Numerik - Formelsammlung

Jan-Cornelius Molnar, Version: 8. Juli 2009 16:13

1 Darstellung von Zahlen

- *Zahlen lassen sich als b-a-dische Brüche darstellen,*

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_0 \mathrel{\widehat{=}} \sum_{j=0}^{n} a_j b^j, \qquad b \in \{2, 3, \dots\}, a_j \in 0, 1, \dots, b-1.$$

- *Reelle Zahlen stellen wir als Fließkommzahlen dar*

$$\underbrace{\pm a_0 a_1 \dots a_n}_{\textit{Mautisse}} \mathrm{E} \underbrace{\pm c_m c_{m-1} \dots c_0}_{\textit{Exponent}} \mathrel{\widehat{=}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b^{-j} \right) b^{\sum_{n=0}^{m} c_j b^j}, \qquad a_0 \neq 0.$$

- *Der absolute Fehler ist gegeben durch,*

$$e_A = |z - \tilde{z}|, \qquad z \in \mathbb{R},\ \tilde{z} \textit{Approximation.}$$

- *Der relative Fehler ist gegeben durch,*

$$e_R = \frac{|z - \tilde{z}|}{|z|}, \qquad z \in \mathbb{R},\ \tilde{z} \textit{Approximation.}$$

- *Addition* $e_A = |\delta x + \delta y| \le |\delta x| + |\delta y|, e_R = \frac{|\delta x + \delta y|}{|x+y|}$.
- *Multiplikation*

$$\begin{aligned} e_A &= |x \cdot y + x \cdot \delta y + \delta x \cdot y + \delta x \cdot \delta y - x \cdot y| \\ &= |x \cdot \delta y + \delta x \cdot y + \delta x \cdot \delta y| \, |\delta y| \\ e_R &= \frac{|x \cdot \delta y + \delta x \cdot y + \delta x \cdot \delta y|}{|xy|} \le \frac{|\delta y|}{|y|} + \frac{|\delta x|}{|x|} + \frac{|\delta x|}{|x|} \frac{|\delta y|}{|y|}. \end{aligned}$$

- *Funktionsauswertung*

$$\begin{aligned} e_A &= |f'(x)| \, |\delta x| \\ e_R &= \frac{|\delta x|}{|x|} \frac{|f'(x)| \, |x|}{|f(x)|}. \end{aligned}$$

- *Numerische Differentiation*

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{|h|}{2} \, |f''(\xi)| \, ,$$
$$e_A \le \frac{h}{2} C_{f''} + \frac{3\varepsilon}{h} + \varepsilon.$$

Minimal für $h = \sqrt{\frac{6\varepsilon}{C_{f''}}}$, $e_{A_{min}} = \sqrt{2\varepsilon C_{f''}}$.

2 LGS

Im Folgenden sei stets $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

- *Die LU-Zerlegung,*

$$(L/U) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ l_{2,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & u_{n,n} \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

- *A heißt positiv definit, falls* $\langle x, Ax \rangle \ge 0, \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$.
- *Spaltenmaximumsstrategie. Wähle p so, dass* $|a_{pi}| \ge |a_{ji}|, \;\; \forall \; j \ge i$.
- *Relatives Spaltenmaximum Strategie. Wähle p so, dass* $\frac{|a_{pi}|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|}$ *maximal ist.*
- *A heißt streng diagonaldominant, falls* $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.
- *Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls positiv Definit, homogen und Dreiecksungleich.*
- *Seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ Normen, die M Matrixnorm ist gegeben durch,*

$$\|A\|_{n,m} := \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_m}.$$

- *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. $\kappa(A) = ||A^{-1}|| \, \|A\|$ heißt Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$.*

2.1 Sätze Allgemein

- *A positiv definit $\Rightarrow$ Jede HU-Matrix A^m ist positiv definit.*

- *A regulär $\Rightarrow$ Jede HU-Matrix A^m ist regulär.*

- *Vertauschen von Spalten oder Zeilen allein zerstört im Allgemeinen Regularität bzw. Symmetrie.*

2.2 Sätze LU

- *$A = LU$ existiert $\Leftrightarrow$ alle HU-Matritzen sind regulär.*

- *Sei A streng diagonaldominant, dann ist auch $A^{(k)}$ als Matrix nach $k-1$ Schritten diagonaldominant.*

