

# Theoretische Physik I - Mitschrieb

bei Prof. Dr. H.P. BÜchler

Jan-Cornelius Molnar, Version: 29. September 2009 16:34

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundprinzipien</b>	<b>4</b>
1.1 Raum und Zeit	4
■ Trägheitsgesetz (1. Newtonsche Gesetz)	5
■ Bewegungsgesetz (2. Newtonsche Gesetz)	5
■ Actio = Reactio (3. Newtonsche Gesetz)	6
■ Kraftgesetze	7
■ Galilei-Transformation	8
1.2 Symmetrien und Erhaltungssätze	10
■ Folgerungen aus der Galilei-Invarianz	11
■ Ausblick: Wann bricht die Klassische Mechanik zusammen?	14
<b>2 Lagrangsche Mechanik</b>	<b>15</b>
2.1 Euler-Lagrange Gleichungen	15
2.2 Variationsrechnung	17
2.3 Hamilton's Prinzip der kleinsten Wirkung	20
2.4 Lorentz-Kraft	23
2.5 Noether Theorem	24
2.6 Energieerhaltung	28
<b>3 Zweikörper Zentralkraft Problem</b>	<b>30</b>
3.1 Reduktion auf 1-Teilchen Problem	30
3.2 Integration der Bewegungsgleichung	32
3.3 Gravitationspotential	36
■ Repitition: Kegelschnitte	38
■ Keplerschen Gesetze	39
■ Laplace-Runge-Lenz Vektor	41

3.4	Streuexperimente . . . . .	41
■	Rutherfordstreuung . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Systeme mit Zwangsbedingungen</b>	<b>45</b>
■	Holonome Zwangsbedingungen . . . . .	45
■	Nichtholome Zwangsbedingungen . . . . .	47
4.1	Dynamik eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen . . . .	48
■	Prinzip von d'Alembert . . . . .	51
4.2	Mathematische Struktur . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>57</b>
5.0	Mathematische Formulierung . . . . .	58
■	Die Lichtgeschwindigkeit als universelle Konstante . . . . .	63
5.1	Einfache Folgerungen aus der SRT . . . . .	64
■	Relativität der Gleichzeitigkeit . . . . .	65
■	Längenkontraktion . . . . .	66
■	Zeitdilatation . . . . .	67
■	Zwillingsparadoxon . . . . .	70
5.2	Lorentztransformation . . . . .	71
■	Addition von Geschwindigkeiten . . . . .	73
5.3	Energie und Impuls . . . . .	74
■	Weitere 4-er Vektoren . . . . .	77
5.4	Relativistischer Dopplereffekt . . . . .	79
5.5	Relativistische Kraftgesetze . . . . .	79
5.6	Variationsprinzip . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>83</b>
6.1	Bewegung im beschleunigten Bezugssystem und Scheinkräfte . . . .	83
6.2	Starre Körper . . . . .	86
■	Erhaltungsgrößen . . . . .	87
■	Drehimpuls . . . . .	90
6.3	Lagrange's top . . . . .	92
■	Qualitative Diskussion . . . . .	94
■	Vorestellung der $SO(3)$ . . . . .	96

<b>7</b>	<b>Hamilton'sche Dynamik</b>	<b>98</b>
7.1	Legendre Transformation . . . . .	99
7.2	Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichung . . . . .	100
7.3	Poisson-Klammern . . . . .	102
	■ Symplektische Notation . . . . .	104
7.4	Extremalprinzip . . . . .	105
7.5	Kanonische Transformationen . . . . .	106
	■ Zusammenfassung . . . . .	109
	■ Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	110
7.6	Endliche kanonische Transformationen . . . . .	110
7.7	Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen . . . . .	112

# 1 Grundprinzipien

Wir beginnen mit den wichtigsten experimentellen Fakten, auf denen die Klassische Mechanik aufbaut.

## 1.1 Raum und Zeit

Unser **Raum** ist ein dreidimensionaler euklidischer Raum und die Zeit ist eindimensional. Ein **Teilchen** beschreibt eine Kurve

$$t \mapsto \vec{r}(t),$$

in diesem  $(3 + 1)$ -dimensionalen Raum.



### 1 Teilchen Trajektorie.

Der Raum ist homogen und isotrop, d.h. kein Punkt und keine Richtung sind ausgezeichnet. Ebenso ist die Zeit homogen, das heißt kein Zeitpunkt ist ausgezeichnet.

Die **Geschwindigkeit** ist die Ableitung der Raumkurve nach der Zeit,

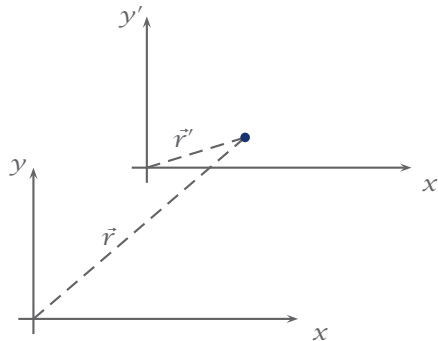
$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t),$$

die **Beschleunigung** ist die zweite Ableitung der Raumkurve,

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

## ■ Trägheitsgesetz (1. Newtonsche Gesetz)

Es gibt **Inertialsysteme**, in denen alle Naturgesetze zu allen Zeiten gleich sind. Ein System, das sich gleichförmig zu einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem.



### 2 Zwei Inertialsysteme.

Die Beschleunigung, die ein Teilchen in einem Inertialsystem erfährt, ist somit in allen Inertialsystemen gleich. Insbesondere erfährt ein kräftefreies Teilchen keine Beschleunigung und bewegt sich gleichförmig,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0.$$

Eine gute Approximation eines Inertialsystems erhalten wir, indem wir uns an den Fixsternen orientieren. Doch selbst hier gibt es noch Abweichungen, da sich auch unserer Galaxie dreht. Für die meisten Experimente genügt es jedoch, die Erdoberfläche als Inertialsystem zu wählen. Für große Geschwindigkeiten und Strecken müssen jedoch Effekte wie die Corioliskraft, die durch die Erdrotation entstehen, berücksichtigt werden, was man am Foucaultsches Pendel oder an der Rotation von Wirbelstürmen beobachten kann.

## ■ Bewegungsgesetz (2. Newtonsche Gesetz)

Die **Masse**  $m$  eines Teilchens ist eine skalare Größe und daher vom Inertialsystem unabhängig. Sie ist eine Eigenschaft der Teilchen.

Der **Impuls** eines Teilchens ist gegeben durch,

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = m\dot{\vec{r}}(t).$$

Somit folgt die Bewegungsgleichung im Inertialsystem,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$

wobei  $\vec{F}$  die **Kraft**, die auf das Teilchen wirkt, bezeichnet. Für  $N$ -Teilchen erhalten wir,

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t).$$

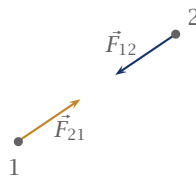
Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Trajektorien  $x_i(t)$  sind eindeutig durch Ort und Geschwindigkeit zur Anfangszeit  $t_0$  bestimmt. Die klassische Mechanik beschreibt also ein vollkommen deterministisches Weltbild.

Bisher lässt sich die Masse experimentell nicht absolut sondern nur in Relation zur Masse eines anderen Körpers bestimmen. Dies erfolgt durch den Vergleich der Beschleunigungen für eine feste Kraft,

$$\begin{aligned} \dot{r}_a &= \frac{F}{m_a}, & \dot{r}_b &= \frac{F}{m_b} \\ \Rightarrow \frac{\dot{r}_a}{\dot{r}_b} &= \frac{m_b}{m_a}. \end{aligned}$$

### ■ Actio = Reactio (3. Newtonsche Gesetz)

Die Kraft  $\vec{F}_{21}$ , die das zweite Teilchen auf das erste ausübt, ist entgegengesetzt zu der Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die das erste Teilchen auf das zweite ausübt.  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .



### 3 Actio und Reactio.

Für zwei wechselwirkende Teilchen gilt daher die Beziehung,

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\vec{r}}_2,$$
$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\vec{r}}_2.$$

## ■ Kraftgesetze

In der Natur kommen vier fundamentale Wechselwirkungen vor, nämlich Gravitation, Elektromagnetische Wechselwirkung, Starke und Schwache Wechselwirkung. In der klassischen Mechanik spielen lediglich Gravitation und Elektromagnetismus eine Rolle, die durch folgende Gesetze beschrieben werden.

Das **Coulombsche Gesetz** hat die Form,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}, \quad \text{im cgs-System,}$$

wobei die Ladung  $e_i$  im Gegensatz zur Masse  $m_i$  unabhängig vom Träger ist.

Man kann die schwere Masse als Ladung bezüglich der Gravitation betrachten. Die entsprechende Beziehung stellt das **Gravitationsgesetz** her

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\hat{m}_1 \hat{m}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$

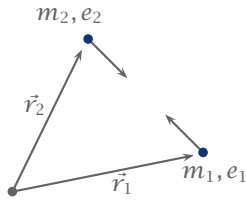
Es stellt sich nun die Frage ob die schwere Masse  $\hat{m}_i$  des Gravitationsgesetzes gleich der trägen Masse  $m_i$  des Trägheitsgesetzes ist. Loránd Eötvös<sup>1</sup> erzielte 1909 das experimentelle Resultat,

$$\frac{\hat{m}}{m} = \text{universelle Konstante.}$$

$G$  ist nun so bestimmt, dass die schwere Masse identisch zur trägen Masse ist. Diese Gleichheit ist auch eine der Grundannahmen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

---

<sup>1</sup>Loránd Eötvös (\* 27. Juli 1848 in Buda; † 8. April 1919 in Budapest) war ein ungarischer Physiker. International bekannt war er als (Baron) Roland von Eötvös



4 2-Teilchen Kraft.

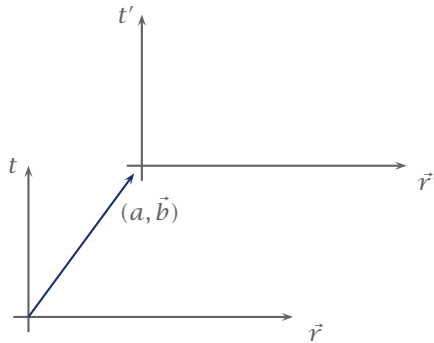
■ Galilei-Transformation

Eine **Galilei-Transformation** beschreibt den Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes.

$$t' = t + a,$$

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{v}t + \vec{b},$$

dabei sind  $a, \vec{b}$  und  $\vec{v}$  konstant und  $R$  eine Drehmatrix.



5 Galilei Transformation.

Im  $(3 + 1)$  dimensionalen Raum hat die Transformation die Form

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \vec{b} \end{pmatrix}.$$

Die Translation hat somit insgesamt 10 Parameter,



- Translation in Raum und Zeit  $\vec{b}, a$  (4-Parameter)
- Boost  $\vec{v}$  (3-Parameter)
- Rotationen im Raum  $R \in \text{SO}(3)$  (3-Parameter)

Unter  $\text{SO}(3)$  verstehen wir,

$$\text{SO}(3) = \left\{ R \in M_{3 \times 3} : R^t R = R R^t = \mathbb{1} \text{ und } \det R = 1 \right\}.$$

**BSP 1** Rotation um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\vartheta$ ,

$$R = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die  $x$ -Achse mit Winkel  $\vartheta$ ,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Die Menge der Galilei-Transformationen bildet eine 10-parametrische Gruppe, die **Galilei-Gruppe**  $\mathcal{G}$ .

*Bemerkung.* Die Galilei Transformationen  $g \in \mathcal{G}$  haben die Eigenschaften.

- $g_2 \circ g_1 \in \mathcal{G}$ ,
- $(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$  Assoziativität,
- $g \circ \mathbb{1} = g = \mathbb{1} \circ g$  Einselement,
- Zu  $g \in \mathcal{G}$  existiert ein Inverses  $g^{-1}$  mit  $g^{-1} \circ g = \mathbb{1} = g \circ g^{-1}$ ,
- $\mathcal{G}$  ist nicht kommutativ.  $\rightarrow$

Neben den gewöhnlichen Transformationen gibt es noch zwei diskrete Transformationen

- Raumspiegelung  $\vec{r}' = -\vec{r}$
- Zeitumkehr  $t' = -t$

Die 10 Parameter der Galilei-Transformation beschreiben 10 Symmetrien, aus denen wir 10 Erhaltungssätze herleiten können.

## 1.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Gesetze der Klassischen Mechanik für ein abgeschlossenes System<sup>2</sup> sind forminvariant unter Galilei-Transformationen.

*Bemerkung.* Man sagt auch, dass die Galilei-Gruppe die Symmetrie-Gruppe der Klassischen Mechanik ist (abgesehen von der Zeitumkehr). →

**Homogenität des Raums** *Kein Punkt des Raums ist ausgezeichnet, es sind daher nur Relativbewegungen von Bedeutung und der Nullpunkt kann frei gewählt werden.* ✕

Betrachten wir die Kraft  $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ , dann bewirkt die Homogenität des Raums, dass die Kraft unter einer Galilei-Transformation mit  $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 + \vec{a}$  und  $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 + \vec{a}$  erhalten bleibt,

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, t) = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t).$$

**Homogenität der Zeit** *Es existiert kein ausgezeichneter Zeitpunkt, also sind alle Fundamentalkräfte zeitunabhängig.* ✕

**Isotropie des Raumes** *Der Raum hat keine ausgezeichnete Richtung, betrachtet man also zwei Teilchen, so ist die einzig verfügbare Richtung  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .* ✕

**Invarianz unter boost** *Es gibt kein absolutes Ruhesystem, die Geschwindigkeit hat nur eine relative Bedeutung  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .* ✕

---

<sup>2</sup>abgeschlossen bedeutet, dass keine Kräfte von Teilchen ausgehen, die sich außerhalb des Systems befinden.

## ■ Folgerungen aus der Galilei-Invarianz

2-Teilchen Kräfte, die geschwindigkeitsunabhängig sind, können geschrieben werden als

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

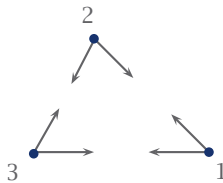
da nur der Abstand  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  und die Richtung  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  identifizierbar sind.

*Bemerkung.* 1.) Wir haben bereits gesehen, dass die Fundamentalkräfte Coulomb-Wechselwirkung und Gravitationskraft von dieser Gestalt sind. Jetzt sehen wir, dass es auch die einzig mögliche ist.

2.) Das 3. Newtonsche Gesetz folgt direkt aus der Galilei-Invarianz.

3.) Fundamentale Kräfte, die von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängen existieren in der Newtonschen Mechanik nicht.

4.) In einem 3-Teilchen System könnte neben der 2-Teilchen Wechselwirkung auch eine fundamentale 3-Teilchen Wechselwirkung auftreten, also eine Kraft, die genau dann auftritt, wenn 3 Teilchen vorhanden sind, und nicht das Ergebnis einer Überlagerung von 2-Teilchen Wechselwirkungen ist. Das Experiment zeigt jedoch, dass alle bis jetzt bekannten fundamentalen Kräfte reine 2-Teilchen Kräfte sind.



### 6 3-Teilchen Kraft.

Für ein  $N$ -Teilchensystem gilt daher

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

Es folgen nun direkt die 10 klassischen Erhaltungssätze. Diese gelten auch in Theorien, die über die Klassische Mechanik hinausgehen.

1.1 **Impulserhaltung** Der *totale Impuls*  $\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i$  mit  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  ist erhalten.  $\times$

» Die Ableitung des totalen Impuls verschwindet, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i &= \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \right] \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \left[ \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \sum_{j \neq i} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{-\vec{F}_{ij}} \right] = 0. \quad \ll \end{aligned}$$

1.2 **Schwerpunktsatz** Der *Schwerpunkt*

$$\vec{r}_{\text{tot}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_i m_i,$$

bewegt sich gleichförmig,

$$\vec{r}_{\text{tot}} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}_{\text{tot}} t}{M}.$$

$\vec{r}_0$  ist eine Erhaltungsgröße.  $\times$

1.3 **Drehimpulserhaltung** Der *totale Drehimpuls*  $\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  ist erhalten.  $\times$

» Der Beweis funktioniert analog zur Impulserhaltung,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{tot}} &= \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \left[ \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \right] = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} f_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = 0. \quad \ll \end{aligned}$$

1.4 **Energieerhaltung** Die *Arbeit*, die ein Teilchen entlang der Kurve  $y$  im Kraftfeld verrichtet, hat die Form,

$$\begin{aligned} A &= \int_y d\vec{s} \vec{F}_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \vec{r}_i(t) m \ddot{\vec{r}}_i(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v}_i \dot{\vec{v}}_i m_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i^2) = T_2 - T_1, \end{aligned}$$

mit der kinetischen Energie  $T = \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 = \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$ .

Ein Kraftfeld  $\vec{F}_i$  heißt **konservativ**, wenn das Integral

$$\int_{\gamma} d\vec{s} \vec{F}_i,$$

unabhängig vom Weg ist. Für konservative Kraftfelder existiert ein **Potential**  $V(\vec{r})$ , so dass

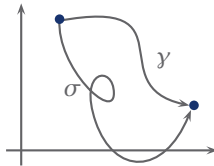
$$\vec{F} = -\nabla V.$$

Somit gilt  $A = T_1 - T_0 = \int_{\gamma} d\vec{s} \vec{F} = V_0 - V_1$ .

Konservative Kraftfelder erfüllen somit die Energieerhaltung,

$$H = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \equiv \text{const.}$$

Die Summe der kinetischen und potentiellen Energie ist für alle Punkte gleich.  $\times$



## 7 Äquivalente Wege in einem konservativen Kraftfeld.

**Bemerkungen.** 1.) Ein konservatives Kraftfeld erfüllt  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .

2.) Aus der Galilei-Invarianz haben wir gefolgert, dass die Kraft zwischen zwei Teilchen die Form

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} f_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

hat und konservativ ist, d.h.

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad V_{ij}(r) = \int dr f_{ij}(r).$$

3.) Im Vielteilchensystem gilt daher,

$$H = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

4.) Coulomb- und Gravitationspotential haben die Form,

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad \circ$$

Die 10 Erhaltungssätze folgen direkt aus den 10 Symmetrie-Transformationen der Galilei-Gruppe. Es ist ein fundamentales Konzept, Erhaltungsgrößen aus Symmetrien zu gewinnen, das wir später mittels dem Noether Theorem elegant formulieren können.

#### ■ Ausblick: Wann bricht die Klassische Mechanik zusammen?

- Bei kleinen Distanzen wie dem Abstand zwischen Elektron und Atomkern verliert die Klassische Mechanik ihre Gültigkeit und man muss auf die Quantenmechanik ausweichen.
- Bei hohen Geschwindigkeiten  $\frac{v}{c} \sim 1$  müssen wir auf die spezielle Relativitätstheorie.
- Bei Gravitation mit hohen Geschwindigkeiten oder starken Gravitationsfeldern stellt die allgemeine Relativitätstheorie den richtigen Rahmen.

Die Klassische Mechanik ist deshalb aber nicht falsch, sondern folgt aus diesen erweiterten Theorien immer als Spezialfall, wenn man zum Gültigkeitsbereich der Klassischen Mechanik übergeht.

