = \dot{x} = h(z) \Leftrightarrow \dot{z} = \frac{h(z) + z}{t}.$$

Diese Differentialgleichung ist separierbar und eine allgemeine Lösung kann mit der bekannten Prozedur bestimmt werden.

Anschließend muss die Lösung für z mit $\varphi(t) = x = zt$ rücksubstituiert, und das Anfangswertproblem $\varphi(t_0) = x_0$ gelöst werden.

8 Kurven und Wege

Im Folgenden sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall von $\mathbb{R}$ und E Bannachraum.

- *Eine Kurve ist eine C^0-Abbildung $\gamma : I \to E$.*

Ihr Bild $\gamma(I) = \{\gamma(t) \in E : t \in I\}$ heißt Spur.

- *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to E$ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

- *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to E$ heißt einfach oder doppelpunktfrei, falls $\gamma\big|_{(a,b]}$ und $\gamma\big|_{[a,b)}$ injektiv sind.*

- *Eine Kurve $\gamma : I \to E$ heißt differenzierbar im Punkt $t_0 \in I$, wenn es einen Vektor $v \in E$ und eine in t_0 stetige Abbildung $r : I \to E$ mit $r(t_0) = 0$ gibt, sodass*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + v(t - t_0) + r(t)(t - t_0).$$

In diesem Fall heißt v die erste Ableitung von γ im Punkt t_0 und wird mit $\dot{\gamma}(t_0)$ bezeichnet.

- *Ist $\gamma : I \to E$ in t_0 differenzierbar, dann bezeichnet man $\dot{\gamma}(t_0)$ als Tangentialvektor von γ im Punkt $\gamma(t_0)$ und $|\dot{\gamma}(t_0)|$ als seine momentan Geschwindigkeit.*

- *Ist $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, so ist die Tangente an γ im Punkt t_0 gegeben durch*

$$\alpha(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0).$$

- *Eine C^1-Kurve heißt regulär, wenn ihre Ableitung nirgends verschwindet.*

- *Die Länge einer Kurve $\gamma \in C^0(I, E)$ ist*

$$L_I(\gamma) = \sup_T \sum_T \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

- *$\gamma \in C^0(I, E)$ heißt rektifizierbar, falls $L_I(\gamma) < \infty$.*

- *Sei $\gamma \in C^0(I, E)$. Die Längenfunktion ist definiert als*

$$\lambda : I \to \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = L_{[a,t]}(\gamma).$$

- *Eine Parametertransformation ist eine bijektive stetige Abbildung $\varphi : I \to I^*$ eines Intervalls I auf ein Intervall I^*. Ist φ monoton steigend heißt φ orientierungstreu, andernfalls orientierungsumkehrend.*

- *Zwei Kurven $\gamma \in C^0(I, E)$ und $\gamma^* \in C^0(I^*, E)$ heißen topologisch äquivalent geschrieben $\gamma \sim \gamma^*$, falls eine orientierungstreue Parametertransformation φ existiert, sodass*

$$\gamma = \eta \circ \varphi.$$

- *Ein stetiger Weg ω in E ist eine Klasse topologisch äquivalenter Kurven*

$$\omega = [\gamma] = \left\{\eta \in C^0(I, E) : \gamma \sim \eta\right\}.$$

Jedes Element $\eta \in \omega$ heißt Parametrisierung des Weges.