- *Sei A streng diagonaldominant, dann ist die LU-Zerlegung ohne Pivotisierung anwendbar und die rel. Spaltenmaximumsstrategie liefert das aktuelle Element als Pivotelement.*

2.3 Beispiele für Matrixnormen

(a) Die Matrixnorm zur $\|\cdot\|_1$-Norm heißt Spaltensummennorm,

$$\|A\|_1 := \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

(b) Die Matrixnorm zur $\|\cdot\|_\infty$-Norm heißt Zeilensummennorm,

$$\|A\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\,.$$

(c) Die Matrixnorm zur $\|\cdot\|_2$-Norm heißt Spektralnorm,

$$\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|}\ :\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^\top A\right\} = \sqrt{\|A^\top A\|_2}.$$

2.4 Sätze für Matrixnormen

- *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so ist* $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_A|\}$*, sonst* $\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda_{A^\top A}|}\right\}$.
- *Sei A invertierbar und λ EW von A, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ EW von A^{-1}.*
- *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A invertierbar und $||A^{-1}||\,\|B\| < 1$ für eine Norm. Dann ist $A+B$ invertierbar und*

$$\left|\left|(A+B)^{-1}\right|\right| = \frac{||A^{-1}||}{1-\|A^{-1}\|\,\|B\|}.$$

- *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$ und $||A^{-1}||\,\Delta A < 1$. Dann gilt für $\tilde{x} = x + \Delta x$,*

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

2.5 Cholesky Zerlegung

- *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, dann existiert die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$, mit einer linken unteren Dreiecksmatrix L.*

3 Interpolation

- *Den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_n$.*
- *Lagrangeinterpolation zu (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_i L_j(x)$$

$$L_j(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0\\n\neq j}}^{n}(x-x_k)}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j-x_k)}, \qquad L_j(x_i) = \delta_{ij}.$$

- *Newtoninterpolation zu (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q_j(x),$$

$$q_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x-x_k), \qquad j = 0, \dots, n.$$

- *Sei $p_{i,j} \in \mathcal{P}_j$ das Interpolationspolynom zu (x_k, y_k) $k = i, \dots, i+j$. Dann gilt für $j \geq 1$*

$$p_{i,j} = \frac{(x - x_i)p_{i+1,j-1}(x) - (x - x_{i+j})p_{i,j-1}(x)}{x_{i+j} - x_i}. \tag{1}$$

Formel der dividierten Differenzen *Für $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$,*

$$c_{i,j} = \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i},$$

mit $c_k = c_{0,k}$ und $c_{i,0} = y_i$.

3.1 Sätze Lagrangeinterpolation

- *Seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, x_i paarwweise verschieden. Dann hat, finde $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_i) = y_i$ genau eine Lösung.*

3.2 Approximationseigenschaften

- *Sei $p \in \mathcal{P}_n$ Interpolationspolynom mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, x_i paarweise verschieden, $f \in \mathbb{C}^{n+1}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$|p(x) - f(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \right|.$$

4 Numerische Integration

- *Eine Quadraturformel zu den Stützstellen x_i und den Gewichten ω_i ist gegeben durch,*

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

- *Lagrangedarstellung*

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

$$\omega_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, \mathrm{d}x.$$

- *Abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln*

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = a + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{h}.$$

- *Offene Newton-Cotes-Formeln*

$$x_1 = a + \frac{h}{2},\ x_n = b - \frac{h}{2},\ x_i = a + \frac{2i-1}{2}h,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

- *Zusammengesetzte Trapezregel*

$$y_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, m \quad h = \frac{b-a}{m},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \dots.$$

- *Zusammengesetzte Simpsonregel*

$$y_i = a + 2ih, \quad i = 0, \dots, \frac{m}{2} \quad h = \frac{b-a}{m},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \dots.$$

- *Q heißt symmetrisch, falls*

$$x_{m-j} - x_j = a + b, \text{ und } \omega_{m-j} = \omega_j, \quad j = 0, \dots, m.$$

- *Q heißt exakt auf $\mathcal{P}_m$, falls $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = Q(p),\ \forall\ p \in \mathcal{P}_m$.*

4.1 Sätze

- *Sei Q exakt auf $\mathcal{P}_m$. Dann gilt für $f \in C^{m+1}([a,b])$*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q(f) \right| \le \frac{1}{(m+1)!} \left\| f^{(m+1)} \right\|_\infty \int_a^b \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)\,\mathrm{d}x. \quad \rtimes$$