# 2 Lagrangsche Mechanik

Im Folgenden wollen wir die Newtonschen Gleichungen mit Hilfe eines Variationsprinzips, dem so genannten "Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung" formulieren, mit dem wir die Newtonschen Gesetze elegant und mathematisch exakt in beliebige Koordiantensysteme transformieren können.

## 2.1 Euler-Lagrange Gleichungen

Betrachte ein System von  $N$  Teilchen mit den Koordinaten  $q^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  in einem konservativen Kraftfeld.

$$F^i(q^1, \dots, q^{3N}, t) = -\frac{\partial}{\partial q^i} V(q^1, \dots, q^{3N}, t).$$

*Bemerkung zur Notation.* Die Beziehung zwischen unseren bisherigen Ortsvektoren  $\vec{r}_j$  und den Koordinaten  $q^i$  ist folgende:

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} q^{3j-2} \\ q^{3j-1} \\ q^{3j} \end{pmatrix}, \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} q^4 \\ q^5 \\ q^6 \end{pmatrix}, \dots$$
$$\vec{F}_j = \begin{pmatrix} F^{3j-2} \\ F^{3j-1} \\ F^{3j} \end{pmatrix}, \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix}, \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F^4 \\ F^5 \\ F^6 \end{pmatrix}, \dots \quad \rightarrow$$

Die Newtonschen Gleichungen haben somit die Form,

$$m_i \ddot{q}^i = -\frac{\partial}{\partial q^i} V(q^j, t) = F^i(q^j, t)$$

mit der Kurzschreibweise  $V(q^1, \dots, q^{3N}, t) = V(q^i, t)$ .

Wir können den linken Teil auch als partielle Ableitung der kinetischen Energie  $T$  schreiben,

$$m_i \ddot{q}^i = \frac{d}{dt} (m_i \dot{q}^i) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (\dot{q}^i)^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} T,$$

mit  $T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}^i)^2$ .

Wir definieren die **Lagrange Funktion** durch,

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \sum_i \frac{m}{2} (\dot{q}^i)^2 - V(q^i, t),$$

oder kurz  $L = T - V$ .

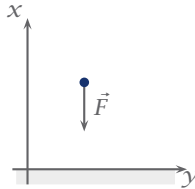
Die Bewegungsgleichungen folgen somit aus den **Euler-Lagrange Gleichungen**,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0.$$

*Bemerkung zur Notation.*

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} := \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \\ \frac{\partial L}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} := \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \end{pmatrix}. \quad \rightarrow$$

**BSP 1** Ein Teilchen befinde sich in einem Gravitationsfeld auf Höhe  $x$ . Die kinetische Energie ist gegeben durch  $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ , die potentielle Energie ist  $V = mgx$ , wodurch sich die Kraft  $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg$  ergibt.



## 8 Teilchen im Gravitationspotential.

Die Lagrange Funktion hat nun die Form,

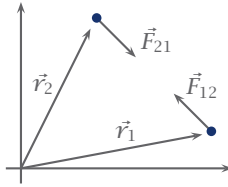
$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + mg = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -g. \quad \blacksquare$$

**BSP 2** Zwei Teilchen mit dem Wechselwirkungspotential  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ .





9 Zwei Teilchen mit Wechselwirkungspotential.

Kinetische Energie,

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{r}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{r}_2^2 \hat{=} \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}^i)^2.$$

Potentielle Energie,

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Die Lagrange-Funktion hat somit die Form,

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}^i)^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = - \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \vec{F}_{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = - \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

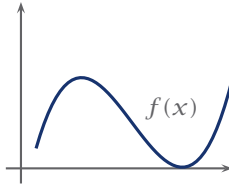
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} = m_1 \dot{\vec{r}}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} = m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_{21}.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} V'(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_{12}. \quad \blacksquare$$

## 2.2 Variationsrechnung

Im Folgenden stellen wir den mathematischen Rahmen, der zum Verständnis des Hamilton'schen Variationsprinzips wichtig ist.



10 Funktion  $f(x)$  mit Extremstellen.

Um festzustellen, ob  $x_0$  ein Extremum<sup>3</sup> von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  ist, betrachten wir dazu  $x = x_0 + \alpha$ , wobei  $\alpha$  eine Variation von  $x_0$  darstellt. Eine hinreichende Bedingung für ein Extremum ist,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0 + \alpha) \Big|_{\alpha=0} = f'(x_0) = 0.$$

Betrachte nun eine Kurve  $y$  im  $\mathbb{R}^n$ ,

$$y : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} q^1(t) \\ \vdots \\ q^n(t) \end{pmatrix},$$

mit festen Anfangs- und Endpunkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ . Das Integral,

$$I(y) := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

beschreibt ein Funktional, das jeder Raumkurve  $y$  eine Zahl zuordnet. Wir sind an den Bedingungen interessiert, unter denen die Kurve  $y$  ein Extremum von  $I(y)$  ist. Dazu betrachten wir eine kleine Variation von  $y$ ,

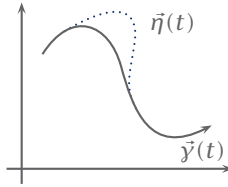
$$\begin{aligned} y'(\alpha) : t \mapsto \vec{r}(t) + \alpha \vec{\eta}(t) &\equiv \vec{r}'(t), \\ q^i(t) + \alpha \eta^i(t) &\equiv \tilde{q}^i(t). \end{aligned}$$

Fixierte Anfangs- und Endpunkte verlangen, dass  $\vec{\eta}(t_1) = \vec{\eta}(t_2) = 0$ . Dies führt uns auf eine neue Zahl,

$$I(y'(\alpha)) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t).$$

---

<sup>3</sup>Gemeint sind hier kritische Punkte von  $f$ .



11 Variation von  $\gamma$ .

**Definition** Die Kurve  $\gamma$  heißt *extremal* zu dem Funktional  $I(\gamma)$ , falls für alle Variationen  $\tilde{\eta}(t)$  gilt,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} I(\gamma'(\alpha)) \right|_{\alpha=0} = 0. \quad \times$$

Wir wollen nun untersuchen, für welche  $\gamma$ , die Wirkung maximal wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} I(\gamma'(\alpha)) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q^i + \alpha \eta^i, \dot{q}^i + \alpha \dot{\eta}^i, t) \right|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} L(q^i + \alpha \eta^i, \dot{q}^i + \alpha \dot{\eta}^i, t) \eta^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i + \alpha \eta^i, \dot{q}^i + \alpha \dot{\eta}^i, t) \dot{\eta}^i \right]_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) \eta^i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) \dot{\eta}^i \right] \\ &\stackrel{\text{part.int.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \right] L \eta^i + \underbrace{\sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L \dot{\eta}^i}_{=0 \text{ nach Vor.}} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) \right] \eta^i \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Der Ausdruck verschwindet genau dann für jede Variation  $\eta$ , wenn der Integrand bereits verschwindet.

» Angenommen das Integral verschwindet für einen Integrand, der an einem Punkt  $x \neq 0$  ist, dann folgt Aufgrund der Stetigkeit, dass der Integrand in einer Umgebung von  $x$  nicht verschwindet. Wählt man nun  $\eta$  so, dass es nur in dieser Umgebung ungleich Null ist, ist das Integral nicht null.  $\neq$  «

Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

**Satz** Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Kurve  $q^i(t)$  ein extremal zum Funktional  $I(y)$  ist, ist das Erfüllen der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) = 0. \quad \times$$

*Bemerkung.* Die Funktionalableitung hat die Form,

$$\frac{\delta I}{\delta q^i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad \rightarrow$$

## 2.3 Hamilton's Prinzip der kleinsten Wirkung

**Hamilton's Prinzip der kleinsten Wirkung** Die Bewegung eines Systems von der Zeit  $t_1$  nach  $t_2$  ist so, dass die Wirkung

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

mit dem Lagrange  $L = T - V$  extremal wird.  $\times$

» Die Variationsrechnung liefert, dass ein Extremum der Wirkung die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt und diese sind äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen. «

*Bemerkung.* Die Dimension der Wirkung ist,

$$[\text{Wirkung}] = [\text{Energie}] \cdot [\text{Zeit}] = [\text{Impuls}] \cdot [\text{Länge}].$$

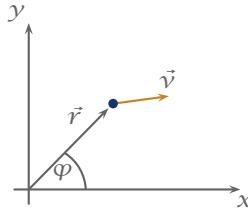
Somit entspricht die Einheit der Wirkung der von  $h$  bzw  $\hbar$ .  $\rightarrow$

Durch die Variationsrechnung haben wir die lokalen Bewegungsgleichungen durch ein globales Konzept der extremalen Wirkung ersetzt. Dadurch ergeben sich sehr markante Vorteile.

- Der Lagrange besteht aus den experimentell zugänglichen Größen  $T$  kinetische Energie und  $V$  potentielle Energie.

- Das Variationsprinzip ist invariant unter Koordinatentransformation. Man erhält sehr einfach die Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten.
- Die Größen  $q^i$  können beliebige verallgemeinerte Koordinaten sein und beliebige Einheiten annehmen.
- Symmetrien und Erhaltungsgrößen sind im Lagrange Formalismus sehr elegant zur formulieren.

**Bsp 3** Betrachte ein Teilchen in der Ebene im Zentralpotential  $V(r)$ .



## 12 Teilchen in der Ebene.

In karthesischen Koordinaten ist

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = V(\sqrt{x^2 + y^2})$$

und die verallgemeinerten Koordinaten haben die Form  $q^1 = x, q^2 = y$ .

In Polarkoordinaten ist  $q^1 = r \cos \varphi, q^2 = r \sin \varphi$ . Die kinetische Energie hat hier die Form,

$$T = \frac{m}{2} \left( (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \right)$$

$$= \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \right)$$

$$= \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right).$$

Der Lagrange ist also,

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung hat nun die Form,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + V'(r) = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} mr^2\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Wir erhalten so sofort die Drehimpulserhaltung,

$$L_z = m(\dot{x}y - x\dot{y}) = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

*Bemerkungen zu den Größen.* ■  $q^i$ : Verallgemeinerte Koordinaten.

■  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ : Verallgemeinerte Impulse.<sup>4</sup>

■  $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ : Verallgemeinerte Kräfte.

Die verallgemeinerten Größen können unter Koordinatentransformation ihre Dimension ändern, die  $q^i$  beispielsweise müssen also in beliebigen krummlinigen Koordinaten nicht mehr die Einheit einer Länge haben. ∞

**Definition** Eine Koordinate  $q^i$  heißt *zyklisch*, wenn  $L$  nicht von  $q^i$  abhängt,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad \times$$

**Satz** Für zyklische Koordinaten ist der dazugehörige kanonische Impuls eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{const.} \quad \times$$

**Bsp 4** Betrachte erneut ein Teilchen in der Ebene im Zentralpotential. Der Lagrange hat in Polarkoordinaten die Form

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Offensichtlich ist  $\varphi$  zyklisch, wir erhalten so die Drehimpulserhaltung

$$L = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad \blacksquare$$

---

<sup>4</sup>Auch generalisierter, kanonischer, kanonisch konjugierter oder konjugierter Impuls.

*Bemerkung.* Unterscheiden sich zwei Lagrange Funktionen  $L$  und  $L'$  nur durch eine totale Ableitung,

$$L' = L + \frac{d}{dt}F,$$

so führt dies auf dieselben Bewegungsgleichungen.  $\rightarrow$

» Dies ergibt sich direkt, wenn wir die Wirkung betrachten,

$$S'(y) = \int_{t_1}^{t_2} dt L' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L + \frac{d}{dt}F \right) = \left( \int_{t_1}^{t_2} dt L \right) + F \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Nun hängt  $F$  nicht von  $y$  ab und daher ist ein zu  $L$  extremales  $y$  auch extremal zu  $L'$ .  $\leftarrow$

**BSP 5** Potentiale lassen sich nicht eindeutig definieren, denn zwei Potentiale, die sich durch eine Konstante unterscheiden

$$V(q^i), \quad V'(q^i) = V(q^i) + V_0,$$

führen zu zwei Lagrange Gleichungen, die sich lediglich durch eine totale Ableitung unterscheiden,

$$L' - L = V_0 = \frac{d}{dt}(t \cdot V_0). \quad \blacksquare$$

## 2.4 Lorentz-Kraft

Aus Experimenten wissen wir, dass ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld  $\vec{E}$  und magnetischem Feld  $\vec{B}$  die Lorentz-Kraft erfährt,

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Nun lassen sich diese Felder über Potentiale definieren,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}, \end{aligned}$$

mit einem Skalarpotential  $\phi$  und einem Vektorpotential  $\vec{A}$ .  $\vec{A}$  und  $\phi$  sind nicht eindeutig und insbesondere nicht experimentell zugänglich; lediglich das vom Potential erzeugte Feld lässt sich messen.

Lagrange Funktion und Euler-Lagrange-Gleichung haben die Form,

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q \left[ \phi(\vec{r}, t) - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right],$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Der kanonische Impuls hat nun die Form,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t).$$

*Übungsaufgabe:* Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Lorentzkraft ergeben.

Da die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$  nicht eindeutig sind, lassen sich Transformationen definieren unter denen  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld invariant sind:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda(\vec{r}, t),$$

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{1}{c} \partial_t \lambda(\vec{r}, t).$$

Diese Transformationen werden **Eichtransformationen** genannt. Wendet man eine Eichtransformation an, unterscheidet sich der Lagrange wieder nur um eine totale Ableitung,

$$L' = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q \left[ \phi - \frac{1}{c} \partial_t \lambda - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} (\vec{A} + \nabla\lambda) \right] = L + \frac{q}{c} [\partial_t \lambda + \dot{\vec{r}} \nabla\lambda]$$

$$= L + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \lambda.$$

## 2.5 Noether Theorem

Wir kennen bereits eine ganz spezielle Symmetrie, die zyklischen Koordinaten, und haben gesehen, dass diese uns stets eine Erhaltungsgröße liefert. Wir wollen



nun einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen aufstellen.

Betrachte eine kontinuierliche Schar von Koordinatentransformationen,

$$h_s^i : q^i \mapsto \tilde{q}^i = h_s^i(q^j),$$

$$\dot{q}^i \mapsto \dot{\tilde{q}}^i = \sum_j \frac{\partial h_s^i}{\partial q^j} \dot{q}^j$$

$$h_0^i : q^i \mapsto q^i.$$

**BSP 6** Translationen haben so die Form,

$$q^i \mapsto \tilde{q}^i + s \cdot a^i,$$

$$\dot{q}^i \mapsto \dot{\tilde{q}}^i = \dot{q}^i. \quad \blacksquare$$

**BSP 7** Eine Rotation um die z-Achse ist gegeben durch,

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = R(s)\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}} \mapsto \dot{\vec{r}}' = R(s)\dot{\vec{r}}.$$

Für  $s = 0$  ist  $R = \mathbb{1}$ .  $\blacksquare$

Die Schar von Koordinatentransformationen ist eine **Symmetrie des Systems**, wenn sie den Lagrange nicht verändert, d.h. wenn

$$L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t), \quad \forall s,$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = 0.$$

**Noether Theorem** Für eine Symmetrie  $h_s^i$  gibt es eine Erhaltungsgröße der Form,

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dh_s^i(q^i)}{ds} \Big|_{s=0}. \quad \times$$

**BSP 8**  $L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$  und  $\varphi$  ist zyklisch.

$$\left. \begin{aligned} h_s^i : \varphi \mapsto \varphi + s, \\ \frac{dh_s}{ds} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi} = I(q^i, \dot{q}^i). \quad \blacksquare$$

» *Beweis des Noether Theorems.* Sei  $q^i(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichung, dann ist  $\tilde{q}^i(t) = h_s^i(q^i(t))$  ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^i} \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{ds} \dot{\tilde{q}}^i \right] \\ &= \sum_i \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \right) \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{ds} \tilde{q}^i \right) \right] \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{ds} \tilde{q}^i \right]. \end{aligned}$$

Also ist  $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{ds} \tilde{q}^i$  eine Erhaltungsgröße für alle  $s$ , also auch für  $s = 0$  und damit gilt,

$$\left. \frac{d}{dt} \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{ds} \tilde{q}^i \right] \right|_{s=0} = 0. \quad \ll$$

**Bsp 9** *Translationssymmetrie in einem System von  $N$  Teilchen.*

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &\mapsto \vec{r}_i + s\vec{a}, \\ \dot{\vec{r}}_i &\mapsto \dot{\vec{r}}_i, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{a}$  ein beliebiger aber von  $i$  unabhängiger Translationsvektor ist, d.h. das ganze Teilchensystem wird um  $s\vec{a}$  verschoben.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} h_s^i &= \frac{d}{ds} (\vec{r}_i + s\vec{a}) = \vec{a}. \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} &= \vec{p}_i. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Erhaltungsgröße,

$$I(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i (\vec{p}_i \cdot \vec{a}) = \left( \sum_i \vec{p}_i \right) \cdot \vec{a} = \vec{p}_{\text{tot}} \cdot \vec{a}.$$

Liegt eine Translationssymmetrie entlang allen Koordinatenachsen vor, so gilt

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Im Schwerfeld mit Gravitation in  $z$ -Richtung und Translationssymmetrie in  $x$ - und  $y$ -Richtung wären nur  $\vec{p}_x$  und  $\vec{p}_y$  erhalten. ■

**BSP 10** *Rotationssymmetrie.* Für kleine Winkel können wir die Rotation um die Achse  $\vec{n}$  schreiben als,

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &\mapsto \vec{r}_i + s\vec{n} \times \vec{r}_i, \\ \dot{\vec{r}}_i &\mapsto \dot{\vec{r}}_i + s\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} h_s^i &= \frac{d}{ds} (\vec{r}_i + s\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \times \vec{r}_i, \\ I(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) &= \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{n} \times \vec{r}_i = \sum_i \vec{n} \cdot \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i = \vec{n} \cdot \vec{L}_{\text{tot}}.\end{aligned}$$

Bei Rotationssymmetrie entlang aller Koordinatenachsen ist der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{\text{tot}}$  erhalten.

*Übungsaufgabe:* Welcher Teil des Drehimpulses ist nicht erhalten, wenn die Rotationssymmetrie nur um die z-Achse gegeben ist?

**BSP 11** *Galilei Boost.*

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &\mapsto \vec{r}_i + s\vec{v}t \\ \dot{\vec{r}}_i &\mapsto \dot{\vec{r}}_i + s\vec{v}\end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ist nicht invariant unter dieser Operation, sondern ändert sich um eine totale Ableitung,

$$L \mapsto L' = L + \sum_i \left[ \frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 + m_i \dot{\vec{r}}_i \vec{v} s \right] = L + \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 t + m_i s \vec{r}_i \vec{v}}_{F(q^i, \dot{q}^i)} \right).$$

Jedoch gilt  $\frac{d}{ds} L = 0$  und damit auch

$$0 = \frac{d}{ds} \left[ L' - \frac{d}{dt} F \right] = \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dh_s^i}{ds} - \frac{d}{ds} F \right].$$

Die Erhaltungsgröße hat somit die Form

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{dh_s^i(q^i)}{ds} - \frac{d}{ds} F(q^i, \dot{q}^i) \Big|_{s=0}.$$

Damit folgt der Schwerpunktssatz

$$\sum_i \vec{p}_i \vec{v} t - \sum_i m_i \vec{r}_i \vec{v} = \underbrace{\left( \sum_i \vec{p}_i t - \sum_i m \vec{r}_i \right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \vec{v} = \text{const.} \quad \blacksquare$$

## 2.6 Energieerhaltung

Unser System ist homogen in der Zeit, d.h. kein Zeitpunkt ist ausgezeichnet. Betrachten wir also eine Translation der Zeit

$$t \mapsto t' = t + a,$$

so bleibt die Lagrangefunktion unverändert und ist daher nicht explizit von der Zeit abhängig,

$$L = L' \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Sie ist natürlich implizit von der Zeit abhängig, da  $q^i$  und  $\dot{q}^i$  in  $L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$  von der Zeit abhängen. Die totale Ableitung  $\frac{d}{dt} L$  muss daher auch nicht verschwinden, sondern es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(q^i, \dot{q}^i) &= \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{d}{dt} q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \dot{q}^i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{d}{dt} q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \dot{q}^i \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right]}_{:=H} = 0. \end{aligned}$$

Die Energie,

$$H = \sum_i \vec{p}_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i), \quad \vec{p}_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

ist eine Erhaltungsgröße, die aus der Translationsinvarianz der Zeit folgt.