- *Ein Weg $\omega = [\gamma]$ heißt einfach, falls γ einfach, geschlossen, falls γ geschlossen und Jordanweg, falls γ Jordankurve ist. Der Anfangs- und Endpunkt von ω ist der Anfangs- und Endpunkt von γ und die Spur von ω ist die Spur von γ.*

- *Ein Weg heißt rektifizierbar, falls er eine rektifizierbare Parametrisierung besitzt. Seine Länge ist in diesem Fall die einer beliebigen Parametrisierung.*

- *Ein Weg heißt glatt, falls er eine reguläre Parametrisierung besitzt.*

8.1 Sätze für Kurven in Banachräumen

- *Für eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve $\gamma : I \to E$ ist äquivalent*

  (a) *Es gibt eine in t_0 stetige Abbildung $\varphi : I \to E$ mit $\varphi(t_0) = v$, sodass*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \varphi(t)(t - t_0).$$

  (b) *Es gilt*

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) = v.$$

(c) *Es gilt*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)-\nu(t-t_0)|}{|t-t_0|} = 0.$$

- *Sei $\gamma \in C^0(I,E)$ und $t_0 \in I$, dann wird durch*

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

eine stetig differenzierbare Funktion definiert mit $\dot{\Phi} = \gamma$.

Haupsatz der Differential und Integralrechnung *Sei $\gamma \in C^0(I,E)$ und Γ eine beliebige Stammfunktion auf $[a,b] \subset I$, dann gilt*

$$\Gamma(b) - \Gamma(a) = \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Außerdem gilt für jede Kurve $\gamma \in C^1(I,E)$, dass $\gamma(b)-\gamma(a) = \int_a^b \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$ ist.

- *Jede Kurve $\gamma \in C^1(I,E)$ ist lipschitz mit L-Konstante $M = \max\limits_{t\in I} ||\dot{\gamma}(t)||_E$.*

- *Ist $\gamma \in C^0(I,E)$ lipschitz mit L-Konstante M, dann ist γ rektifizierbar und es gilt*

$$L_I(\gamma) \leq M\,|I|\,.$$

Insbesondere ist jede C^1 Kurve rektifizierbar.

- *Die Längenfunktion ist additiv $L_{[a,c]} + L_{[c,b]} = L_{[a,b]}$.*

- *Ist $\gamma \in C^1(I,E)$, so ist die Längenfunktion stetig differenzierbar und es gilt $\lambda'(t) = ||\dot{\gamma}(t)||_E$, sowie*

$$\lambda(t) = \int_a^t ||\dot{\gamma}(t)||_E\,\mathrm{d}t\,.$$

- *Die euklidische Länge einer Kurve ist*

$$L_I(\gamma) = \int_I \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \ldots + \dot{\gamma}_n^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

- *Seien γ und γ^* topologisch äquivalent. Ist γ rektifizierbar, so auch γ^* und die Längen sind gleich.*

- *Jeder glatte Weg besitzt eine Parametrisierung nach der Bogenlänge*

$$\eta : [0,l] \to E$$

derart, dass $\|\dot{\eta}(t)\|_E = 1$ für alle $t \in [0,l]$ mit $l = L(\omega)$.

- *Jede stückweise C^1 Kurve ist rektifizierbar und es gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I ||\dot{\gamma}(t)||\,\mathrm{d}t\,.$$

8.2 Sätze für Kurven im $\mathbb{R}^n$

Jordanscher Kurvensatz *Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ geschlossenen und doppelpunktfrei, so besteht das Komplement von $\Gamma = \gamma(I)$ genau aus zwei disjunkten, zusammenhängenden Mengen Ω_i und Ω_o, genannt das Innere und das Äußere. Außerdem ist Ω_i beschränkt und Γ bildet den Rand von Ω_i und Ω_o.*

Satz von Peano *Es gibt stetige Abbildungen $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$, die surjektiv sind.*

- *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar genau dann, wenn jede Komponentenfunktion differenzierbar ist und es gilt*

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t)).$$

- *Eine Kurve ist von der Klasse C^r, wenn jede Komponentenfunktion C^r ist.*

- *Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r Kurve, so ist die Spur von γ lokal um jeden Punkt der Graph einer C^r Funktion.*

9 Mehrdimensionale Differentiation

- *Eine Abbildung $f : V \hookrightarrow W$ heißt differenzierbar in a, wenn es eine lineare Abbildung L und eine in a stetige Abbildung $r : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gibt, sodass gilt*

$$f(a+h) = f(a) + Lh + r(a+h)\,|h|\,.$$

- *Sei $f : V \hookrightarrow W$, a aus dem Definitionsbereich und $v \in V$ beliebig. Existiert die Ableitung*

$$D_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a+tv)\big|_{t=0},$$

so heißt $D_v f(a)$ die Richtungsableitung von f an der Stelle a in Richtung v.