- *Eine symmetrische Quadraturformel die auf $\mathcal{P}_{2l}$, $\quad l \in \mathbb{N}_0$ exakt ist, ist auch auf $\mathcal{P}_{2l+1}$ exakt.*

- *Eine Newton-Cotes-Formel*

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i),$$

der Stufe m ist

(i) *symmetrisch,*

(ii) *exakt auf* $\begin{cases} \mathcal{P}_m, & \text{für } m \text{ ungerade,} \\ \mathcal{P}_{m+1}, & \text{für } m \text{ gerade.} \end{cases}$

- *Sei Q eine auf $\mathcal{P}_k$ exakte Integrationsformel für $[a,b]$. Dann gilt für $f \in C^{k+1}([a,b])$*

$$
\begin{aligned}
Q(f) - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b K(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,, \\
K(t) &= \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=0}^{m} \omega_i (x_i - t)_+^k - \int\limits_a^b (x-t)_+^k\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=0}^{m} Q\left(x \mapsto (x-t)_+^k\right) - \int\limits_a^b (x-t)_+^k\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}
$$

5 Algorithmen

Im Folgenden sei stets $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

- *Gauß-Elimination $Ax = b$.*

Für $i = 1 \ldots n-1$ (Spalten)

    Für $j = i+1, \ldots, n$ (Zeilen)

        $l_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$

        Für $j = i+1, \ldots, n$

            $a_{jk} = a_{jk} - l_{ji} \cdot a_{ik}$

        $b_j = b_j + l_{ji} b_i$

Aufwand MulDiv $\approx \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

Rückwertsauflösen. $x_n = \dfrac{b}{a_{nn}}$

Für $j = n-1, n-2, \ldots, 1$

$$x_j = \frac{1}{a_{ji}}\left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k\right)$$

Aufwand MulDiv $\frac{1}{2}(n^2 + n)$.

- *LU-Zerlegung $A = LU$.*

Für $i = 1, \dots, n-1$

  Für $j = i+1, \dots, n$

    $a_{ji} = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

    Für $k = i+1, \dots, n$

      $a_{jk} = a_{jk} - a_{ji} \cdot a_{ik}$

Aufwand MulDiv $= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

Vorwärtsauflösen.

$y_1 = b_1$

Für $i = 2, \dots, n$

  $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j$

Rückwärtsauflösen.

$x_n = \frac{y_n}{a_{nn}}$

Für $i = n-1, \dots, 1$

  $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$

Aufwand $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$.

- *LU-Zerlegung* $A = PLU$ *mit Pivotisierung*

Für $i = 1, \dots, n-1$.

  Bestimme einen Pivot-Index $p_i \in \{i, \dots, n\}$.

  Falls $p_i \neq i$: Vertausche Zeilen i, p (*)

  Für $j = i+1, \dots, n$

    $a_{ji} = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

    Für $k = i+1, \dots, n$

      $a_{jk} = a_{jk} - a_{ji} a_{ik}$

- *Bandmatritzen.*

Aufwand $\approx n m_1 m_2$.

- *Cholesky Zerlegung.*

$$
\begin{aligned}
&l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\
&\textit{Für } i = 2, \ldots, n \\
&\qquad \textit{Für } j = 1, \ldots, i-1 \\
&\qquad\qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) \\
&\qquad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}.
\end{aligned}
$$

Aufwand n *Wurzeln* $+ \frac{1}{6} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ *MulDiv* $\approx \frac{1}{6} n^3$.

- *Newton-Interpolation.*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Für } i = 0, \ldots, n \\
&\qquad c_i = y_i \\
&\textit{Für } j = 1, \ldots, n \\
&\qquad \textit{Für } i = n, n-1, \ldots, j \\
&\qquad\qquad c_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{x_i - x_{i-j}}
\end{aligned}
$$

Aufwand MulDiv $\frac{n(n-1)}{2}$.

- *Horner Schema* $p(x) = \Big(\ldots (c_n (x - x_{n-1}) + c_{n-1}) (x - x_{n-2}) + \ldots \Big) + c_0$.

$$
\begin{aligned}
&p = c_n \\
&\textit{Für } k = n-1, n-2, \ldots, 0 \\
&\qquad p = p(x - x_k) + c_k
\end{aligned}
$$

Aufwand MulDiv n.