*Bemerkung.* Für geschwindigkeitsunabhängige Kräfte im Potential  $V$  gilt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}, \\ H &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - (T - V) = T + V. \quad \circ \end{aligned}$$

Wir haben somit für jede der 10 Symmetrien der Galilei-Gruppe eine Erhaltungsgröße gefunden.

# 3 Zweikörper Zentralkraft Problem

Als Anwendung des Lagrange Formalismus untersuchen wir zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  in einem rotationssymmetrischen Wechselwirkungspotential  $V$ .

Das Zweikörperproblem ist exakt lösbar und von besonderem Interesse, da es die Bewegung der Erde um die Sonne mit hinreichender Genauigkeit beschreibt. Später werden wir so auch die **Keplerschen Gesetze** herleiten, zunächst wollen wir uns jedoch allgemein mit dem Problem befassen.

Zur Lösung des Zweikörperproblems werden wir die entwickelten Erhaltungsgrößen verwenden, durch die die exakte Lösung sehr einfach zu bestimmen ist. Die Lagrangefunktion hat hier die Form,

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Da unsere Vektoren 3-dimensional sind, erhalten wir einen 6-dimensionalen Konfigurationsraum, d.h. ein System von 6 gekoppelte Differentialgleichungen. Mit Hilfe der Symmetrien können wir jedoch die Freiheitsgrade so reduzieren, dass das Problem exakt lösbar wird.

## 3.1 Reduktion auf 1-Teilchen Problem

Dank der Impulserhaltung und dem Schwerpunktsatz wissen wir, dass der Schwerpunkt einer trivialen Bewegung folgt. Dies können wir durch das Einführen von Schwerpunkts-  $\vec{R}$  und Relativkoordinaten  $\vec{r}$  ausnutzen,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Die bisherigen Koordinaten haben dann die Form,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}.\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir für die kinetische Energie den Ausdruck,

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_1}{2} \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \mu \dot{\vec{r}}^2 \right],\end{aligned}$$

wobei wir  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  als **reduzierte Masse** einführen. Die Lagrangefunktion vereinfacht sich somit zu,

$$L(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \mu \dot{\vec{r}}^2 \right] - V(|\vec{r}|).$$

Offensichtlich ist  $\vec{R}$  eine zyklische Koordinate und es gilt,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} = \text{const} = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Daraus ergibt sich sofort der Schwerpunktssatz,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}t.$$

Es genügt daher nur noch die Relativkoordinate zu betrachten. Wir erhalten ein effektives Einteilchenproblem mit Koordinate  $\vec{r}$  und effektiver Masse  $\mu$ . Das Problem hat sich um 3 Freiheitsgrade reduziert.

Im Folgenden betrachten wir somit den Lagrange

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|).$$

*Bemerkungen.* Betrachten wir den Grenzelfall  $m_2 \gg m_1$ , dann gilt

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1,$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \approx \vec{r}_2.$$

Dies entspricht dem System Erde-Sonne, bei dem der Schwerpunkt in der Sonne liegt und die Erde um die Sonne kreist.

Ist hingegen  $m_1 = m_2 = m$ , so gilt

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m,$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2).$$

Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Massen und die Massen kreisen darum.  $\rightarrow$

### 3.2 Integration der Bewegungsgleichung

Wir wollen die Bewegungsgleichung nun exakt lösen. Dazu müssen wir das Potential  $V$ , das als rotationssymmetrisch vorausgesetzt ist, etwas genauer studieren. Betrachten eine Rotation im Raum,

$$\vec{r} \mapsto \vec{M}\vec{r}, \quad \vec{M} \in \text{SO}(3),$$

$$|\vec{r}| = |\vec{M}\vec{r}| = \sqrt{\langle \vec{M}\vec{r}, \vec{M}\vec{r} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{M}\vec{M}\vec{r}, \vec{r} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle} = |\vec{r}|.$$

Die Länge des Vektors  $\vec{r}$  ist also invariant unter Rotation. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Potentials ist der Drehimpuls

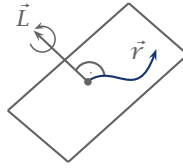
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

eine Erhaltungsgröße mit  $|\vec{L}| \equiv l = \text{const.}$  Es gilt daher

$$\langle \vec{r}, \vec{L} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{r} \times \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{r} \times \vec{r} \rangle = 0.$$

Aufgrund der Konstanz von  $\vec{L}$  steht somit  $\vec{r}$  stets senkrecht auf  $\vec{L}$  und daher verläuft die Kurve  $t \mapsto \vec{r}(t)$  in einer Ebene.





### 13 Wahl der Bewegungsebene.

*Bemerkung.* Falls  $l = 0$  bricht die obige Argumentation zusammen. In diesem Fall ist die Bewegung jedoch geradlinig und findet daher ebenfalls in einer Ebene statt.  $\rightarrow$

Nun kann diese Ebene beliebig im Raum liegen, wir können aber ein Koordinatensystem so wählen, dass die  $z$ -Achse entlang der Drehimpulsachse verläuft. Die Bewegung findet dann in der  $x, y$ -Ebene statt. Es bietet sich nun die Wahl von Polarkoordinaten an, wodurch der Lagrange die Form annimmt,

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Die Koordinate  $\varphi$  ist zyklisch und die Erhaltungsgröße

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \equiv l.$$

Die Drehimpulserhaltung eliminiert somit 2 Freiheitsgrade. Die Richtung des Drehimpulses schränkt die Bewegung auf eine Ebene ein  $(r, \varphi)$ , während der Betrag des Drehimpulses  $\varphi$  eliminiert. Es bleibt ein eindimensionales Problem zu lösen.

*Bemerkung.* Das 2. Keplersche Gesetz ist äquivalent zur Drehimpulserhaltung,

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} r r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \quad \rightarrow \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für die Koordinate  $r$  reduziert sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \\ \Leftrightarrow \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\varphi}^2 - V'(r). \end{aligned}$$

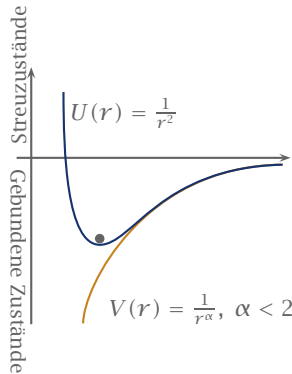
Mit  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$  können wir die  $\varphi$  Abhängigkeit eliminieren und erhalten somit,

$$\mu \ddot{r} = \mu r \frac{l^2}{\mu^2 r^4} - V'(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - V'(r) = -\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{l^2}{r^2} + V(r) \right] = -U'(r),$$

wobei wir  $U(r) = \frac{1}{2\mu} \frac{l^2}{r^2} + V(r)$  als **effektives Potential** bezeichnen.

Die Gleichung verhält sich nun, wie ein eindimensionales Teilchen im Potential  $U(r)$  mit der Energie,

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{l^2}{r^2} + V(r)}_{=U(r)}.$$



#### 14 Teilchenpotential und effektives Potential mit Gleichgewichtslage.

Eine formale Lösung erhalten wir aus der Energieerhaltung,

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} (E - U(r)),$$

wobei wir lediglich den auslaufenden Teil ( $\dot{r} > 0$ ) betrachten.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} \sqrt{E - U(r)}}, \\ \Rightarrow \int dt \frac{\dot{r}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}} &= \int dr \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}} = \int dt = t - t_0. \end{aligned}$$

Die formale Lösung ist somit,

$$t - t_0 = \underbrace{\int_{r_0}^r dr \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}}_{:=F(r)}$$

$$\Rightarrow r(t) = F^{-1}(t - t_0).$$

Das Integral lässt sich jedoch nur in wenigen Fällen analytisch lösen. Wir sind meist aber nicht an der Bewegungsgleichung selbst, sondern nur an der Form der Bahnkurve interessiert und erhalten für die Bahntrajektorien  $\varphi(r), r(\varphi)$ ,

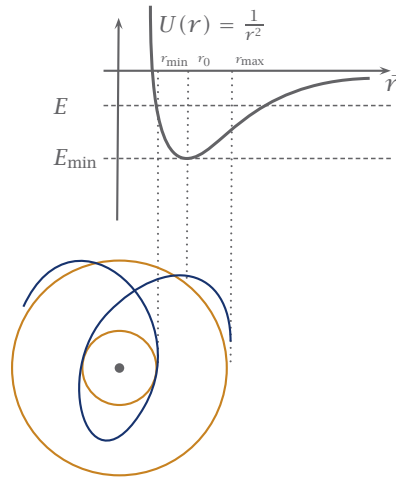
$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int dr \frac{l}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}.$$

Qualitativ lässt sich durch die Analyse des effektiven Potentials bereits viel über die Bahn aussagen.

- $V(r)$  dominiert über  $\frac{1}{r^2}$  für  $r \rightarrow \infty$ ,
- $\frac{1}{r^2}$  dominiert über  $V(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .

Für  $E = E_{\min}$  erhalten wir eine Kreisbahn, während sich für  $E < 0$  i.A. Rosettenbahnen mit Preiheldrehung ergeben.



15 Potential und Trajektorie.

Für die Oszillation erhält man im Allgemeinen keine rationalen Winkel  $\varphi = \frac{2\pi n}{m}$ , d.h. im Allgemeinen sind die Trajektorien nicht geschlossen. Man kann analytisch beweisen, dass es genau zwei Potentiale gibt für die die Trajektorien geschlossen sind, nämlich  $V(r) = r^2$  und  $V(r) = \frac{1}{r}$ .

### 3.3 Gravitationspotential

Das Potential hat die Form

$$V(r) = -\frac{k}{r},$$

wobei  $k = Gm_1m_2$  im Fall der Gravitation oder  $k = q_1q_2$  im Fall der elektrostatischen Wechselwirkung. Das effektive Potential hat die Form

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},$$

und für die Bahntrajektorie gilt

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}}}.$$

Substituieren wir  $x = \frac{1}{r}$ , dann gilt für die Differentiale  $dx = -\frac{1}{r^2} dr$ ,

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int dx \frac{1}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2\mu}x^2 + kx}} = - \int dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2E\mu}{l^2} - x^2 + \frac{2\mu k}{l^2}x}}$$

Ergänzen wir quadratisch mit  $-(x - \frac{\mu k}{l^2})^2 = -x^2 + \frac{2\mu k}{l^2}x - \frac{\mu^2 k^2}{l^4}$ , erhalten wir

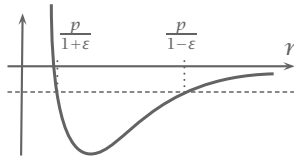
$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= - \int dx \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{2E\mu}{l^2} + \frac{\mu^2 k^2}{l^4}}_{=a^2} + \left(x - \underbrace{\frac{\mu k}{l^2}}_{=b}\right)^2}} \\ &= - \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - (x - b)^2}} = - \int dx \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)^2}} \\ &= - \int dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \arccos(y) = \arccos\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{x}{b} - 1}{\frac{a}{b}}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{\frac{x}{\mu k}}{\frac{l^2}{l^2}} - 1}{\frac{\sqrt{\frac{2E\mu}{l^2} + \frac{\mu^2 k^2}{l^4}}}{\frac{\mu k}{l^2}}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{\frac{x}{\mu k}}{\frac{l^2}{l^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{l^2 x}{\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}\right). \end{aligned}$$

Die Bahntrajektorie ist somit gegeben durch,

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \\ p &= \frac{l^2}{\mu k}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}, \end{aligned}$$

was einem Kegelschnitt entspricht.

Der Radialteil der Trajektorie oszilliert zwischen  $\frac{p}{1+\varepsilon}$  und  $\frac{p}{1-\varepsilon}$ . Wir wollen nun untersuchen wie eine Änderung von  $E$  auf  $\varepsilon$  wirkt.



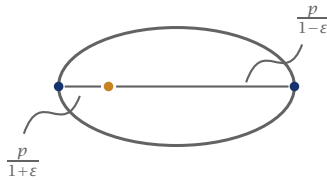
16 Trajektorie des Teilchens im effektiven Potential.

$E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$  Hyperbel

$E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$  Parabel

$E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$  Ellipse

$E = E_{\min} \Rightarrow \varepsilon = 0$  Kreisbahn



17 Ellipsenbahn der Erde.

### ■ Repitition: Kegelschnitte

Der Kegel kann durch

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

parametrisiert werden, die Ebene durch

$$z = z_0 - \lambda x.$$

Die Schnittkurve der beiden Flächen ist gegeben durch,

$$\begin{aligned} z_0 - \lambda x &= \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ \Leftrightarrow z_0 - \lambda r \cos \varphi &= r \\ \Leftrightarrow \frac{z_0}{r} &= 1 - \lambda \cos \varphi. \end{aligned}$$

und dies ist genau die Form der Trajektorie, die wir bereits berechnet haben.

Man kann die Schnittkurve auch als **quadratische Form** auffassen, wodurch wir die Ellipsengleichung erhalten,

$$r^2 = (x^2 + y^2) = (p - \varepsilon x)^2 \Rightarrow \frac{(x + x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die **große Halbachse** ist hierbei durch

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2},$$

die **kleine Halbachse** durch

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

und der **Brennpunkt** durch

$$x_0 = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2},$$

gegeben.

## ■ Keplerschen Gesetze

Wir sind nun in der Lage mithilfe unserer Lösung des Zweikörper Zentralkraftproblems die drei Keplerschen Gesetze zu beweisen.

**1. Keplersches Gesetz** *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.* ✕

Dieses Gesetz gilt, wenn die Masse der Planeten klein im Vergleich zur Masse der Sonne ist. Kepler hatte in diesem Fall Glück, da unser Sonnensystem gerade so beschaffen ist.

» Ist die Masse des Planeten klein im Vergleich zur Sonne, dann liegt der Brennpunkt näherungsweise in der Sonne. «

**2. Keplersche Gesetz** *Eine von der Sonne zu einem Planeten gezogene Strecke überstreicht in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen.* ✕

» Wir haben bereits gezeigt, dass dieses Gesetz äquivalent zur Drehimpulserhaltung ist. «

**3. Keplersche Gesetz** *Betrachtet man die Bahn eines Planetens mit großer Halbachse  $a$  und der Umlaufzeit  $T$ , dann ist  $\frac{T^2}{a^3}$  unabhängig vom Planeten.* ✕

Auch dieses Gesetz gilt nur für Planeten mit einer im Vergleich zur Sonne kleinen Masse.

» Wir verwenden  $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$ . Die Fläche einer Ellipse ist

$$A = \frac{dA}{dt} T = \pi a b = T \frac{l}{2\mu}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\mu}{l} \pi a \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{2\mu}{l} \pi a \frac{\frac{l^2}{\mu k}}{\sqrt{1-1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}} = 2\pi a \sqrt{\frac{\mu}{2E}}.$$

Mit  $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{\frac{2El^2}{\mu k^2}} = \frac{k}{2E}$  erhalten wir  $\frac{1}{2E} = \frac{a}{k}$ , wobei

$$k = GM_S m_e, \quad \mu = \frac{M_S m_e}{M_S + m_e} \approx m_e.$$

Einsetzen ergibt nun,

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{GM_S}},$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} a^3,$$

und der Vorfaktor ist für das Sonnensystem konstant. «

Interessant ist, dass für  $E \leq 0$  die Bahnkurven im Zentralpotential stets geschlossen sind. Verantwortlich dafür ist eine weitere Erhaltungsgröße, der **Laplace-Runge-Lenz Vektor**.



### ■ Laplace-Runge-Lenz Vektor

Das Coulomb Potential  $V(|\vec{r}|) = -\frac{k}{|\vec{r}|}$  zeichnet sich durch eine weitere Erhaltungsgröße aus, den Laplace-Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

» Die Erhaltung des Vektors sieht man wie folgt ein,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{A} &= \dot{\vec{p}} \times \vec{L} - \mu k \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \frac{d}{dt} |\vec{r}| \right) \\ &= -\frac{\mu k}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\mu k}{|\vec{r}|^3} (|\vec{r}|^2 \dot{\vec{r}} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})) = 0. \quad \ll \end{aligned}$$

Dieser Vektor steht senkrecht zum Drehimpuls  $L$

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0.$$

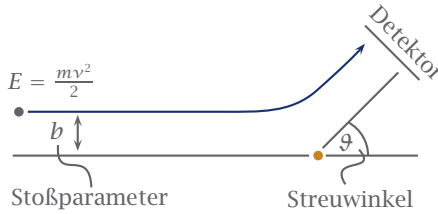
Zudem zeigt er in Richtung des Perihelion. Konsequenz seiner Erhaltung ist, dass das Perihelion sich nicht dreht.

## 3.4 Streuexperimente

Streuexperimente sind die Schlüsselversuche der Kern- und Elementarteilchenphysik. Hierbei werden leichte Teilchen auf schwere ruhende Teilchen geschossen und dadurch abgelenkt. Die Ablenkung kann Aufschluss über die Struktur der Materie geben.

Rutherford untersuchte 1909, wie  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie gestreut werden und entdeckte dabei, dass der Kerndurchmesser um ca. 5 Größenordnungen kleiner sein muss als der Atomdurchmesser. Viele sehen dies als die Geburtsstunde der Kernphysik.

Im Folgenden untersuchen wir die Streuung von 2 Teilchen mit Zentralkraft. Wir arbeiten wieder im Schwerpunktsystem mit der Relativkoordinate  $\vec{r}$  als Variable. Dabei vernachlässigen wir, dass das schwere Teilchen durch die Streuung kinetische Energie erhält, für sehr schwere Teilchen ist dies eine gute Näherung.



## 18 Streuexperiment.

*Bemerkung.* Wir betrachten hier nur elastische Stöße, d.h. die Energie ist erhalten.  $\rightarrow$

**Definition** Der *Stoßparameter*  $b$  ist der Abstand zwischen Einfallssachse und Streuzentrum,  $\vartheta$  der *Streuwinkel*.  $\times$

Betrachte einen einfallenden Teilchenstrahl mit Fluss  $F \hat{=} \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{cm^2 s}$ . Messe die Zahl der gestreuten Teilchen  $dN$  im Raumwinkel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Wir können keine diskreten Winkel messen, da der Detektor eine endliche Ausdehnung und Auflösung hat. Es wird daher stets ein Winkelbereich gemessen, wobei wir daran interessiert sind, diesen möglichst klein zu halten, um genaue Ergebnisse zu erhalten.