- *Sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow W$, a aus dem Definitionsbereich $1 \le i \le n$. Existiert die Ableitung*

$$D_i f(a) = \frac{d}{dt} f(a+te_i)\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} f(a) = \partial_{x_i} f(a) = f_{x_i}(a),$$

so nennt man $D_i f(a)$ die partielle Ableitung von f nach i im Punkt a.

- *Die Operatornorm einer linearen Abbildung $L : V \to W$ ist definiert als*

$$\|L\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{|v|=1} |Lv|_W\,.$$

- *Sei V ein Hilbertraum und $f : V \hookrightarrow W$ in x differenzierbar. Dann ist der Gradient der eindeutig bestimmte und mit $\nabla f(x)$ bezeichnete Vektor, für den gilt $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$.*

- *Ist $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so heißt der Graph der Abbildung*

$$T : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}, \quad z(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle\,,$$

die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt a.

- *Die r-te partielle Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $D_r D_{r-1} \dots D_1 f(x)$ ist rekursiv erklärt durch $D_r D_{r-1} \dots D_1 f(x) = D_r(D_{r-1} \dots D_1 f(x))$.*

9.1 Beispiele

(a) Eine affine Abbildung $f : V \hookrightarrow W, x \mapsto Ax + b$ ist überall differenzierbar und es gilt $Df(x) = A$.

(b) Die Abbildung $g : V \hookrightarrow W, x \mapsto \langle Ax, x \rangle + b$ ist überall differenzierbar und es gilt $Df(x) = \langle Ax, \cdot \rangle + \langle A^t x, \cdot \rangle$, ist A symmetrisch gilt sogar $Df(x) = 2Ax$.

(c) Für $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ist $\nabla f(x,y) = (x, -y)^T$.

(d) Für die Abbildung $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ existieren im Nullpunkt beide partiellen Ableitungen und es gilt $f(x,0) = f(0,y) = 0$, sie ist jedoch nicht total differenzierbar. Sie ist in 0 nicht einmal stetig, denn

$$f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 2\sin\varphi.$$

9.2 Sätze für Funktionen $f : V \hookrightarrow W$

- *Für eine Abbildung $f : \Omega \to W$ sind folgende Aussagen äquivalent*

  (a) *f ist differenzierbar in a mit $Df(a) = L$.*

  (b) *$f(a+h) = f(a) + Lh + o(h)$.*

  (c) *$\lim |h|^{-1} \left| f(a+h) - f(a) - Lh \right| = 0$.*

- *Ist f in a differenzierbar, so ist f in a stetig und $Df(a)$ ist eindeutig bestimmt.*

- *Die Differentiation ist eine lineare Operation und D ist ein linearer Operator.*

Kettenregel *Ist $f : U \hookrightarrow V$ in a differenzierbar und $g : V \hookrightarrow W$ in $f(a)$, so ist auch $g \circ f : U \hookrightarrow W$ in a differenzierbar und es gilt*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

- *Ist Ω wegzusammenhängend, dann ist eine Abbildung $f : \Omega \to W$ konstant genau dann, wenn $Df(x) \equiv 0$ ist.*

- *Ist $f : U \hookrightarrow W$ differenzierbar, so gilt*

$$D_v f(a) = Df(a)v.$$

- *Ist $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ in a differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen von f und die totale Ableitung ist durch die Jacobimatrix darstellbar*

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \dots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix}.$$

- *Ist $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ in a differenzierbar, so ist*

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) v_i = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) v_i.$$