Dies führt zur Definition des *differentiellen Wirkungsquerschnitts*,

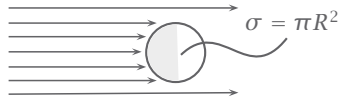
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega}.$$

Der totale Streuquerschnitt ist dann gegeben durch,

$$\sigma = \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) := \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega},$$

$[\sigma] = \text{Fläche}$ ,  $F\sigma = \text{Anzahl der gestreuten Teilchen}$

**BSP 1** Im Fall einer Kugel, die von Teilchen umströmt wird, ist  $\sigma = \pi R^2$ . ■



19 Umströmte Kugel.

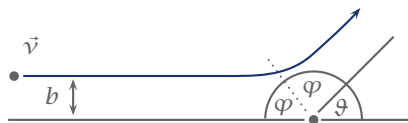
Für rotationssymmetrische Potentiale hängt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  nur vom Winkel  $\vartheta$  und der Energie der einfallenden Teilchen ab. Für jedes Tupel aus kinetischer Energie  $E_{\text{kin}}$  und Stoßparameter  $b$  können wir die Trajektorie berechnen und den Wert  $\vartheta$  bestimmen. Wir haben damit das inverse Problem  $\vartheta(E, b)$  gelöst, welches uns auf  $b(E, \vartheta)$  führt.

Aus der Energieerhaltung folgt, dass der Betrag der Geschwindigkeit für einfallendes und ausfallendes Teilchen gleich ist,

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Der Drehimpuls  $l = mbv$  ist ebenfalls erhalten, das ausfallende Teilchen hat somit auch den Stoßparameter  $b$ . Haben wir nun eine Lösung  $\vartheta(E, b)$ , so können wir eine kleine Winkeländerung  $d\vartheta$  durch eine kleine Änderung des Stoßparameters  $db$  ausdrücken

$$d\vartheta = \left| \frac{d\vartheta}{db} \right| db.$$



20 Streuexperiment.

Für die gestreuten Teilchen gilt  $dN = b db d\varphi F$ , also erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{b db d\varphi F}{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{b db}{\sin \vartheta \left| \frac{d\vartheta}{db} \right| db} \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta} b \left| \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta, E) \right|. \end{aligned} \quad (*)$$

## ■ Rutherfordstreuung

Wir betrachten das Potential  $\frac{1}{r}$  im repulsiven Fall

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \quad k = -ee',$$

wobei  $e, e'$  die Ladung von Streuteilchen und Target sind.

Verwenden wir nun unsere Lösung

$$\frac{1}{r} = \frac{mee'}{l^2} (\varepsilon \cos \varphi - 1),$$

so erhalten wir für  $r \rightarrow \infty$ ,

$$0 = \varepsilon \cos \varphi - 1 \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \stackrel{\pi=2\varphi+\vartheta}{\Rightarrow} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}}{\frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Mit  $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{ee'}\right)^2}$  ergibt sich somit,

$$b(\vartheta, E) = \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \frac{ee'}{2|E|}.$$

Setzen wir dies in (\*) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) ee'}{\sin \vartheta} \frac{1}{2|E|} \left| \frac{d}{d\vartheta} \left( \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \frac{ee'}{2|E|} \right) \right| \\ &= \left| \frac{ee'}{2|E|} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \frac{ee'}{2|E|} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \frac{1}{\sin \vartheta} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{ee'}{2E}\right)^2 \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right|^4}. \end{aligned}$$

Dies ist die berühmte Rutherfordsche-Streufelme mit der  $\frac{1}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4}$ -Abhängigkeit.

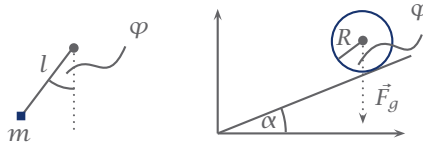
# 4 Systeme mit Zwangsbedingungen

In praktischen Anwendungen treten in vielen Fällen Nebenbedingungen auf, die den Konfigurationsraum des Problems einschränken. Die Idee ist nun, die Lagrangefunktion so zu transformieren, dass sie sich unter diesen Nebenbedingungen vereinfacht.

**BSP 1** Ein Pendel bestehe aus einer festen Stange der Länge  $l$ , an der eine Masse  $m$  angebracht ist. Die feste Länge  $l$  der Stange ergibt hier die Zwangsbedingung.



**BSP 2** Ein Zylinder, der sich in der schiefen Ebene befindetet, erfährt die Zwangsbedingungen dadurch, dass die Bewegung nur auf der Ebene stattfindet und durch die Rollbedingung  $ds = R d\varphi$ .



21 Pendel und Zylinder auf schiefer Ebene.

## ■ Holonome Zwangsbedingungen

Es gibt verschiedene Arten von Zwangsbedingungen. Die einfachste und häufigste Art sind die **holonomen Zwangsbedingungen**. Hier lässt sich die Zwangsbedingung durch einen Satz Gleichungen, die die Koordinaten  $q^i$  verknüpfen, darstellen.

$$f_j(q^1, \dots, q^{3N}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Bei  $k$  Nebenbedingungen ist die Zahl der Freiheitsgrade auf  $3N - k$  reduziert.

**BSP 3** Im Fall unseres Pendels ist

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

In Polarkoordinaten ist dadurch  $r = l$  konstant. ■

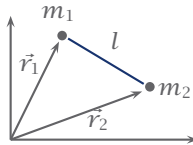
**BSP 4** Ein Teilchen gleitet reibungsfrei auf einer Oberfläche,

$$f(\vec{r}) = 0,$$

wobei  $f$  die Oberfläche beschreibt. ■

**BSP 5** Zwei Teilchen, die durch einen starren Stab verbunden sind.

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0.$$



## 22 Starr verbundene Teilchen.

Eine Anwendung davon finden wir, wenn wir  $O_2$ -Moleküle bei tiefen Temperaturen betrachten. Falls  $k_B T \ll E_{\text{vibration}}$ , bleiben dem Molekül nur noch die Translationsfreiheitsgrade. ■

*Bemerkung.* Holonome Zwangsbedingungen definieren eine Hyperfläche im Konfigurationsraum mit der Dimension  $f = 3N - k$ .

Im Fall des Pendels wäre die Hyperfläche ein Kreis mit Radius  $l$ , die verallgemeinerte Koordinate auf der Hyperfläche der Winkel  $\varphi$ . ∞

## ■ Nichtholome Zwangsbedingungen

Holonyme Zwangsbedingungen sind sehr gutartig, da sie Probleme durch die Reduktion von Freiheitsgraden vereinfachen. Es gibt jedoch auch **nichtholome Zwangsbedingungen**, das sind Zwangsbedingungen, die sich nicht auf die Form,

$$f_i(\vec{r}, t) = 0,$$

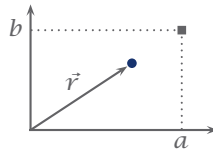
bringen lassen. In vielen Fällen verkomplizieren sie das Problem zusätzlich. Es kann passieren, dass ein analytisch lösbares System durch nichtholome Zwangsbedingungen nicht mehr analytisch lösbar wird.

**BSP 6** Das Teilchen in der Box hat die Zwangsbedingungen,

$$0 \leq x \leq a,$$

$$0 \leq y \leq b.$$

Die Nebenbedingungen liegen hier in Form einer Ungleichung vor; sie reduzieren die Anzahl an Freiheitsgraden nicht. ■



23 Teilchen in der Box.

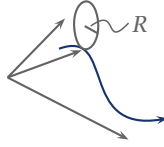
**BSP 7** Rollen eines Rades in der Ebene, mit dem Berührungspunkt  $(x, y)$ , dem Winkel  $\vartheta$  zur Orientierung der Achse zur  $x$ -Richtung und dem Rollwinkel  $\varphi$ .

Die Rollbedingung ist hier  $|\vec{v}| = R\dot{\varphi}$ , was auf

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \cos \vartheta,$$

$$\dot{y} = R\dot{\varphi} \sin \vartheta,$$

führt. Man kann diese Nebenbedingungen nicht auf holonome Form bringen, da  $\vartheta$  und  $\varphi$  vom Weg abhängen. ■



## 24 Rollen eines Raeds in der Ebene.

Abgesehen von holonom und nicht-holonom gibt es noch weitere Möglichkeiten, Zwangsbedingungen zu charakterisieren. **Skleronome** (“starre”) Zwangsbedingungen,

$$f_j(q^1, \dots, q^{3N}) = 0,$$

hängen nicht explizit von der Zeit ab. **Rheonome** (“fließende”) Zwangsbedingungen,

$$f_j(q^1, \dots, q^{3N}, t) = 0,$$

hängen hingegen explizit von der Zeit ab.

**Bsp 8** Eine Schiefe Ebene mit zeitabhängigem Neigungswinkel. ■

## 4.1 Dynamik eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen

Im Folgenden wollen wir das Vorgehen zum Lösen von Problemen mit Zwangsbedingungen erarbeiten. Auf Beweise soll dabei zunächst verzichtet werden; die Korrektheit der Methode werden wir zum Schluss elegant mit dem d’Albertschen Prinzip zeigen.

- 1.) Bestimme den Konfigurationsraum des Systems und führe verallgemeinerte Koordinaten ein, welche die Zwangsbedingungen erfüllen,

$$q^i, \quad i = 1, \dots, f.$$

Die natürlichen Koordinaten lassen sich dann mit Hilfe der verallgemeinerten ausdrücken,

$$\vec{r}(q^1, \dots, q^f).$$



2.) Drücke die kinetische Energie in diesen verallgemeinerten Koordinaten aus,

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^f A_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Verfahre analog mit dem Potential,

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \rightarrow V(q^1, \dots, q^f).$$

3.) Wir erhalten so die Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten,

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V.$$

Die Bewegungsgleichungen folgen anschließend aus den Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, f.$$

**BSP 9** Wir wollen nun das Problem unseres Pendels unter Zwangsbedingungen lösen. Sei  $m$  die Masse und  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  die Koordinate, sowie

$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$z = 0$$

die Zwangsbedingung.

1.) Durch die Einführung von Polarkoordinaten wird die Zwangsbedingung zu  $r = l$ . Wir erhalten damit

$$x = l \sin \varphi,$$

$$y = -l \cos \varphi,$$

$$z = 0$$

wobei  $\varphi$  die verallgemeinerte Koordinate des Problems ist.

2.) Um die kinetische Energie zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen,

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Die kinetische Energie hat somit die Form,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Das Potential ist gegeben durch,

$$V = mgy = -mgl \cos \varphi.$$

3.) Die Lagrangefunktion hat damit in verallgemeinerten Koordinaten die Gestalt,

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Die Bewegungsgleichungen erhalten wir somit durch

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Für  $\dot{\varphi} = 0$  und  $\varphi = 0, \pi, 2\pi$  erhalten wir stationäre Lösungen. Für  $\dot{\varphi}$  klein ergibt sich in  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  eine harmonische Schwingung, während das Gleichgewicht in  $\pi, 3\pi, \dots$  instabil ist. ■

*Bemerkung.* In einem System mit holonomen Zwangsbedingungen müssen zusätzliche Kräfte wirken, die die Teilchen auf die Hyperfläche zwingen. Die Newtonschen Gleichungen haben die Form,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_i V + \vec{Z}_i,$$

wobei  $\vec{Z}_i$  die zusätzliche Kraft beschreibt. →

**Definition** Die Größen,

$$\vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i + \nabla_i V, \quad i = 1, \dots, N$$

heißen *Zwangskräfte*. Diese Kräfte sind apriori unbekannt, können aber aus der Lösung des Problems berechnet werden. ✕

**Bsp 10** Durchquert das Pendel die Ruhelage, so ist

$$\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{Z} = -\vec{F}_g. \quad \blacksquare$$

**Definition** Eine *virtuelle Verrückung*  $\delta\vec{r}_i$  oder  $\delta q^i$  ist eine infinitesimale Änderung der Lagekoordinaten, welche mit den Zwangsbedingungen verträglich ist.

✕

### ■ Prinzip von d'Alembert

**Prinzip von d'Alembert** In einem System mit Zwangsbedingungen erfüllt die Bewegungsgleichung,

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta\vec{r}_i = 0,$$

für alle virtuellen Verrückungen  $\delta\vec{r}_i$ . ✕

Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass Zwangskräfte unter einer virtuellen Verrückung keine Arbeit leisten,

$$\delta A = \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta\vec{r}_i = 0.$$

In einigen Lehrbüchern wird das Prinzip von d'Alembert als Axiom festgelegt, für alle Standardprobleme der klassischen Mechanik leisten die Zwangskräfte jedoch keine Arbeit.

*Bemerkung.* Im statischen Fall reduziert sich das Prinzip von d'Almebert auf eine Bedingung für die Gleichgewichtslage,

$$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad \rightarrow$$

**Bsp 11** Betrachten wir einen Flaschenzug. Es gilt  $\delta h_1 = -2\delta h_2$  und

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \delta\vec{h}_1 + \vec{F}_2 \delta\vec{h}_2 &= 0 \\ \Rightarrow m_1 g \delta h_1 - m_2 g \frac{\delta h_1}{2} &= 0 \Leftrightarrow \delta h_1 g \left( m_1 - \frac{m_2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für ein Gleichgewicht muss gelten

$$\frac{m_2}{m_1} = 2. \quad \blacksquare$$

Wir wollen nun zeigen, dass aus dem Prinzip von d'Alembert das Hamiltonsche Variationsprinzip folgt und somit unser Lösungsschema für holonome Zwangsbedingungen äquivalent zum Prinzip von d'Alembert ist.

» *Beweis der Äquivalenz.* Wir führen dazu geeignete Koordinaten ein, die die holonomen Zwangsbedingungen erfüllen,

$$\vec{r}_i(q^1, \dots, q^f, t).$$

Eine virtuelle Verrückung hat somit die Form,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j.$$

Betrachten wir nun das Prinzip von d'Alembert

$$0 = \sum_i \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \delta \vec{r}_i,$$

so erhalten wir für die Summanden:

■

$$\sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j = \sum_j \underbrace{\left( \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \right)}_{:= \vec{Q}_j} \delta q^j.$$

Wobei wir  $\vec{Q}_j$  als verallgemeinerte Kraft bezeichnen. Es gilt

$$\vec{Q}_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = - \sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = - \frac{d}{dq^j} V(q^1, \dots, q^f).$$

■

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i &= \sum_i \sum_j m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j = \sum_j \left( \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \right) \delta q^j \\ &= \sum_j \delta q^j \left[ \sum_i \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \right] \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left[ \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \right] = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}$$

und daher gilt,

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_j \delta q^j \left[ \sum_i \frac{d}{dt} \underbrace{\left( m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}^j} \right)}_{=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}} - \underbrace{m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q^j}}_{\frac{\partial T}{\partial q^j}} \right]$$

Zusammengefasst gilt also,

$$0 = \sum_j \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} + \frac{\partial V}{\partial q^j} \right] \delta q^j,$$

und da das Potential nicht geschwindigkeitsabhängig ist, erhalten wir

$$0 = \sum_j \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right] \delta q^j,$$

für alle Variationen  $\delta q^j$ . Da die Variationen unabhängig sind, ist somit der Ausdruck in der Klammer Null und wir erhalten die Euler-Lagrange-Gleichungen. «

Das Prinzip von d'Alembert ist also äquivalent zum Hamiltonischen Prinzip angewandt auf die Lagrange Funktion mit verallgemeinerten Koordinaten.

*Bemerkung.* Ein freies Teilchen, das sich unter Zwangsbedingungen auf einer Fläche bewegt, bewegt sich auf einer Geodäte, d.h. entlang der kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten. →

**BSP 12** Ein käftefreies Teilchen das sich durch Zwangsbedingungen auf einer Kugeloberfläche bewegt, bewegt sich entlang eines Großkreises.

» Für ein allgemeines kräftefreies Teilchen ist der Lagrange

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen haben die Form,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = 0.$$

Für eine Geodäte ist der Ausdruck,

$$\int dt \sqrt{\dot{\vec{r}}^2} = \int dt \sqrt{\frac{2}{m} T}$$

extremal. Ableiten dieses Ausdrucks ergibt,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial q^i} \frac{1}{\sqrt{T}} = 0.$$

Die Energie ist erhalten, also ist  $T = \text{const}$  und wir erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = 0. \quad \ll \blacksquare$$

## 4.2 Mathematische Struktur

Wir wollen noch kurz auf die mathematische Struktur der Probleme mit holonomen Zwangsbedingungen eingehen.

Die Zwangsbedingungen

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

definieren eine **Mannigfaltigkeit**  $M \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ , durch  $M = \bigcap_i f_i^{-1}(0)$  der Dimension  $3N - k$ .

Die verallgemeinerten Koordinaten  $q^i$ ,  $i = 1, \dots, f$  stellen **Karten** zu dieser Mannigfaltigkeit  $M$  dar.

An jedem Punkt  $p$  der Mannigfaltigkeit haben wir eine Tangentialfläche  $TM_p$ . Diese bildet im Gegensatz zur Mannigfaltigkeit einen Vektorraum. Die Tangentialvektoren sind alle möglichen  $\dot{q}^i$  in  $p$ , d.h.  $TM_p$  ist die Menge der Geschwindigkeitsvektoren der Kurven in  $M$  durch  $p$ .

Für eine Mannigfaltigkeit, die sich in den  $\mathbb{R}^n$  einbetten lässt, kann ein Skalarprodukt definiert werden. Eine solche Mannigfaltigkeit heißt **Riemannsche**

**Mannigfaltigkeit.** Durch holonome Zwangsbedingungen werden also immer Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert. Das Skalarprodukt auf  $M$  ist die **kinetische Energie** gegeben durch,

$$T : TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{q}^i, \dot{q}^j \mapsto \langle \dot{q}^i, \dot{q}^j \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

wobei  $a_{ij}(q^k)$  einen metrischen Tensor bezeichnet. Die **potentielle Energie** ist eine reellwertige Funktion auf  $M$ ,

$$V : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad q^i \mapsto V(q^i).$$

Die Vereinigung aller Tangentialräume an  $M$  heißt **Tangentialbündel**,

$$TM = \bigcup_{p \in M} TM_p.$$

Die Lagrangefunktion ist somit eine skalare Funktion auf dem Tangentialbündel,

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{q}^i, q^i \mapsto L(\dot{q}^i, q^i).$$

Die verallgemeinerten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$$

sind Elemente aus dem **Dualraum** von  $TM_p$ , d.h. eine Abbildung von  $TM_p$  in die reellen Zahlen,

$$p_i : TM_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad q^i \mapsto \sum_i p_i q^i, \quad p_i \in TM_p^*.$$

Analog ist auch  $\frac{\partial L}{\partial q^i}$  ein Element aus dem Dualraum.

Eine virtuelle Verrückung  $\delta q^i$  ist ein Vektor im Tangentialraum, d.h. ein Geschwindigkeitsvektor einer Kurve  $q^i(t)$  am Punkt  $p$ .