- *Existieren sämtliche partiellen Ableitungen von $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und sind diese auf Ω stetig, so ist f auf Ω differenzierbar und die Ableitung ist stetig.*

Lemma von Hadamard *Ist $f \in C^1(\Omega, W)$ und $[u, v] \subset \Omega$, so gilt*

$$f(v) - f(u) = L(v - u), \text{ mit } L = \int_0^1 Df((1-t)u + tv)\,\mathrm{d}t\,.$$

Schrankensatz *Ist $f \in C^1(\Omega, W)$ und $[u, v] \subset \Omega$, so gilt*

$$|f(v) - f(u)|_W \le \max_{z \in [u,v]} \|Df(z)\|\, |v - u|_W\,.$$

- *Ist $f \in C^1(\Omega, W)$, so ist f lokal lipschitz.*

Satz von H.A. Schwartz *Sei Ω offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, und x, y seien zwei beliebige Koordinaten in Ω. Existiert dann die zweite Ableitung f_{xy} und ist sie dort stetig, so existiert auch f_{yx} und es gilt $f_{xy} = f_{yx}$.*

9.3 Sätze für Funktionen $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$

- *Im Standardfall ist der Gradient einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ der Spaltenvektor*

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix} = Df(x)^\top.$$

Kettenregel *Ist $g : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a und $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ in $f(a)$, so gilt*

$$\nabla(f \circ g)(a) = Dg(a)^\top \nabla f(g(a)).$$

Produktregel *Seien $f, g : V \hookrightarrow W$ differenzierbar, $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Dann ist φ differenzierbar und es gilt*

$$\mathrm{D}\varphi(x) = \langle \mathrm{D}f(x)\cdot, g(x) \rangle + \langle f(x), \mathrm{D}g(x)\cdot \rangle\,.$$

Mittelwertsatz *Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $[u, v] \subset \Omega$, dann existiert ein $\xi \in [u, v]$ sodass*

$$f(v) - f(u) = Df(\xi)(v - u) = \langle \nabla f(\xi), v - u \rangle\,.$$

- *Ist $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ in x stetig differenzierbar und $\nabla f(x) \neq 0$, so bezeichnet $\nabla f(x)$ die Richtung des steilsten Anstiegs und $-\nabla f(x)$ die Richtung des steilsten Abstiegs. Beide Richtungen sind eindeutig.*

- *Sei $Q := [a, b] \times [c, d]$ und sei $g : Q \to \mathbb{R}$ auf Q stetig und stetig nach y differenzierbar, dann ist auch*

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = \int_a^x g(s, y)\,\mathrm{d}s\,,$$

nach y differenzierbar und es gilt

$$\varphi_y(x, y) = \int_a^x g_y(s, y)\,\mathrm{d}s\,.$$

10 Matritzen

- *Eine Matrix $A \in S(n)$ heißt*

(a) *positiv definit, geschrieben $A > 0$, falls $\langle Av, v\rangle > 0, \ \forall\ v \neq 0$,*

(b) *positiv semidefinit, geschrieben $A \geq 0$, falls $\langle Av, v\rangle \geq 0, \ \forall\ v$,*

(c) *negativ definit $A < 0$, falls $-A > 0$,*

(d) *negativ semidefinit $A \leq 0$, falls $-A \geq 0$,*

(e) *sonst indefinit $A \lessgtr 0$.*

- *Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

- *Ist $A \in S(n)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(a) *A ist positiv definit.*

(b) *Es gibt ein $\lambda > 0$, sodass $\langle Av, v\rangle \geq \lambda\, |v|^2$.*

(c) *Es gibt ein $\lambda > 0$, sodass $A - \lambda E \geq 0$.*

- *Sei $A \in S(n)$ und $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ seien Eigenwerte, dann gilt*

(a) *$A > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ und $A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0$.*

(b) *$A < 0 \Leftrightarrow \lambda_n < 0$ und $A \leq 0 \Leftrightarrow \lambda_n \leq 0$.*

(c) *$A \lessgtr 0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_n < 0$.*

- *Eine Matrix $A \in S(n)$ ist positiv definit genau dann, wenn alle ihre Haupt-Unterdeterminanten positiv sind. Sie ist positiv semidefinit genau dann, wenn diese nicht negativ sind.*

- *Sei $M : \Omega \to S(n)$ eine steige matrixwertige Abbildung und $M(a) > 0$. Dann existiert eine Umgebung U von a derart, dass*

$$M(x) > 0, \ \forall\ x \in U.$$

11 Mehrdimensionale Analysis

- *Für eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt*

$$Hf(a) = \left(f_{x_k x_l}(a)\right)_{1\leq k,l\leq n},$$

die Hessematrix von f an der Stelle a.

- *Eine Funktion $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt a ein lokales Minimum, falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass*

$$f(a) \leq f(x), \ \forall\ x \in B_\delta(a).$$

Das Minimum heißt strikt, falls gilt

$$f(a) < f(x), \ \forall\ x \in \dot{B}_\delta(a).$$

Analog sind lokales und striktes Maximum definiert.

- *Ein kritischer Punkt a einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ heißt nichtentartet bzw. nichtdegeneriert, falls $\det Hf(a) \neq 0$. Andernfalls entartet bzw. degeneriert.*

- *Ein nichtentarteter kritischer Punkt a einer C^2-Funktion f heißt Sattelpunkt, falls die Hessische $Hf(a)$ indefinit ist.*

- *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit kritischem Punkt a. Dann ist der Index von f in a definiert als*

$$\operatorname{ind}(a) := \operatorname{card}(Hf(a) \cap (0, \infty)).$$

- *Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt harmonisch, falls*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j} = 0.$$

- *Sei K konvex und $f : K \to \mathbb{R}$. Dann heißt f konvex, falls*

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v),$$

für alle $u, v \in K$ und $t \in [0, 1]$.
f heißt strikt konvex, wenn die strikte Ungleichung für $u \neq v \in K$ und $t \in (0, 1)$ gilt.

11.1 Beispiele

(a) Der definite Fall

Die Abbildung $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat in 0 ein striktes Minimum.

(b) Der semidefinite Fall

Die Abbildungen $f(x,y) = x^2 + y^4$, $\quad g(x,y) = x^2$, $\quad h(x,y) = x^2 + y^3$ haben in 0 einen kritischen Punkt mit semidefiniter Hessischen.

f hat ein striktes Minimum, g ein nichtisoliertes Minimum und h hat kein Minimum.

(c) Der nicht degenerierte Fall

Die Abbildung $f(x,y) = x^2 - y^2$ hat in 0 einen nicht degenerierten kritischen Punkt. Die Hessische ist dort, also liegt ein Sattelpunkt vor.

11.2 Sätze für Abbildungen $f : V \hookrightarrow W$

Satz von Taylor *Sei Ω offen und $f \in C^{r+1}(\Omega, W)$. Ist $[a, a+h] \subset \Omega$, so gilt*

$$f(a+h) = T_a^r f(h) + R_a^r f(h),$$

mit dem r-ten Taylorpolynom

$$T_a^r f(h) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} D_h^i f(a),$$

und dem zugehörigen Restglied

$$R_a^r f(h) = \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r D_h^{r+1} f(a+th)\, \mathrm{d}t\,.$$

11.3 Sätze für den Standardfall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Satz von Taylor II *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{r+1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Ist $[a, a+h] \subset \Omega$, so gilt*

$$f(a+h) = T_a^r f(h) + R_a^r f(h),$$

mit dem r-ten Taylorpolynom

$$T_a^r f(h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha,$$

und dem zugehörigen Restglied

$$R_a^r f(h) = \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{|\alpha|}{\alpha!} h^\alpha \int_0^1 (1-t)^r D^\alpha f(a+th)\, \mathrm{d}t\,.$$

11.4 Sätze für Funktionen $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$

- *Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dann gilt*

$$R_a^r f(h) = \frac{1}{(r+1)!} D_h^{r+1} f(\xi),$$

für ein $\xi \in [a, a+h]$.