Betrachten wir nun eine Variablentransformation,

$$q^i \mapsto q^i(\xi^1, \dots, \xi^f),$$

so transformieren die  $\dot{q}^i$  **kontravariant**

$$\dot{q}^i = \sum_j \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j,$$

und die verallgemeinerten Impulse **kovariant**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \sum_j \frac{\partial \eta_j}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L}{\partial \eta^j}.$$

Beim Prinzip von d'Alembert muss beachtet werden, dass Vektoren und Impulse unterschiedlich transformieren. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist jedoch vollständig kontravariant. Beim Übergang von Geschwindigkeiten zu Impulsen müssen wir den metrischen Tensor berücksichtigen,

$$p_i = \sum_j a_{ij}(q^i) \dot{q}^j.$$

*Bemerkung.* Ein kräftefreies Teilchen, das sich auf einer Hyperfläche bewegt, folgt einer Geodäte. Die Distanz wird dabei von der durch das Skalarprodukt (kinetische Energie) induzierten Metrik gemessen.  $\rightarrow$

**BSP 13** Die Bewegung auf einer rotationssymmetrischen Fläche in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  wird durch die holonome Zwangsbedingung  $z = f(r)$  beschrieben. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + (f'(r) \dot{r})^2 \right] = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}).$$

Die Drehimpulserhaltung liefert  $p_\varphi = r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = r |\mathbf{v}| \sin \alpha$ . Die Energieerhaltung  $T = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 = \text{const} \Rightarrow |\mathbf{v}| = \text{const}$ .

$$\Rightarrow r \sin \alpha = \text{const}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p_\varphi}{|\mathbf{v}| \sin \alpha} > \text{const}.$$

Die Bewegung ist auf ein Band eingeschränkt. ■



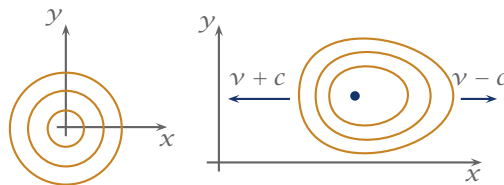
# 5 Spezielle Relativitätstheorie

Bei der Beschreibung der Elektrodynamik mittels den Maxwell-Gleichungen ergibt sich ein Problem mit der Klassischen Mechanik, da die Maxwell-Gleichungen nicht forminvariant unter Galilei-Transformationen sind. Aus der Sicht der Klassischen Mechanik kann daher die Maxwell Theorie nicht korrekt sein.

Auf der anderen Seite wissen wir aus dem Experiment, dass sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten,

$$c = 299792458\text{m/s.}$$

Bei Abstrahlung in Ruhe breiten sie sich kugelförmig aus. Bewegt sich die Quelle, ist nach der Klassischen Mechanik die Ausbreitung nicht mehr kugelförmig, es kommt zum Dopplereffekt.



## 25 Wellenausbreitung im ruhenden und bewegten Bezugssystem.

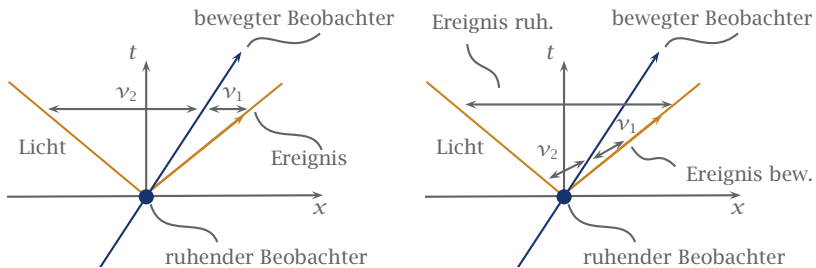
Da elektromagnetische Wellen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben, müsste so die Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem abhängen. Insbesondere würde ein absolutes Ruhesystem existieren, in dem Licht sich mit  $c_0$  ausbreitet. Es wurden zahlreiche Experimente durchgeführt, um die Relativbewegung des Laborsystems zu diesem absoluten Bezugssystem nachzuweisen, darunter auch das berühmte Michelson-Morley Experiment, welches schließlich das experimentelle Ergebnis lieferte, dass kein absolutes Bezugssystem existiert und die Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem unabhängig ist. Die Klassische Mechanik bricht also bei Lichtgeschwindigkeit zusammen.

Einstein löste diesen Widerspruch, indem er davon ausging, dass sowohl die Klassische Mechanik als auch die Maxwell Theorie korrekt sind, jedoch eine experimentell nicht verifizierbare Annahme, die absolute Gleichzeitigkeit aufgab.

In der Klassischen Mechanik gingen wir bisher von einer absoluten Zeitskala aus, die in allen relativ zueinander bewegten Koordinatensystem verwendet werden kann. Die Aussage, zwei Ereignisse finden gleichzeitig statt, hat so absolute Bedeutung. Einstein forderte nun, dass jedem Bezugssystem eine eigene von anderen Bezugssystem unabhängige Zeitskala zuzuordnen ist.

**BSP 1** Geht man von absoluter Gleichzeitigkeit aus, nehmen ruhender und bewegter Beobachter dieselben Ereignisse als "gleichzeitig" wahr (Siehe Abb. 26).

Dies führt jedoch dazu, dass ruhender und bewegter Beobachter eine unterschiedliche Lichtgeschwindigkeit wahrnehmen ( $v_1 \neq v_2$ ), was im Widerspruch zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit steht.



26 Gleichzeitige Ereignisse in der KM (links) und der SRT (rechts).

Gibt man die absolute Gleichzeitigkeit auf und fordert dagegen, dass die Lichtgeschwindigkeit eine universelle konstante für alle Bezugssysteme ist, nehmen ruhender und bewegter Beobachter unterschiedliche Ereignisse als "gleichzeitig" wahr. Ein bewegter Beobachter hat eine "verschobene Idee" davon, was Gleichzeitigkeit bedeutet. ■

## 5.0 Mathematische Formulierung

Einstein baut seine "Spezielle Relativitätstheorie" auf zwei Axiomen auf.

(i) *Spezielles Relativitätsprinzip.*

Alle Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die selbe Form.

(ii) *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.*

$c$  ist eine universelle Konstante für alle Inertialsysteme.

Zur mathematischen Formulierung dieser Theorie bietet es sich an, 4-er Ortsvektoren einzuführen,

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } x_0 = ct,$$

die ein Ereignis, welches in einem System  $K$  stattfindet, durch Angabe von Zeit und Ort des Geschehens charakterisieren. Indem man die Zeit  $t$  mit der Lichtgeschwindigkeit multipliziert, haben alle Komponenten des 4-er Vektors die Dimension einer Länge. Die 4-er Vektoren sind Elemente des Minkowski-Raums, ein vierdimensionaler Vektorraum, der nicht mehr mit der euklidischen Metrik versehen ist. Wir werden uns später damit ausführlicher befassen.

*Bemerkung zur Notation.* Für einen 4-er Vektor verwenden wir das Symbol  $\mathbf{x}^\mu$  bzw.  $\mathbf{x}$ . Die  $\mu$ -te Komponente des 4-er Vektors bezeichnen wir mit  $x^\mu$ , wobei  $\mu = 0, \dots, 3$ .

Die Einstein'sche Summennotation erlaubt eine kompakte Schreibweise für Summen,

$$x_\mu x^\mu \equiv \sum_\mu x_\mu x^\mu,$$

$$A_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv \sum_{\mu,\nu} A_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

Wann immer der gleiche Index oben  $^\mu$  und unten  $_\mu$  in einem Ausdruck auftritt, wird darüber summiert.  $\rightarrow$

Es lassen sich nun Transformationen definieren, die ein Inertialsystem bezüglich dieser Darstellung in ein anderes überführen. Homogenität und Isotropie des Raumes verlangen, dass diese Transformationen affine Abbildungen sind

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

wobei  $\Lambda$  eine  $4 \times 4$ -Matrix und  $\mathbf{a}$  einen konstanten 4-er Vektor beschreibt.

Zur Beschreibung dieser Transformationen genügt es, sich zunächst auf einen Boost eines Inertialsystems  $K'$ , dessen Ursprung sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang der  $x$ -Achse relativ zu  $K$  bewegt, zu beschränken ( $\mathbf{a} = 0$ ). Die Transformation hat daher die Form,

$$\left. \begin{aligned} x^{0'} &= a(\nu)x^0 + b(\nu)x^1 \\ x^{1'} &= d(\nu)x^1 + e(\nu)x^0 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Homogenität und Isotropie des Raumes erfordern, dass die Koeffizienten lediglich von  $\nu$  abhängen können. Kehren wir die Richtung der  $x$ -Achse in  $K$  und  $K'$  sowie  $\nu$  um,

$$\begin{aligned} x^{0'} &= a(-\nu)x^0 - b(-\nu)x^1, \\ -x^{1'} &= -d(-\nu)x^1 + e(-\nu)x^0, \\ x^{2'} &= x^2, \\ x^{3'} &= x^3. \end{aligned}$$

erzwingt die Isotropie, dass sich die Transformationsformel nicht ändert, d.h.

$$\begin{aligned} a(-\nu) &= a(\nu), & b(\nu) &= -b(-\nu), \\ d(\nu) &= d(-\nu), & e(-\nu) &= -e(\nu). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Nullvektor im  $K'$  zum Zeitpunkt  $t$ , ergibt sich

$$x^{1'} = 0 = d(\nu)\nu t + e(\nu)ct \Rightarrow \frac{e(\nu)}{d(\nu)} = -\frac{\nu}{c} \equiv -\beta.$$

Wir sehen, dass die Koeffizienten der Matrix  $\Lambda$  bereits durch die Art der Bewegung eingeschränkt werden.

Da es unabhängig ist, ob sich  $K'$  mit der Geschwindigkeit  $v$  zu  $K$  oder  $K$  sich mit der Geschwindigkeit  $-v$  zu  $K'$  bewegt, hat die Rücktransformation die Form,

$$\begin{aligned}x^0 &= a(-v)x^{0'} + b(-v)x^{1'} = a(v)x^{0'} - b(v)x^{1'} \\x^1 &= d(-v)x^{1'} + e(-v)x^{0'} = d(v)x^{1'} - e(v)x^{0'} \\x^2 &= x^{2'} \\x^3 &= x^{3'} \\ \Rightarrow \Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ -e & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\Lambda$  und  $\Lambda^{-1}$  sind invers zueinander, d.h.  $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$ , woraus sich folgendes Gleichungssystem ergibt,

$$\begin{aligned}a^2 - be &= 1, & -ab + bd &= 0, \\ -ae + de &= 0, & -be + d^2 &= 1.\end{aligned}$$

Wählen wir  $\kappa \in \mathbb{R}$  als freien Parameter, so besitzt das System eine eindeutige Lösung. Setzen wir

$$b = -a\beta\kappa^2,$$

ergibt sich für die Transformationen die Form

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\beta\kappa^2 x^1 \\x^{1'} &= -\gamma\beta\kappa^2 x^0 + \gamma x^1 \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}$$

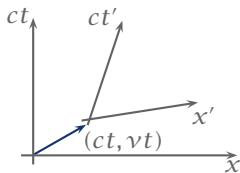
wobei  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2\beta^2}}$ .

*Bemerkung.* Für  $\kappa = 0$  ist  $\gamma = 1$  und wir erhalten die Galilei-Transformation für einen boost.

Prinzip (i) kann also auch auf die Gallilei-Transformationen führen. Diese sind jedoch nicht mit (ii) verträglich. Wählt man  $\kappa = 1$ , so sind (i) und (ii) erfüllt. Die Größe  $\frac{c}{\kappa}$  spielt die Rolle einer maximalen Signalgeschwindigkeit. Für  $\kappa = 0$  werden alle Wechselwirkungen instantan, für  $\kappa = 1$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit.  $\rightarrow$

Wir erhalten für  $\kappa = 1$  die **Lorentz-Transformationen**, welche die Lichtgeschwindigkeit bei Transformation zwischen Inertialsystemen invariant lassen. Die Lorentz-Transformation für einen Boost in  $x$ -Richtung ist gegeben durch,

$$\left. \begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x^{1'} &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## 27 Lorentztransformation im Minkowski-Raum

*Bemerkung.* Die Lorentz-Transformation lässt die Größe

$$(x^0)^2 - \vec{x}^2 = ct^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu$$

unverändert.  $g_{\mu\nu}$  bezeichnet hier den metrischen Tensor,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

» Wir betrachten nur den Spezialfall des  $x$ -Richtung Boost, die übrigen folgen analog.

$$\begin{aligned}
 (x^0)' - \tilde{x}'^2 &= (yx^0 - y\beta x^2)^2 - (-y\beta x^0 + yx^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
 &= y^2(x^0)^2 + y^2\beta^2(x^1)^2 - y^2\beta^2(x^0)^2 - y^2(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
 &= (x^0)^2 \underbrace{y^2(1 - \beta^2)}_{=1} + (x^1)^2 \underbrace{y^2(\beta^2 - 1)}_{=-1} - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad \ll \quad \circ
 \end{aligned}$$

### ■ Die Lichtgeschwindigkeit als universelle Konstante

Wir wollen nun zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  unabhängig vom Inertialsystem ist.

» Bewege sich ein Teilchen in einem Inertialsystem  $K$  konstant mit Geschwindigkeit  $c$  in Richtung  $\vec{n}$  ( $\vec{n}$  Einheitsvektor). Die Bewegungsgleichung ist dann gegeben durch,

$$\vec{x}(t) = ct\vec{n}, \quad \left| \dot{\vec{x}} \right| = c.$$

Transformieren wir nun in Inertialsystem  $K'$ , das sich relativ zu  $K$  mit Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 ct' &= \gamma(x^0) - y\beta(x^1) = \gamma ct - y\beta ct n^1 = \gamma ct(1 - \beta n^1), \\
 (x^1)' &= -y\beta(x^0) + y(x^1) = -y\beta ct + yct n^1 = \gamma ct(n^1 - \beta) = ct' \frac{n^1 - \beta}{1 - \beta n^1}, \\
 (x^2)' &= (x^2) = ct n^2 = \frac{1}{y} \frac{ct'}{1 - \beta n^1} n^2, \\
 (x^3)' &= (x^3) = ct n^3 = \frac{1}{y} \frac{ct'}{1 - \beta n^1} n^3.
 \end{aligned}$$

Um die Geschwindigkeit des Teilchens in  $K'$  zu erhalten, müssen wir die Bewegungsgleichung in  $K'$  aufstellen,

$$\vec{x}'(t') = ct' \begin{pmatrix} \frac{n^1 - \beta}{1 - \beta n^1} \\ \frac{1}{y} \frac{n^2}{1 - \beta n^1} \\ \frac{1}{y} \frac{n^3}{1 - \beta n^1} \end{pmatrix} = ct' \vec{n}'$$

Nun ist  $|\dot{\vec{x}}'| = c |\vec{n}'|$ . Wir müssen also zeigen  $|\vec{n}'| = 1$ . Dazu betrachten wir den Spezialfall

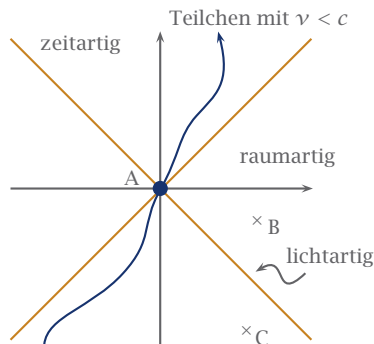
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}' = \begin{pmatrix} \frac{1-\beta}{1-\beta} \\ \frac{1}{\gamma} 0 \\ \frac{1}{\gamma} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \ll$$

## 5.1 Einfache Folgerungen aus der SRT

Die Lorentztransformationen zeigen, dass es nicht möglich ist, sich schneller als das Licht zu bewegen.

**Definition** Sei  $\mathbf{x}^\nu$  ein 4-er Vektor. Wir bezeichnen Ereignisse abhängig vom Skalarprodukt als

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu > 0 & \quad : \text{zeitartig,} \\ g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0 & \quad : \text{lichtartig,} \\ g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu < 0 & \quad : \text{raumartig.} \quad \times \end{aligned}$$



28 Lichtkegel mit ruhendem Punkt A, raumartigen Punkt B und zeitartigem Punkt C.

Als Beobachter im Punkt A zur Zeit  $t = 0$  können wir nur zeitartige Ereignisse, die sich im unteren Lichtkegel befinden, wahrnehmen bzw. von ihnen beeinflusst werden. Zeitartige Ereignisse, die sich im oberen Lichtkegel befinden, können



beeinflusst werden. Sind zwei Ereignisse raumartig getrennt, können sie sich gegenseitig weder wahrnehmen noch beeinflussen.

Gilt in einem Bezugssystem für zwei zeitartige Ereignisse  $A$  und  $C$ , dass  $C$  vor  $A$  stattfindet, d.h.  $x_A^0 > x_C^0$ , so gilt dies in jedem Bezugssystem. Um dies einzusehen betrachte  $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}_A^\mu - \mathbf{x}_C^\mu$ , wobei  $\mathbf{x}_\mu \mathbf{x}^\mu = (x_A^0 - x_C^0)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_C)^2 > 0$ . Angenommen es gibt ein Bezugssystem mit  $x_A^0 = x_C^0$ , dann ist  $\mathbf{x}_\mu \mathbf{x}^\mu < 0$ , das Skalarprodukt ist jedoch invariant unter Lorentz-Transformationen, d.h. es kann kein solches Bezugssystem geben. Es gibt also eine absolute Vergangenheit und Zukunft für zeitartige Ereignisse. Für raumartige Ereignisse ist die zeitliche Folge jedoch relativ und nicht absolut. Raumartig getrennte Ereignisse können also nicht kausal verknüpft sein.

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist daher die maximale Geschwindigkeit für Informationen und Teilchen.

## ■ Relativität der Gleichzeitigkeit

Für einen ruhenden Beobachter finden zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  gleichzeitig statt, wenn

$$x_A^0 = x_B^0.$$

Für einen gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Beobachter finden sie gleichzeitig statt, wenn

$$x_A^{0'} = x_B^{0'} = c\tau.$$

Für den ruhenden Beobachter entspricht dies den Ereignissen

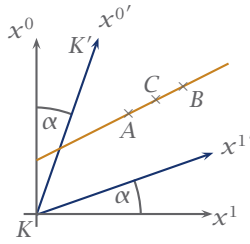
$$c\tau = \gamma x^0 - \beta \gamma x^1$$

$$x^0 = \frac{c\tau + \beta \gamma x^1}{\gamma} = \frac{c\tau}{\gamma} + \beta x^1,$$

die auf einer Geraden mit Steigung  $\beta$  liegen.

Die allgemeine Definition von Gleichzeitigkeit lautet daher,

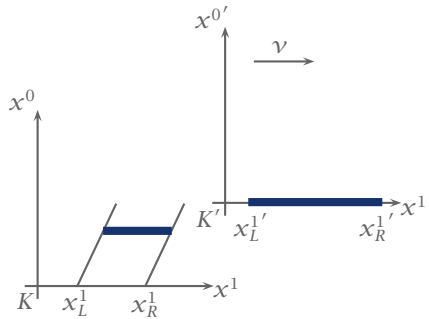
**Definition** Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen *gleichzeitig*, wenn von  $A$  und  $B$  zur gleichen Zeit ausgesendetes Licht bei einem in der Mitte ruhenden Detektor zur gleichen Zeit eintrifft.  $\times$



29 Ereignisse A und B mit Detektor C.

### ■ Längenkontraktion

Betrachte einen Stab mit der Länge  $L_0$ , der im Bezugssystem  $K'$  ruht. Das Bezugssystem  $K'$  bewege sich relativ zu  $K$  mit der Geschwindigkeit  $v$ .