Spezialfall *Ist $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ und $[a, a+h] \subset \Omega$, dann gilt*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\xi) h_i h_j,$$

für ein $\xi \in [a, a+h]$.

- *Für eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt*

$$D_h^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(a) h_i h_j = \langle Hf(a)h, h \rangle\,.$$

- *Ist $f \in C^{r+1}\Omega$ und*

$$D^\alpha f = 0, \quad |\alpha| = r+1,$$

so ist f ein Polynom vom Grad $\leq r$.

Satz von Fermat *Besitzt $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ in a ein lokales Extremum, so ist $\mathrm{D}f(a) = 0$.*

- *Ist Ω offen und besitzt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in a ein lokales Extremum, so gilt*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle,$$

für alle hinreichend kleinen h und ein $\xi \in [a, a+h]$.

- *Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $a \in \Omega$ eine Minimalstelle, dann gilt*

$$Hf(a) \geq 0.$$

- *Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $a \in \Omega$ ein kritischer Punkt von f. Existiert eine Umgebung U von a derart, dass*

$$Hf(x) \geq 0, x \in U,$$

dann hat f an der Stelle a ein lokales Minimum. Gilt sogar

$$Hf(a) > 0,$$

so liegt ein striktes Minimum vor.

- *Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist lokal in einem nichtentarteten kritischen Punkt a bereits vollständig durch $\mathrm{ind}(a)$ charakterisiert.*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ind}(a) = 0 \Leftrightarrow Hf(a) < 0,\\
&\mathrm{ind}(a) = n \Leftrightarrow Hf(a) > 0,\\
&0 < \mathrm{ind}(a) < n \Leftrightarrow Hf(a) \lessgtr 0.
\end{aligned}$$

- *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und a ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von f, dann ist a isoliert.*

Lemma von Morse *Sei $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und a ein nichtentarteter kritischer Punkt. Dann können um a neue Koordinaten $u = (u_1, \dots, u_n)$ eingeführt werden, sodass*

$$f(u) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} u_i^2 - \sum_{j=k}^{n} u_j^2,$$

wobei $k = \mathrm{ind}(a)$.

- *Im $\mathbb{R}^n$ gibt es genau $n+1$ verschiedene nichtentartete kritische Punkte. Strikte Minimalstellen, strikte Maximalstellen und $n-1$ Sattelpunkte mit $k = 1, \dots, n-1$.*

Maximumsprinzip harmonischer Funktionen *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und sei $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch, dann gilt*

(a) *$|f|$ nimmt ihr Maximum auf dem Rand an $\max\limits_{\bar{\Omega}} |f| = \max\limits_{\partial\Omega} |f|$.*

(b) *Ist f auf dem Rand von Ω konstant, so ist f auf $\bar{\Omega}$ konstant.*

- *Sei K eine konvexe Teilmenge des Vektorraums V und $f : K \to \mathbb{R}$, dann ist f konvex genau dann, wenn ihr Epigraph*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(u, z) \subset V \times \mathbb{R} : u \in K, z \geq f(u)\},$$

konvex ist.

- *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvex, dann ist f stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω sogar lipschitz.*

- *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f \in C^1(\Omega)$, dann ist f konvex genau dann, wenn*

$$f(x+h) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), h\rangle,$$

für alle $x, x+h \in \Omega$ und strikt konvex genau dann, wenn die strikte Ungleichung für $h \neq 0$ gilt.

- *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f \in C^2(\Omega)$, dann ist f konvex genau dann, wenn*

$$Hf(x) \geq 0$$

für alle $x \in \Omega$. f ist strikt konvex, falls $Hf(x) > 0$.