30 Längenkontraktion eines Stabes.

Um die Länge  $L = (x_R^1 - x_L^1)$  in  $K$  zu messen, müssen linkes und rechtes Ende zur gleichen Zeit lokalisiert werden ( $x_R^0 - x_L^0 = 0$ ),

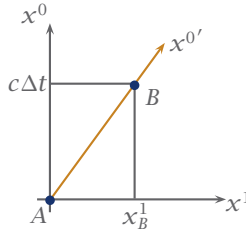
$$L_0 = x_R^{1'} - x_L^{1'} = \gamma (x_R^1 - \beta x_R^0) - \gamma (x_L^1 - \beta x_L^0) = \gamma (x_R^1 - x_L^1) = \gamma L$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 < L_0.$$

Die Länge des Stabes ist also in jedem relativ zum Ruhesystem bewegten System *kleiner*. Diesen Effekt nennt man **Lorentzkontraktion**.

## ■ Zeitdilatation

Betrachte eine Uhr, die im Koordinatenursprung von  $K$  ruht. Ein Zeitintervall  $\tau = t_A - t_B$ , das wir im Ruhesystem  $K$  ablesen, heißt **Eigenzeit**. Lesen wir nun zusätzlich die Zeit in einem Bezugssystem  $K'$  ab, das sich relativ zu  $K$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt.



### 31 Zeitdilatation einer bewegten Uhr.

Mit den bekannten Transformationsformeln ergibt sich in  $K'$ ,

$$x_A^{0'} - x_B^{0'} = \gamma (x_A^0 + \beta x_A^1) - \gamma (x_B^0 - \beta x_B^1) = \gamma (x_B^0 - x_A^0) \\ \Rightarrow \tau' = \gamma \tau > \tau.$$

Von  $K'$  aus betrachtet vergeht, bis auf der Uhr das Zeitintervall  $\tau$  verstrichen ist, in  $K'$  tatsächlich *mehr Zeit*. Eine bewegte Uhr geht also um den konstanten Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

“langsamer” als in ihrem Ruhesystem.

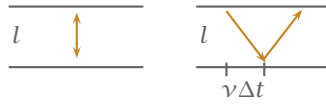
*Bemerkung.* Das Differential der Eigenzeit ist

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Messen wir im Laborsystem die Zeitdifferenz  $t_2 - t_1$ , erhalten wir für eine allgemeine Bewegung die Zeitdifferenz der bewegten Uhr in ihrem Ruhesystem

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad \circ$$

**Bsp 2** Die Lichtuhr. Zwischen zwei in  $K'$  ruhenden Spiegeln mit Abstand  $l$  wird ein Lichtstrahl hin- und hergesandt. Immer wenn der Lichtstrahl auf einem der Spiegel registriert wird, wird die Lichtuhr um eine Zeiteinheit weitergestellt.



32 Lichtuhr in ruhendem (links) und bewegt (link) Zustand.

Im Ruhesystem  $K'$  benötigt der Lichtstrahl, um von einem Spiegel zum anderen zu gelangen, die Zeit  $\Delta\tau' = l/c$ . Nun bewege sich  $K'$  relativ zu  $K$  mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der Spiegelachse. Aus der Sicht von  $K$  hat das Licht zwischen zwei Spiegeln eine größere Distanz zurückzulegen, die Lichtgeschwindigkeit ist aber in allen Inertialsystem gleich, d.h. in  $K$  vergeht zwischen zwei Spiegeln die Zeit

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{l^2 + v^2\Delta\tau'^2}}{c}$$

$$\Delta\tau^2 = \frac{l^2 + v^2\Delta\tau'^2}{c^2} = \Delta\tau'^2 + \frac{v^2}{c^2}\Delta\tau'^2$$

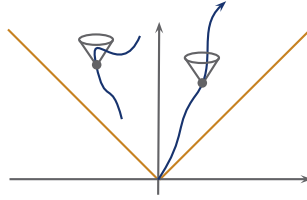
$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Delta\tau' > \Delta\tau'.$$

Liest man in  $K$  ab, geht die in  $K'$  ruhende Uhr langsamer, als eine in  $K$  ruhende Uhr, da mehr Zeit vergeht, bis die Lichtuhr um ein Zeitintervall weitergestellt wird.

Andersherum würde ein in  $K'$  ruhender Beobachter aufgrund der selben Überlegung sehen, dass eine zu ihm bewegte Lichtuhr in  $K$  langsamer geht, als seine in  $K'$  ruhende. Dies ist die Symmetrie der Zeitdilatation, jeder misst, dass die Uhr des anderen langsamer geht. ■

*Bemerkung.* Betrachten wir die Trajektorie eines bewegten Teilchens, so muss diese so geformt sein, dass sie sich in jedem Punkt innerhalb des von dort ausgehenden Lichtkegels befindet.

**Bsp 3** Der Myon-Zerfall. In ca. 10km Höhe werden aufgrund der Wechselwirkung von Protonen aus dem Weltraum mit unserer Atmosphäre Myonen gebildet. Sie



### 33 Trajektore innerhalb und außerhalb der zulässigen Geschwindigkeit.

haben eine sehr hohe Geschwindigkeit  $v \sim 0.998c \Rightarrow \gamma \approx 16$ . Die Teilchen sind nicht stabil und haben eine Lebensdauer von wenigen  $\mu\text{s}$ . Mögliche Myon-Zerfälle sind,

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu,$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e.$$

Im Ruhesystem der Myonen kann der Zerfall beschrieben werden durch,

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = 2.2\mu\text{s} \quad \text{mittlere Lebensdauer.}$$

Rechnet man klassisch, benötigen die Myonen bis zum Erreichen der Erde die Zeit,

$$t_{\text{Flug}} = \frac{10\text{km}}{0.998c} \approx 30\mu\text{s}.$$

Es sind also kaum Myonen auf der Erde zu erwarten, man kann jedoch eine sehr große Anzahl von eintreffenden Myonen messen.

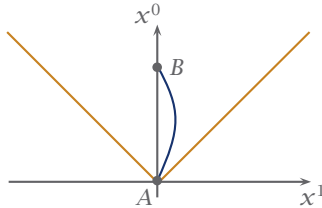
Aufgrund der hohen Geschwindigkeit der Myonen kommen relativistische Effekte zu tragen. Wir müssen die Eigenzeit der Myonen betrachten,

$$\tau_{\text{Flug}} = \frac{1}{\gamma} t_{\text{Flug}} \approx \frac{1}{16} 30\mu\text{s} = 1.9\mu\text{s}.$$

Dies ist einer von vielen experimentellen Befunden, der die Korrektheit der SRT bestätigt. ■

## ■ Zwillingsparadoxon

Betrachtet man die Zwillingsbrüder  $A$  und  $B$ .  $A$  befinde sich in Ruhe, während  $B$  eine längere Reise mit  $v \approx c$  macht. Trifft  $B$  wieder auf der Erde ein, ist er viel jünger als  $A$ .



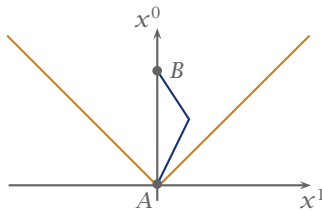
34 Reise von  $B$  im Minkowski-Raum.

Man kann dies mit der Zeitdilatation erklären,

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} dt < t_2 - t_1.$$

Die für  $B$  vergangene Zeit ist kleiner als die für  $A$  vergangene.

**BSP 4** Betrachten wir den exotischen Fall der instantanen Beschleunigung.



35 Reise mit instantaner Beschleunigung.

Sei  $v = 0.8c$  und  $t_2 - t_1 = 10$  Jahre, so ergibt sich für die Zeitdilatation,

$$\tau_2 - \tau_1 = 6 \text{ Jahre.}$$

Dies scheint paradox, da die Situation auf den ersten Blick Symmetrisch erscheint, d.h. aus der Sicht von  $B$  müsste ebenfalls weniger Zeit vergangen sein, als aus der Sicht von  $A$ . Die Situation kann jedoch nicht symmetrisch sein, denn während  $A$  sich stets im selben Inertialsystem befindet, wechselt  $B$  das Inertialsystem. Es handelt sich hier also um kein Paradoxon.

Aus der Sicht von  $B$  ist die in der Raumzeit zurückzulegende Strecke "Lorentz-kontrahiert", d.h. er benötigt weniger Zeit als  $A$ . ■

**Bsp 5** Um Auszuschließen, dass die Beschleunigungsphase von  $B$  den entscheidenden Unterschied macht, sollen nun  $A$  und  $B$  eine Reise machen und dabei identisch beschleunigen,  $B$  soll nur länger mit der hohen Geschwindigkeit fliegen.  $A$  komme nach 10 Jahren auf die Erde zurück,  $B$  nach 30.

Für  $A$  ist zwischen Abflug und  $B$ s Ankunft die Zeit

$$(\text{Beschleunigungsbeitrag}) + \frac{1}{\gamma} (10 \text{ Jahre}) + 20 \text{ Jahre}$$

vergangen. Für  $B$  ist zwischen Abflug und Ankunft die Zeit

$$(\text{Beschleunigung Beitrag}) + \frac{1}{\gamma} (30 \text{ Jahre})$$

vergangen. Für die Differenz ergibt sich,

$$\begin{aligned} \Delta T_A - \Delta T_B &= \frac{1}{\gamma} (10 \text{ Jahre}) + 20 \text{ Jahre} - \frac{1}{\gamma} (30 \text{ Jahre}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \underbrace{(20 \text{ Jahre})}_{\text{Reisezeit diff.}} \end{aligned}$$

Bei  $v = 0.8c$  beträgt die Differenz  $\left(1 - \frac{3}{5}\right) 20 \text{ Jahre} = 8 \text{ Jahre}$ . ■

## 5.2 Lorentztransformation

In der Speziellen Relativitätstheorie werden die Galilei Transformationen, die in der Klassischen Mechanik ein Inertialsystem in ein anderes überführen, durch Poincaretransformationen ersetzt. Diese Transformationen bilden ebenfalls eine Gruppe, die **Poincare-Gruppe**, die die Galilei Gruppe ersetzt. Eine Poincaretransformation hat die Form

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

d.h. sie setzt sich aus einer Lorentztransformation  $\Lambda$  und einer Translation  $\mathbf{a}$  zusammen. Dabei ist die Lorentztransformation eine lineare Abbildung

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu},$$

die dadurch charakterisiert ist, dass sie die Minkowski Metrik

$$g = g_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

invariant lässt, d.h.  $\langle \Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{x} \rangle_g = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_g$ .

Somit ist auch der Betrag des 4-er Vektors  $\mathbf{x}^{\nu}$  invariant,

$$g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = \text{const.}$$

» *Beweis der Invarianz.* Mit  $y^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$  erhalten wir,

$$g_{\mu\nu} y^{\mu} y^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\nu} x^{\beta} = \left( \Lambda_{\alpha}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \right) x^{\alpha} x^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}. \quad \ll$$

Für jeden 4-er Vektor  $\mathbf{x}^{\mu}$  ist daher die Größe

$$g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x^{0^2} - \vec{x}^2 = \text{const}$$

eine feste Größe in allen Inertialsystemen. Insbesondere wird der Lichtkegel mit

$$g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = 0$$

auf sich selbst abgebildet.

Eine spezielle Lorentztransformation haben wir bereits kennen gelernt, den Boost in  $x$ -Richtung,

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & & \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



mit der **Rapidity**  $\psi$  und den Relationen

$$\tanh \psi = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Rotationen haben die Form,

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \vec{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer  $3 \times 3$ -Rotationsmatrix  $\vec{R}$ .

Analog zur klassischen Mechanik gibt es auch die zwei diskreten Transformationen Raumspiegelung und Zeitumkehr

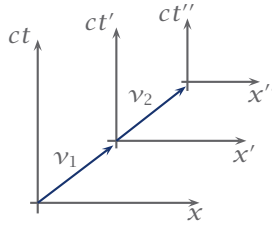
$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung.* Man kann zeigen, dass sich jede Lorentztransformation als Produkt dieser einfachen Transformationen schreiben lässt.  $\rightarrow$

### ■ Addition von Geschwindigkeiten

In der Speziellen Relativitätstheorie ist die Geschwindigkeitsaddition nicht mehr linear wie in der Newtonschen Mechanik.

Um die genaue Form herzuleiten, betrachten wir die Inertialsysteme  $K$ ,  $K'$  und  $K''$  wobei sich  $K'$  mit  $v_1$  relativ zu  $K$  und  $K''$  mit  $v_2$  relativ zu  $K'$  bewegt. Die Transformation von  $K$  nach  $K''$  erhalten wir, indem wir die einzelnen Trans-



### 36 Relativbewegung von drei Koordinatensystemen.

formationen hintereinanderausführen,

$$\Lambda(v_2)\Lambda(v_1) = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 & & \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 & & \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1 + \chi_2) & -\sinh(\chi_1 + \chi_2) & & \\ -\sinh(\chi_1 + \chi_2) & \cosh(\chi_1 + \chi_2) & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es werden also nicht die Geschwindigkeiten sondern die Rapiditäten addiert,

$$\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 \Rightarrow v_3 = c \tanh \chi_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

*Bemerkung.*  $v_3$  ist stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ .  $\rightarrow$

## 5.3 Energie und Impuls

Das Differential

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 \left( 1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) dt^2 \equiv c^2 d\tau^2$$

ist lorentzinvariant und somit ist die Eigenzeit

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

eine lorentzinvariante skalare Größe.

Somit erhalten wir aus dem 4-er Vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$  einen neuen Vektor,

$$\mathbf{u} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \gamma \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} \mapsto \Lambda \mathbf{x},$$

$$\mathbf{u} \mapsto \Lambda \mathbf{u} = \Lambda \frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \Lambda \frac{d}{d\tau} \Lambda^{-1} \Lambda \mathbf{x} = \frac{d}{d\tau} \Lambda \mathbf{x}.$$

*Bemerkungen.* 1.)  $\mathbf{u}g\mathbf{u} = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$ , d.h. die Minkowski Metrik ist eine Konstante für alle Bewegungen.

2.) Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist kein Anteil eines 4-er Vektors. –

Wir definieren den 4-er Impuls

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m \frac{d}{d\tau} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{p}^\mu = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ m\vec{v}\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_\mu = g_{\mu\nu} \mathbf{p}^\nu = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ -m\vec{v}\gamma \end{pmatrix}$$

In der modernen Physik sieht man davon ab, die Masse geschwindigkeitsabhängig zu definieren, sondern fasst sie als skalare lorentzinvariante Größe auf. Es ist oft viel geschickter so vorzugehen, auch wenn in Deutschen Lehrbüchern - historisch bedingt - oftmals von einer geschwindigkeitsabhängigen Masse ausgegangen wird.

Mit dem so definierten Impuls erhalten wir,

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2.$$

Für ein abgeschlossenes System ist daher  $\mathbf{p}^\mu$  eine Erhaltungsgröße. Die Zeitkomponente von  $\mathbf{p}$  übernimmt die Rolle einer Energie,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $\frac{v}{c} \ll 1$  erhalten wir so

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \gamma = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = mc^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2. \end{aligned}$$

*Bemerkungen.* 1.) Der 4-er Impuls eines Elementarteilchens ist eine kovariante Größe  $\mathbf{p}^\mu$  und seine Masse der Skalar  $p^\mu p_\mu = c^2 m^2$ .

2.) Für Photonen gilt  $m = 0$  und daher  $\frac{E}{c} = |\vec{p}|$ , was auf die Dispersion führt  $\frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$ .  $\rightarrow$

**BSP 6** Elektron-Positron-Kollision.

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma.$$

Es gilt die relativistische Energie und Impulserhaltung,

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D.$$

Wir gehen davon aus, dass sich  $e^-$  und  $e^+$  in Ruhe befinden.

$$\Rightarrow 2mc^2 = E_C + E_D$$

Nach dem Stoß muss der Gesamtimpuls Null sein,

$$\Rightarrow \mathbf{p}_C = -\mathbf{p}_D$$

$$\Rightarrow E_C = E_D = mc^2.$$

Wir sehen somit, dass die relativistische Energie-Impulserhaltung die Erzeugung und die Annihilation von Teilchen ermöglicht. ■

**BSP 7** Die Sonne strahlt Energie in Form von Photonen ab. Durch diesen Energieverlust verliert sie auch stetig an Masse. ■

## ■ Weitere 4-er Vektoren

Nachdem wir 4-er Vektoren für Ort, Geschwindigkeit und Impuls eingeführt haben, wollen wir prüfen, welche Größen sich außerdem so darstellen lassen. Betrachten wir zunächst die Beschleunigung,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{d\tau} \mathbf{u} = \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{x} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} + \gamma \left( \frac{-2\vec{v}\vec{a}}{c^2} \right) \gamma^3 \left( -\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} + \gamma^4 \frac{\vec{v}\vec{a}}{c^2} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Beschleunigung und Impuls stehen senkrecht aufeinander

$$a^\mu p_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} p^\mu p_\mu = 0. \quad \rightarrow$$

Der Vorteil der Darstellung durch 4er-Vektoren ist, dass eine solche Größe "trivial" unter Lorentztransformationen transformiert. D.h. sie transformiert so wie  $\mathbf{x}$  oder  $\mathbf{p}$ ,

$$A^{\mu'} = \Lambda_V^\mu A^\nu.$$

Wir wollen nun weitere Größen betrachten, die sich durch 4er-Vektoren darstellen lassen:

- Wellenvektor des Lichts,

$$\mathbf{k}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ -\vec{k} \end{pmatrix}.$$

Somit ist auch die Phase

$$\Rightarrow e^{ix^\mu k_\mu} = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$$

eine skalare Größe.  $\omega t - \vec{k}\vec{x}$  ist hierbei lorentzinvariant.

- Elektromagnetisches Potential mit dem Skalarpotential  $\phi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$ ,

$$\mathbf{A}^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}.$$

- Ableitungsoperatoren

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial_t}{c} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix},$$

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial_t}{c} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}.$$

- D'Alembertoperator (Wellengleichung  $\square E = 0$ )

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \frac{\partial_t^2}{c^2} - \Delta.$$

- Stromdichte mit Ladungsstromdichte  $\rho$  und Teilchenstromdichte  $\vec{j}$ ,

$$\mathbf{j}^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}.$$

- Für das  $E$ - und  $B$ -Feld erhalten wir den elektromagnetischen Feldtensor, einen Tensor 2. Stufe,

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu.$$

In karthesischen Koordinaten mit Minkowski-Metrik ist die Matrixdarstellung des Tensors gegeben durch

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir eine Lorentztransformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= (\partial^\mu)' (A^\nu)' - (\partial^\nu)' (A^\mu)' = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \left[ \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \right] \\ &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

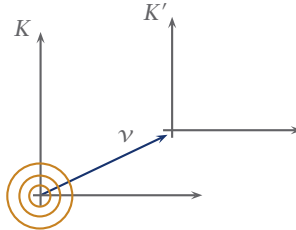
Die Maxwellgleichungen haben nun die Form,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^\nu, \\ \partial^\alpha \mathbf{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathbf{F}^{\nu\alpha} + \partial^\nu \mathbf{F}^{\alpha\mu} &= 0, \end{aligned}$$

sie sind lorentzinvariant.

## 5.4 Relativistischer Dopplereffekt

Betrachte ein Inertialsystem  $K'$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $z$ -Richtung relativ zu  $K$  bewegt.



37 Transformation der Lichtausbreitung.

Der Wellenvektor  $\mathbf{k}^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$  transformiert trivial unter Lorentztransformationen, wir erhalten daher für  $\mathbf{k}^{\mu'}$ ,

$$k'_x = k_x, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = \gamma \left( k_z - \beta \frac{\omega}{c} \right),$$

$$\omega' = \gamma (\omega - v k_z)$$

Stellen wir  $\vec{k}$  und  $\vec{k}'$  in Kugelkoordinaten dar mit  $\omega/c = |\vec{k}|$  und  $\omega'/c = |\vec{k}'|$ , so folgt

$$\omega' = \gamma \omega (1 - v/c \cos \vartheta)$$

und dies ist gerade der relativistische Dopplereffekt.

Für eine Ausbreitung entlang des boost, d.h.  $\vartheta = 0$  ergibt sich,

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

## 5.5 Relativistische Kraftgesetze

Für  $v \rightarrow 0$  gilt das Newtonsche Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Wir können dies auch als 4er-Vektor schreiben,

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{f}^\alpha \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} \mathbf{p}^\alpha = \mathbf{f}^\alpha,$$

wobei die Kraft im Ruhesystem zwangsläufig die Form haben muss,

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix},$$

mit der nicht relativistischen Kraft  $\vec{F}$  für  $\vec{v} = 0$ .

Die Idee ist nun, in das Ruhesystem des Teilchens ( $t = \tau$ ) zu transformieren, dort das Newtonsche Gesetz zu verwenden und anschließend zurückzutransformieren.

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} \end{pmatrix}$$

Im Laborsystem wirkt somit die 4er-Kraft,

$$f^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha(-\vec{v}) f_0^\beta, \quad \mathbf{f} = \Lambda \mathbf{f}_0,$$

wobei hier die Rücktransformation ins Laborsystem  $\Lambda_\beta^\alpha$  von  $-\vec{v}$  abhängt.

$$\Rightarrow \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{v}{c} \vec{F} \\ \vec{F} + (\gamma - 1) \frac{v \vec{F}}{v^2} \vec{v} \end{pmatrix}.$$

$f_0$  beschreibt hier die Änderung der Energie.

**BSP 8** Wir können nun die relativistische Kraftgleichung der Elektrodynamik angeben,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathbf{p}^\alpha &= \frac{e}{c} \mathbf{F}^{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta, \\ \frac{d}{d\tau} \mathbf{p}_\alpha &= \frac{e}{c} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \mathbf{u}^\beta. \end{aligned}$$

In Komponenten geschrieben,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) &= e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), && \text{Lorentzkraft,} \\ \frac{d}{dt} (\gamma m c^2) &= e \vec{E} \vec{v}, && \text{geleistete Arbeit.} \end{aligned}$$



» *Beweis der Darstellung.* Im Ruhesystem gilt die Elektrostatik

$$\vec{F} = e\vec{E}, \quad \vec{E} \text{ elektrisches Feld.}$$

Mit dem elektromagnetischen Feldtensor im Ruhesystem

$$\mathbf{F}_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

folgt das relativistische Kraftgesetz,

$$\mathbf{f}_0^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \frac{e}{c} F_0^{\alpha\beta} u_\beta,$$

wobei im Ruhesystem,

$$\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_\beta^0 = g_{\beta\nu} \mathbf{u}_0^\nu = g_{\beta\nu} \frac{d}{d\tau} \mathbf{x}_0^\nu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

Rücktransformation ins Laborsystem ergibt

$$f^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha f_0^\beta = \frac{e}{c} \Lambda_\beta^\alpha F_0^{\beta\nu} g_{\nu\mu} u_0^\mu = \frac{e}{c} \underbrace{\Lambda_\beta^\alpha F_0^{\beta\nu} \Lambda_\gamma^\nu}_{F^{\alpha\gamma}} \underbrace{g_{\gamma\delta} \Lambda_\mu^\delta u_0^\mu}_{u^\delta} = \frac{e}{c} F^{\alpha\gamma} u_\gamma,$$

wobei  $F^{\alpha\gamma}$  den Feldtensor im Laborsystem und  $u^\delta$  die Geschwindigkeit im Laborsystem beschreiben,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ -\gamma\vec{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} c\gamma\vec{E}\vec{v} \\ c\gamma\vec{E} + \gamma\vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix} = \gamma \frac{d}{dt} m\mathbf{u}^\alpha = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma\vec{v} \end{pmatrix}. \quad \ll \blacksquare$$

## 5.6 Variationsprinzip

Um den Lagrangeformalismus auch im relativistischen Fall anwenden zu können, ist es geschickt, die Trajektorien nicht mit  $t$  sondern einem beliebigen Parameter  $\lambda$  zu parametrisieren. Man erhält so die relativistische Wirkung

$$S_{\text{rel}} = \int d\lambda L,$$

und den Lagrange

$$L\left(\mathbf{x}^\mu(\lambda), \frac{d\mathbf{x}^\mu}{d\lambda}\right) = \underbrace{-mc\sqrt{g_{\mu\nu}}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}_{\text{neue rel. Energie}} - \underbrace{\frac{e}{c}A_\mu(x^\nu(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}}_{\text{Wechsel zwischen Feldern}}.$$

Die Wirkung ist lorentzinvariant und unabhängig von der Parametrisierung  $\lambda$ .

Die Variationsrechnung liefert nun

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} = -\frac{1}{2}\frac{mc}{\underbrace{\sqrt{g_{\mu\nu}\dots}}_c}2\frac{d}{d\lambda}x_\mu - \frac{e}{c}A_\mu = -m\frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c}A_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c}\partial_\mu A_\nu \frac{d}{d\lambda}x^\nu$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}}\right) = -m\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}x_\mu - \frac{e}{c}\partial_\nu A_\mu \frac{d}{d\lambda}x^\nu.$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt,

$$m\frac{d^2}{d\lambda^2}x_\mu = \frac{e}{c}\frac{d}{d\lambda}x^\nu \underbrace{[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]}_{F_{\mu\nu}}.$$

Setzte  $\lambda = \tau$  der Eigenzeit, so folgt

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{p}_\mu = \frac{e}{c}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{u}^\nu.$$

*Bemerkung.* Für  $\lambda = t$  und kleine Geschwindigkeiten  $v \ll c$  erhalten wir die klassische Lagrangefunktion und Wirkung

$$S_{\text{rel}} \rightarrow \int dt L$$

$$L \rightarrow - \underbrace{mc^2}_{\text{irrelevante Konstante}} + \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_T - \underbrace{e\rho}_V + \underbrace{\frac{e}{c}\vec{v}\vec{A}}_{\text{Anteil für Lorentzkraft}} \quad . \quad \infty$$

# 6 Starre Körper

## 6.1 Bewegung im beschleunigten Bezugssystem und Scheinkräfte

Ein Partikel wird in einem Inertialsystem vollständig durch den Lagrange

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T - V$$

beschrieben und folgt der Newtonschen Gleichung,

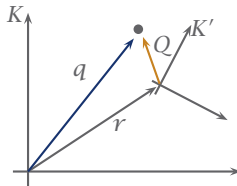
$$m\ddot{\vec{q}} = -\nabla V = \vec{F}.$$

In einem beschleunigten Bezugssystem treten zusätzliche Terme auf, die wir als **Scheinkräfte** bezeichnen.

Im Inertialsystem  $K$  habe das Teilchen die Koordinate  $\vec{q}$ , im bewegten System  $K'$  die Koordinate  $\vec{Q}$ . Der Übergang von  $K$  in  $K'$  findet durch Translationen und Rotationen statt,

$$\vec{q} = B\vec{Q} + \vec{r}(t),$$

wobei  $B \in \text{SO}(3)$  eine Rotationsmatrix und  $\vec{r}(t)$  den Translationsvektor beschreibt.



38 Inertialsystem  $K$  und bewegtes System  $K'$

Die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\dot{\vec{q}}$  lässt sich somit schreiben als

$$\dot{\vec{q}} = \dot{B}\vec{Q} + B\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{r}}(t).$$

Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle:

1) *Translationsbewegung.*

$$B = \mathbb{1},$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{r}}(t).$$

Der Lagrange hat daher im bewegten System die Form,

$$L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) = \frac{m}{2} (\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{r}})^2 - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{Q}}^2 + m\dot{\vec{Q}}\dot{\vec{r}} + \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\vec{Q}}^2 - m\dot{\vec{Q}}\ddot{\vec{r}} - V + \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{Q}}\dot{\vec{r}})}_{(*)}.$$

(\*) ist für die Bewegung irrelevant, da sie den Lagrange nur um eine Konstante und eine totale Ableitung ändert.

$$L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{Q}}^2 - (V + m\dot{\vec{Q}}\vec{a}_s(t)),$$

wobei  $\vec{a}_s(t)$  die Beschleunigung des bewegten Systems beschreibt. Mittels Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten wir so,

$$m\ddot{\vec{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{Q}} - \underbrace{m\vec{a}_s(t)}_{\text{Scheinkraft durch beschl. Bewegung des Systems}}$$

Ein Beobachter im bewegten Bezugssystem nimmt die Scheinkraft als Kraft wahr, die zusätzlich auf den Körper wirkt.

2) *Rotationen.*

$$\vec{r} = 0,$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{q}} = \dot{B}\vec{Q} + B\dot{\vec{Q}}.$$

Für beliebige Rotationen lässt sich  $\dot{B}\vec{Q}$  schreiben als

$$\dot{B}\vec{Q} = \dot{B}B^{-1}\vec{q} = \vec{\omega} \times \vec{q}, \quad (**)$$

wobei  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit darstellt.

*Bemerkung.*  $\vec{\omega}$  ist die Winkelgeschwindigkeit im Ruhesystem,  $\vec{\Omega} = B^{-1}\vec{\omega}$  ist die Winkelgeschwindigkeit im beschleunigten System,

$$B^{-1}\dot{B}\vec{Q} = B^{-1}(\vec{\omega} \times \vec{q}) = (B^{-1}\vec{\omega} \times B^{-1}\vec{q}) = \vec{\Omega} \times \vec{Q}. \quad \rightarrow$$

» *Beweis der Darstellung (\*\*).* Es gilt  $\dot{B}\vec{Q} = \dot{B}B^{-1}\vec{q}$ .  $B$  ist eine Rotation, d.h.

$$BB^T = B^T B = \mathbb{1} \Leftrightarrow B^T = B^{-1}.$$

Die Ableitung der Identität verschwindet, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(BB^{-1}) &= \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0, \\ \Leftrightarrow \dot{B}B^T + (\dot{B}B^{-1})^T &= 0, \end{aligned}$$

und daher ist  $\dot{B}B^T$  eine schiefe (antisymmetrische) Matrix. Sie hat die Form,

$$\begin{aligned} \dot{B}B^T &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}. \\ \dot{B}B^{-1}\vec{q} &= \begin{pmatrix} \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \\ \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3 \\ \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{q}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad \ll \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir also,

$$\dot{\vec{q}} = \vec{\omega} \times \vec{q} + B\dot{\vec{Q}}.$$

Damit können wir die kinetische Energie angeben,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left( \vec{\omega} \times \vec{q} + B\dot{\vec{Q}} \right)^2 = \frac{m}{2} \left( (B\vec{\Omega} \times B\vec{Q}) + B\dot{\vec{Q}} \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} \left( B \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} + \dot{\vec{Q}} \right) \right)^2 = \frac{m}{2} \left\langle B \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} + \dot{\vec{Q}} \right), B \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} + \dot{\vec{Q}} \right) \right\rangle \\ &= \frac{m}{2} \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} + \dot{\vec{Q}} \right)^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{Q}}^2 + m\dot{\vec{Q}} \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} \right) + \frac{m}{2} \left( \vec{\Omega} \times \vec{Q} \right)^2. \end{aligned}$$

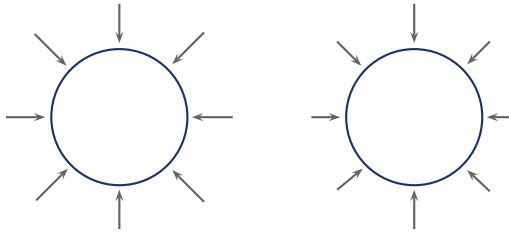
Einsetzen in die Lagrangefunktion ergibt,

$$L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{Q}}^2 + m\dot{\vec{Q}} (\vec{\Omega} \times \vec{Q}) + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{Q})^2 - V,$$

die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern,

$$m\ddot{\vec{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{Q}} + \underbrace{m\vec{\Omega} \times (\vec{Q} \times \vec{\Omega})}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2m\dot{\vec{Q}} \times \vec{\Omega}}_{\text{Corioliskraft}} + m\vec{Q} \times \dot{\vec{\Omega}}.$$

**BSP 1** Die durch die Erddrehung “wirkende” Zentrifugalkraft ändert das Gravitationsfeld der Erde.



39 Wirkung der Zentrifugalkraft auf die Erdanziehung (Übertrieben dargestellt)

Der Einfluss ist jedoch sehr klein. Die Verzerrung, die entsteht, da die Erde keine perfekte Kugel ist und eine inhomogene Dichteverteilung hat, ist viel größer. ■

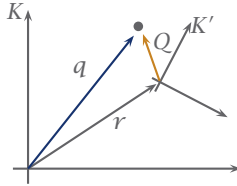
**BSP 2** Das Foucault'sche Pendel ist ein Nachweis für die Corioliskraft. ■

## 6.2 Starre Körper

Ein starrer Körper ist eine Idealisierung eines festen Körpers, wobei alle Abstände zwischen den Teilchen fixiert sind,

$$|\vec{q}_i - \vec{q}_j| = q_{ij} = \text{const.}$$

Dies ist ein Spezialfall einer holonomen Zwangsbedingung.



40 Laborsystem und körperfestes System.

*Bemerkung.* Die Bewegung des starren Körpers ist ausgezeichnet durch die Lage des Körpers (Rotation um einen Punkt) und die Bewegung dieses Punktes. Die Konfigurationsmannigfaltigkeit des Körpers ist

$$\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3),$$

eine 6-dimensionale Hyperfläche.

Wir führen daher zwei Koordinatensysteme ein. Das Laborsystem  $(K, \vec{q})$  und das körperfeste System  $(K', \vec{Q})$  im Ursprung  $\vec{r}(t)$ .  $\rightarrow$

■ **Erhaltungsgrößen**

Für einen freien starren Körper bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig. Die Bewegung des freien Körpers um den Schwerpunkt hat den Drehimpuls und die Energie als Erhaltungsgröße.

	Laborsystem	Körperfestsystem	
Position des Teilchens $i$	$\vec{q}_i$	$\vec{Q}_i$	$\vec{q}_i = B\vec{Q}_i + \vec{r}$
Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$	$\vec{\Omega}$	$\vec{\omega} = B\vec{\Omega}$
Drehimpuls	$\vec{m}$	$\vec{M}$	$\vec{m} = B\vec{M}$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch,

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{q}_i - \vec{r}) + \dot{\vec{r}}.$$

» *Beweis der Geschwindigkeitsdarstellung.*  $\vec{v}_i = \dot{B}\vec{Q}_i + \dot{\vec{r}} + B\dot{\vec{Q}}_i$ . Im starren Körper sind jedoch alle Teilchen fixiert, d.h.  $B\dot{\vec{Q}}_i = 0$ . «

Einsetzen in die kinetische Energie ergibt,

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{q}_i - \vec{r})) + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{q}_i - \vec{r})]^2.$$

Betrachten wir die 2-Fälle,

(i) Bewegung im Schwerpunkt, dann ist  $\sum_i m_i (\vec{q}_i - \vec{r}) = 0$ ,

(ii) Bewegung mit  $\vec{r}$  fixiert, dann ist  $\dot{\vec{r}} = 0$ .

Somit lässt sich die kinetische Energie schreiben als,

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2}_{\text{Schwerpunktsenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{Q}_i)^2}_{\text{Rotationsenergie}}.$$

Die Rotationsenergie lässt sich schreiben als,

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \dot{\vec{\Omega}}^2 \vec{Q}_i^2 - (\dot{\vec{\Omega}} \vec{Q}_i)^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j \Omega_k \underbrace{\sum_i m_i \left[ \vec{Q}_i^2 \delta^{jk} - Q_i^k Q_i^j \right]}_{=I^{jk}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Omega_i \Omega_k I^{jk} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Omega}} I \dot{\vec{\Omega}}. \end{aligned}$$

Die Elemente des Trägheitstensors  $I$  haben die Form,

$$I^{jk} = \sum_i m_i \left[ \delta^{jk} Q_i^2 - Q_i^j Q_i^k \right] = \int d\vec{r} \, {}^3\rho(\vec{r}) \left[ \vec{r}^2 - r^j r^k \right],$$

wobei  $\rho(\vec{r})$  die Massendichte des starren Körper bezeichnet,

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{Q}_i).$$

*Bemerkung.* Die totale Masse ist gegeben durch,

$$M = \int d\vec{r} \, {}^3\rho(\vec{r}),$$

der Schwerpunkt durch,

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int d\vec{r} \, {}^3\rho(\vec{r}) \vec{r}. \quad \rightarrow$$

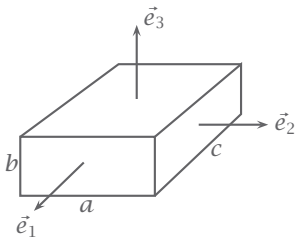


Der Trägheitstensor ist symmetrisch,  $I^{jk} = I^{kj}$ , und positiv. Er kann durch geeignete Wahl des Körperfesten Systems auf Diagonalgestalt gebracht werden,

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

$I_1, I_2, I_3$  heißen **Hauptträgheitsmomente**, die zugehörigen Basisvektoren  $\vec{e}_k$  **Hauptträgheitsachsen**. Die Rotationsenergie nimmt dann folgende Form an

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i^2.$$



**Bemerkungen.** 1.)  $I_1 + I_2 \geq I_3$ , für alle Permutationen.

» Verwende dazu die Definition des Trägheitsmoments,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int d\mathbf{r}^3 \rho(\vec{r}) [2\vec{r}^2 - r_1^2 - r_2^2] = \int d\mathbf{r}^3 \rho(\vec{r}) \left[ r_1^2 + r_2^2 + \underbrace{2r_3^2}_{\geq 0} \right] \\ &\geq \int d\mathbf{r}^3 \rho(\vec{r}) [r_1^2 + r_2^2] = I_3. \quad \ll \quad \circ \end{aligned}$$

2.)  $I_1 = I_2 = I_3$ , Kugelkreisel,

$I_1 = I_2 \neq I_3$ , symmetrischer Kreisel,

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , unsymmetrischer Kreisel.