- *Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ strikt konvex und koerziv, dann besitzt f genau eine Minimalstelle x_0 und es gilt $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x_0)$.*

12 Umkehrabbildungen & Implizite Funktionen

- *Eine C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n \geq m$ heißt regulär im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und x_0 heißt regulärer Punkt, wenn $\mathrm{D}f(x_0)$ surjektiv ist, andernfalls singulär. f heißt regulär, wenn f in jedem Punkt regulär ist.*

- *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt eine C^1-Abbildung $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphimus auf Ω, wenn*

  (a) $\Omega' = \varphi(\Omega)$ *offen ist,*

  (b) $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *bijektiv abbildet,*

  (c) $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *ebenfalls C^1 ist.*

- *Ein Lipeomorphismus ist eine bijektive Abbildung zwischen zwei offenen Mengen, die in beiden Richtungen lipschitz ist.*

- *Eine offene Abbildung bildet jede offene Menge auf eine offene Menge ab.*

- *Für lipschitzstetige Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ wird durch*

$$[f]_\Omega = \sup_{v \neq u} \frac{||f(v) - f(u)||}{\|v - u\|},$$

eine Seminorm definiert. $[f]_\Omega$ ist die bestmögliche Lipschitzkonstante von f auf Ω.

12.1 Sätze für Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

- *Ein Diffeomorphimus ist in jedem Punkt regulär.*

- *Eine C^1 Abbildung $\varphi : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann diffeomorph, wenn sie regulär und bijektiv ist.*

- *Ist Ω konvex und $f \in C^1(\Omega)$, dann gilt*

$$||\mathrm{D}f|| = [f]_\Omega.$$

- *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Gilt für jedes $x \in \Omega$*

$$\langle \mathrm{D}f(x)h, h\rangle > 0, \quad h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

so ist f auf Ω umkehrbar.

- *Lokal um einen regulären Punkt ist eine C^1 Abbildung diffeomorph.*

12.2 Beweis des Satzes über Umkehrabbildungen

Banachscher Fixpunktsatz *Sei $(E, \|\cdot\|)$ Banachraum, $X \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge und $T : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $0 < \theta < 1$, sodass*

$$\|Tv - Tu\| \leq \theta \|v - u\|, \quad v, u \in X$$

dann besitzt T genau einen Fixpunkt ξ.

Spezialfall *Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad \mathrm{D}\varphi(0) = \mathrm{Id},$$

dann ist φ lokal um 0 diffeomorph.

- *Es genügt den Spezialfall zu beweisen, der allgemeine Fall folgt daraus.*

- *Erfüllt φ den Spezialfall, so existiert ein $r > 0$, sodass*

$$[\varphi - \mathrm{id}]_{B_r(0)} < \frac{1}{4}.$$

Für alles weitere fixiert man $A = B_{r/2}(0), B = B_r(0)$

Proposition A *Ist $\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ lipschitz mit $[\varphi - \mathrm{id}]_B < 1$, so ist φ injektiv.*

Proposition B *Sei $\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ lipschitz mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad [\varphi - \mathrm{id}]_B < \frac{1}{4}.$$

Dann existiert eine stetige Abbildung $\psi : A \to B$ mit

$$\psi(0) = 0, \quad [\psi - \mathrm{id}]_A < \frac{1}{2},$$

sodass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_A$ ist.

Proposition C *Sei $\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ lipschitz mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad [\varphi - \mathrm{id}]_B < \frac{1}{4}.$$

Dann definiert φ ein Lipeomorphismus von einer Umgebung $U \subset B$ von 0 auf A mit

$$\varphi^{-1}(0) = 0, \quad [\varphi^{-1} - \mathrm{id}]_A \le \frac{1}{2}.$$

Proposition D *Ist φ in Proposition C von der Klasse C^1, so definiert φ einen Diffeomorphismus von U auf A. Ist φ außerdem C^r, so ist φ^{-1} ebenfalls C^r.*

12.3 Satz über implizite Funktionen

Satz über implizite Funktionen (IFS) *Sei $m < n$,*

$$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m,$$

stetig differenzierbar und $f(u_0, v_0) = w_0$. Ist (u_0, v_0) ein regulärer Punkt von f, so existieren Umgebungen $U \times V$ von (u_0, v_0) und W von w_0, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung

$$g : W \times V \to U, \quad g(w, v) = u,$$

so dass für jedes $w \in W$ gilt

$$\{(u,v) \in U \times V : f(u,v) = w\} = \{(g(w,v), v) : v \in V\}.$$

- *Für jedes $w \in W$ existiert die Ableitung der impliziten Funktion und es gilt*

$$g_v(v) = f_u^{-1} f_v \,|_{(g(v),v)}.$$

- *Sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ist p_0 ein regulärer Punkt, so ist lokal um p_0 die Niveaumenge*

$$\{x : f(x) = f(p_0)\},$$

darstellbar als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.

13 Mannigfaltigkeiten

- *Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Mannigfaltigkeit der Kodimension m, falls eine offene Umgebung Ω von M und eine stetig differenzierbare Abbildung ohne singuläre Punkte $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass gilt*

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}.$$

- *Sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ein Punkt $w \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f, falls $f^{-1}(w)$ entweder leer ist oder nur aus regulären Punkten besteht. Andernfalls heißt w singulärer oder kritischer Wert von f.*

- *Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine durch f definierte Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, falls f in einer offenen Umgebung um M stetig differenzierbar ist, regulären Wert 0 hat, und $M = f^{-1}(0)$ gilt.*

- *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt p, falls es eine C^1-Kurve $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow M$ gibt mit*

$$\gamma(0) = p, \quad \dot\gamma(0) = v.$$

- *Die Menge aller Tangentialvektoren an M im Punkt p heißt Tangentialraum von M an p und wird mit T_pM bezeichnet.*

- *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann heißt das orthogonale Komplement zum Tangentialraum T_pM der Normalraum von M in p und wird mit N_pM oder $T_p^\perp M$ bezeichnet. Seine Elemente heißen die Normalenvektoren von M in p.*

- *Die Tangentialebene an M im Punkt p ist die zu T_pM parallele affine Ebene durch den Punkt p*

$$E_pM = p + T_pM.$$

13.1 Sätze für gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten

- *Eine Mannigfaltikeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Kodimension m ist lokal um jeden Punkt $p \in M$ der Graph einer Funktion $g : \mathbb{R}^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.*

- *Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit genau dann, wenn gilt*

$$M = f^{-1}(0),$$

mit einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0.

- *Ist M eine durch f definierte Mannigfaltigkeit, so gilt*

$$T_p M = \ker Df(p), \quad p \in M$$

Jeder $T_p M$ ist ein Vektorraum mit derselben Dimension wie M.

- *Sei M eine durch f definierte Mannigfaltigkeit der Kodimension m im $\mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt …*

$$T_p^\perp M = \operatorname{span}\left\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)\right\}, \quad p \in M.$$

- *Sei M eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung von M stetig differenzierbar. Dann besitzt $f\big|_M$ einen kritischen Punkt in p genau dann, wenn*

$$\nabla f(p) \in T_p^\perp M.$$

- *Sei M eine durch g definierte Mannigfaltigkeit der Kodimension m im $\mathbb{R}^n$ und sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von M stetig differenzierbar. Dann besitzt $f|_M$ einen kritischen Punkt in $p \in M$ genau dann, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt, sodass*

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(p).$$

- *Seien $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und sei 0 ein regulärer Wert von g. Dann besitzt f unter den Nebenbedingungen $g = 0$ genau dann einen kritischen Punkt in p, wenn die erweiterte Funktion*

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle,$$

einen kritischen Punkt (p, λ) besitzt.