**BSP 3** Homogener Quader,

$$I_1 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2),$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad \blacksquare$$

**BSP 4** Homogene Kugel

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad \blacksquare$$

**BSP 5** Homogener Zylinder (Vollzylinder der Länge  $l$ )

$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2,$$
$$I_2 = I_3 = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2. \quad \blacksquare$$

**Satz von Steiner** Es sei  $I^{jk}$  der Trägheitstensor relativ zum Schwerpunkt. So gilt für den Trägheitstensor  $\tilde{I}^{jk}$  bezügl eines um  $\vec{a}$  verschobenen Punkts

$$\tilde{I}^{jk} = I^{jk} + M [\delta^{jk} a^2 - a^j a^k]. \quad \times$$

» Der Beweis ist eine leichte Übung. «

**■ Drehimpuls**

Der Drehimpuls bezüglich eines körperfesten Punktes  $O$  ist gegeben durch,

$$\vec{m} = \sum_i \vec{q}_i \times \vec{v}_i m_i.$$

$O$  ist fixiert im Laborsystem. Setzen wir  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{q}_i$ , so erhalten wir

$$\vec{m} = \sum_i m_i \vec{q}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{q}_i).$$

Im bewegten System ist

$$\vec{M} = B^{-1} \vec{m} = \sum_i m_i \vec{Q}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}_i) = \sum_i m_i \left[ \vec{\Omega} (\vec{Q}_i)^2 - \vec{Q}_i (\vec{\Omega} \vec{Q}_i) \right] = I \vec{\Omega}, \quad (*)$$

denn

$$M^j = \sum_i \sum_k \left[ \delta^{jk} (\vec{Q}_i)^2 - Q_i^j Q_i^k \right] m_i \Omega_k = \sum_k I^{jk} \Omega_k.$$

Bemerkungen. 1.)  $T_R = \frac{1}{2} \vec{M} \vec{\Omega}$ .

2.) Der Drehimpuls  $\vec{M}$  ist im Allgemeinen nicht parallel zur Drehachse  $\vec{\Omega}$ .

3.) Für ein freies System ist der Drehimpuls im Laborsystem erhalten  $\vec{m} = \text{const}$ . Der Drehimpuls im rotierenden System ist aber nicht zwangsläufig erhalten  $\vec{M} \neq \text{const}$ .  $\rightarrow$

Falls ein Körper nur rotiert, so ist es optimal den Ursprung des bewegten Koordinatensystems in den Schwerpunkt zu setzen.

$$\begin{aligned}\vec{q}_i &= B \vec{Q}_i + \vec{r}_s, \\ \vec{v}_i &= B (\vec{\Omega} \times \vec{Q}_i) + \dot{\vec{r}}_s, \\ \vec{J} &= \sum_i m_i (\vec{Q}_i + \vec{R}_s) \times [\vec{\Omega} \times \vec{Q}_i + \dot{\vec{r}}_s].\end{aligned}$$

Da wir uns im Schwerpunkt befinden, verschwinden die Kreuzterme und es gilt,

$$\vec{J} = \underbrace{M_{\text{tot}} \vec{R}_s \times \dot{\vec{r}}_s}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\vec{I} \vec{\Omega}}_{\vec{M}}.$$

$\vec{M}$  ist der innere Drehimpuls (Spin). Der totale Drehimpuls im Laborsystem ist nun

$$\vec{j} = B \vec{J} = \underbrace{M_{\text{tot}} \dot{\vec{r}}_s \times \vec{v}_s}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\vec{m}}_{\text{Spin}}.$$

$J$  bzw.  $j$  lässt sich daher aufteilen in die äußere Bewegung (z.B. Kreisbahn) und die innere Bewegung (Eigendrehimpuls).

Unter Einfluss einer äußeren Kraft ändert sich der Drehimpuls eines Körpers mit seinem Drehmoment (fixiere Punkt  $O$  des Körpers),

$$\frac{d}{dt} \vec{m} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i = \sum_i m_i \vec{q}_i \times \ddot{\vec{q}}_i = \sum_i \vec{q}_i \times \vec{F}_i = \vec{n}.$$

$\vec{n}$  ist das reaktive Drehmoment zum Körperfesten Punkt  $O$ .

Für das mitrotierende System bedeutet dies,

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = \frac{d}{dt} B^{-1} \vec{m} = B^{-1} \vec{n} + \dot{B}^{-1} B \vec{M} = \vec{N} + \vec{M} \times \vec{\Omega}.$$

Dies lässt sich in der **Euler-Gleichung** zusammenfassen

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \vec{N} + \vec{M} \times \vec{\Omega},$$

d.h. auch in Abwesenheit äußerer Kräfte  $\vec{N} = 0$  ist der Drehimpuls im rotierenden System nicht erhalten.

Die Lösung des freien Kreisels lässt sich einfach geometrisch interpretieren. Wir haben zwei Erhaltungsgrößen

$$E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = \text{const.}$$
$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const.}$$

Die Schnittmenge beschreibt Kurven auf einem Ellipsoiden.

- 6 stationäre Lösungen entlang der Hauptachsen.
- 4 stabile Lösungen entlang  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_3$  ( $I_1 < I_2 < I_3$ ).
- 2 instabile Lösungen entlang der mittleren Hauptachse.

## 6.3 Lagrange's top

Wir betrachten nun den symmetrischen Kreisel im Schwerepotential.

In diesem System sind zwei Größen erhalten:

- Die Energie  $E = T + V$ .
- Der Drehimpuls  $m_z$  entlang der  $z$ -Achse.

Für einen symmetrischen Kreisel ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) ist das Problem analytisch lösbar. Wähle dazu geeignete Koordinaten  $\varphi, \psi, \vartheta$ .

Das Laborsystem sei  $K$  mit  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , das körperfeste System sei  $K'$  mit  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  entlang der Trägheitsachsen des Kreisels. Es gilt

$$\vec{e}_N = \vec{e}_z \times \vec{e}_3.$$

Um  $K$  in  $K'$  zu transformieren verwenden wir die 3 Transformationen,

$$\varphi : \text{Rotation um } \vec{e}_z : \vec{e}_x \mapsto \vec{e}_N$$

$$\vartheta : \text{Rotation um } \vec{e}_N : \vec{e}_z \mapsto \vec{e}_3$$

$$\psi : \text{Rotation um } \vec{e}_3 : \vec{e}_N \mapsto \vec{e}_1$$

Weiter gilt,

$$\vec{e}_N = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_z = \cos \varphi \vec{e}_3 + \cos \psi \sin \vartheta \vec{e}_2 + \sin \psi \sin \vartheta \vec{e}_1$$

Wir haben jetzt ein geeignetes Koordinatensystem. Der nächste Schritt ist die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten aufzustellen.

Potentielle Energie,

$$U = mgl \cos \vartheta,$$

wobei  $l$  die Position des Schwerpunkts bezeichnet.

Um die Kinetische Energie zu bestimmen, verwenden wir den Hilfsvektor

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \dot{\vartheta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3 + \dot{\varphi} \vec{e}_z = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1 \left( \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \right) + \vec{e}_2 \left( -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \right) + \vec{e}_3 \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right) \end{aligned}$$

Für  $K'$  folgt somit:

$$\Omega_1 = \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta,$$

$$\Omega_2 = -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta,$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta.$$

Einsetzen in die kinetische Energie ergibt,

$$T = \frac{1}{2} \left( I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 \right) = \frac{I_1}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right)^2.$$

Die Lagrangefunktion ist nun gegeben durch,

$$\begin{aligned} L &= L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = T - U \\ &= \frac{I_1}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right)^2 - mgl \cos \vartheta \end{aligned}$$

Der Aufwand der durch die Einführung von Eulerkoordinaten entstand zahlt sich nun dadurch aus, dass in der Lagrangefunktion zwei zyklische Koordinaten auftreten, nämlich  $\varphi$  und  $\psi$ .

Die Erhaltungsgrößen erhalten wir durch Differenzieren,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{\varphi} (I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta) + \dot{\psi} I_3 \cos \vartheta = M_z = \text{const}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \dot{\varphi} I_3 \cos \vartheta + \dot{\psi} I_3 = M_3 = \text{const} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} &= \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} \\ \dot{\psi} &= \frac{M_3}{I_3} - \cos \vartheta \frac{M_z - M_3 \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}\end{aligned}$$

Dies können wir nun verwenden um die  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  Abhängigkeit des Lagranges zu eliminieren.

Verbleibende Gleichung für die Inklination  $\vartheta$  folgt aus der Energieerhaltung

$$E - \underbrace{\frac{M_3^2}{2I_3}}_{E'} = \frac{I_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \underbrace{\frac{(M_z - M_3 \cos \vartheta)^2}{2I \sin^2 \vartheta}}_{U_{\text{eff}}(\vartheta)} + mgl \cos \vartheta.$$

Somit haben wir nur noch ein 1-dimensionales Problem. Ein solches ist formal exakt lösbar.

## ■ Qualitative Diskussion

Wir sind jetzt nicht daran interessiert das Problem exakt zu lösen, da dies sehr aufwändig ist und nicht viel zum Verständnis beiträgt. Jedoch wollen wir das System qualitativ betrachten.

Einführen einer neuen Koordinaten

$$u = \cos \vartheta, \quad -1 \leq u \leq 1,$$

und den Abkürzungen

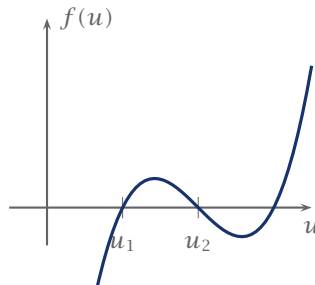
$$a \equiv \frac{M_2}{I_1}, \quad b \equiv \frac{M_3}{I_1}, \quad \alpha \equiv \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta \equiv \frac{2mgl}{I_1} \geq 0.$$

Wir erhalten somit für

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2$$

ein Polynom 3. Grades in  $u$ .

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$



#### 41 Phasendiagramm für $u$ .

Die Bewegung findet zwischen  $u_1$  und  $u_2$  statt. D.h. die Inklination  $\vartheta$  oszilliert zwischen den Winkeln  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  periodisch. Diese Bewegung wird **Nutation** genannt.

Der azimutale Winkel  $\varphi$  folgt aus

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

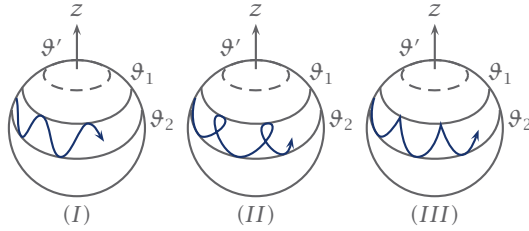
Folgende 3 Fälle sind möglich

Falls  $a = bu$  außerhalb von  $(u_1, u_2)$  liegt, steigt  $\varphi$  monoton an (Fall I).

Falls  $u = \frac{a}{b}$  im Intervall  $(u_1, u_2)$ , so hat  $\dot{\varphi}$  einen Vorzeichenwechsel,  $\varphi$  bewegt sich vor und zurück (Fall II).

Fall III folgt, wenn wir den Kreisel mit  $\dot{\varphi} = 0$  fallen lassen.

Die azimutale Bewegung wird **Präzession** genannt.



■ **Vorstellung der  $SO(3)$**

Die  $SU(2)$ , die **spezielle unitäre Gruppe**, das sind die unitären  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1, ist eine Kugel im 4-dimensionalen Raum mit Radius 1. Identifizieren wir jeweils zwei Punkte der  $SU(2)$ , so erhalten wir die  $SO(3)$ .

Kehren wir nun zum Kreis zurück. Durch die Einführung der Eulerwinkel wird jede Rotation im  $\mathbb{R}^3$  durch drei Rotationen um die jeweiligen Achsen darstellbar.

$$T = \Omega_1^2 I_1 + \Omega_2^2 I_2 + \Omega_3^2 I_3,$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\vartheta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3 + \dot{\varphi} \vec{e}_2.$$

Für  $I_1 = I_2$  ist das Problem exakt lösbar,

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{I_3}{2} (\psi + \varphi \cos \vartheta)^2,$$

$$V = mgl \cos \vartheta.$$

$\varphi$  und  $\psi$  sind zyklische Koordinaten. Wir haben daher 2 Erhaltungsgrößen.

Unter Einfluss von äußeren Kräften ändert sich der Drehimpuls eines Körpers mit seinem Drehmoment.

$$\frac{d}{dt} \vec{m} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{q}}_i \times \vec{q}_i + \vec{q}_i \times \ddot{\vec{q}}_i$$

$$= \sum_i \vec{q}_i \times m \ddot{\vec{q}}_i = \sum_i \vec{q}_i \times \vec{F}_i \equiv \vec{n},$$

wobei wir  $\vec{n}$  als **Drehmoment** bezeichnen.

**BSP 6** Kreselkräfte beim Fahrradfahren. Um eine Rechtskurve zu fahren, drückt man den Lenker rechts nach vorne, wodurch das Rad nach rechts ausweicht. ■



Für das mitrotierende System ergibt sich daher,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{M} &= \frac{d}{dt}(B^{-1}\vec{m}) = \left(\frac{d}{dt}B^{-1}\right)\vec{m} + B^{-1}\frac{d}{dt}\vec{m} = \left(\frac{d}{dt}B^{-1}\right)B\vec{M} + B^{-1}\vec{n} \\ &= \vec{M} \times \vec{\Omega} + \vec{N},\end{aligned}$$

d.h. auch ohne äußere Kräfte ist der Drehimpuls des rotierenden Systems im Allgemeinen nicht erhalten. Eine Ausnahme bilden Rotationen um die Hauptträgheitsachsen.

Die Lösung des freien Kreisels lässt sich einfach geometrisch interpretieren. Wir haben zwei Erhaltungsgrößen,

$$E = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \underbrace{I\vec{\Omega}}_{\vec{M}} = \frac{1}{2}\vec{M}I^{-1}\vec{M} = \frac{M_1^2}{I_1} + M_2^2I_2 + M_3^2I_3 = \text{const},$$

dies beschreibt uns einen Ellipsoid,

$$\vec{M}^2 = (B^{-1}\vec{m}) \cdot (B^{-1}\vec{m}) = \underbrace{B^{-1}B^{-1}}_{\mathbb{1}}(\vec{m} \cdot \vec{m}) = \vec{m}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const},$$

dies beschreibt eine Kugel. Die Schnittmenge dieses Ellipsoids mit der Kugel schränkt die Bewegung von  $\vec{M}$  auf Linien ein. Rotationen um  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_3$  sind stabile Lösungen. Insgesamt gibt es 6 stationäre Lösungen. Davon sind 4 stabil und 2 instabil.

# 7 Hamilton'sche Dynamik

Ein Teilchen im Potential ist beschrieben durch,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q).$$

Hierbei sind  $q$  und  $\dot{q}$  nicht unabhängig von einander. Die Euler-Lagrange-Gleichungen, die eine Beziehung zwischen ihnen herstellen, sind Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Wir wollen nun zu neuen Koordinaten  $q, p$  übergehen, so dass wir eine Differentialgleichung 1. Ordnung erhalten.

Der Hamilton'sche Impuls  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  erfüllt die Relationen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}.\end{aligned}$$

Wir wollen diese Relationen durch eine neue Funktion  $H$  beschreiben,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}.\end{aligned}$$

Diese Funktion heißt **Hamiltonfunktion** und ist gegeben durch,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q},\end{aligned}$$

heißen **Hamilton'sche Bewegungsgleichungen**,  $(q, p)$  sind harmonische Variablen.

## 7.1 Legendre Transformation

Wir betrachten die Funktion  $f(x)$  mit Variable  $x$  und definieren uns eine neue Funktion  $g(y)$ , die **Legendre Transformierte** von  $f(x)$ , mit der neuen Variablen  $y$  mittels,

$$y := \frac{df}{dx},$$
$$g(y) := [xy - f(x)](y).$$

Um die "alte" Variable  $x$  durch einen von  $y$  abhängigen Ausdruck ersetzen zu können, muss die Gleichung  $y = \frac{df}{dx}$  nach  $x$  aufgelöst werden  $x(y)$ . Dies ist nur dann eindeutig, falls  $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$  für alle  $x$ .

**BSP 1** Sei  $f(x) = x^2$ , dann ist  $y = \frac{df}{dx} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$ . Die Legendre-Transformierte  $g(y) = xy - f(x)$  ist gegeben durch,

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - x^2 = \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4}. \quad \blacksquare$$

*Geometrische Deutung.* Die Legendre-Transformation beschreibt eine Funktion  $f$  in eindeutiger Weise, indem sie jeder Steigung  $y = \frac{df}{dx}$  den  $y$ -Achsen-Abschnitt der dort anliegenden Tangente zuordnet. Die Funktion  $f$  wird somit vollständig durch ihre Einhüllenden charakterisiert.  $\rightarrow$

**Theorem** Die Legendre-Transformation von  $g(y)$  ergibt wieder die Funktion  $f(x)$ , falls  $g(y)$  die Legendre-Transformation von  $f(x)$  ist.  $\times$

» Betrachte dazu,

$$z = \frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy} [xy - f(x)](y) = x \frac{d}{dy} y + y \frac{d}{dy} x - \frac{d}{dy} f(x)$$
$$= x + y \frac{d}{dy} x - \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dy} = x + \frac{df}{dx} \frac{dx}{dy} - \frac{df}{dx} \frac{dx}{dy}.$$

Die Legendre-Transformation von  $g(y)$  ist

$$h(z) = zy - g(y) = zy - [xy - f(x)](y) = xy - [xy - f(x)] = f(x). \quad \leftarrow$$

## 7.2 Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichung

Wir erhalten die Hamiltonfunktion indem wir eine Legendre-Transformation auf die Lagrangefunktion anwenden,

$$L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t).$$

Dabei sei  $q^\alpha$  fest und unsere neue Variable der kanonischer Impuls,

$$p^\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

Die Legendre-Transformation hat dann die Form,

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \left[ \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \right]_{q^\alpha, p_\alpha, t}.$$

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, betrachte das Differential,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_\alpha \left[ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt \stackrel{!}{=} d \left[ \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \right] \\ &= \sum_\alpha \left[ \dot{q}^\alpha dp_\alpha + p_\alpha d\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Somit folgt für die Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \dot{q}^\alpha, \\ \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} &= -\dot{p}_\alpha. \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zur Lagrangefunktion und den Euler-Lagrange-Gleichungen.

*Alternative Herleitung.* Obwohl das totale Differential  $dH$  sehr elegant auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen führt, wollen wir noch eine alternative Herleitung betrachten.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[ \sum_\beta \dot{q}^\beta p_\beta - L \right] = \dot{q}^\alpha + \sum_\beta p_\beta \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial p_\alpha} \\ &= \dot{q}^\alpha + \sum_\beta \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial p_\alpha} \left[ p_\beta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \right] = \dot{q}^\alpha. \end{aligned}$$

Die Rechnung für  $\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$  funktioniert analog.  $\rightarrow$

**BSP 2** Sei  $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$ . Wir wollen die Hamiltonfunktion nun mit Hilfe der Legendretransformation berechnen,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

$$H(q, p) = \dot{q}p - L = p \left( \frac{p}{m} \right) - \frac{m}{2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten also,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}. \quad \blacksquare$$

**BSP 3** Wir betrachten die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten,

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Die Impulse haben nun die Form,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

Die Hamiltonfunktion ist daher

$$\begin{aligned} H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) &= p_\varphi \dot{\varphi} + p_r \dot{r} - L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_r^2}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{p_r}{m} \right)^2 - \frac{m}{2} r^2 \left( \frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + V(r). \end{aligned}$$

$\varphi$  ist zyklisch, d.h.  $p_\varphi$  ist erhalten. Im Lagrange müssten wir noch  $\dot{\varphi}$  durch  $p_\varphi$  ausdrücken, in der Hamiltonfunktion ist dies nicht mehr notwendig.  $\blacksquare$

**BSP 4** Teilchen im äußeren EM-Feld.

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \left( \phi(\vec{x}) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A} \right)$$

$$\vec{p}_x = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

Die Hamiltonfunktion hat nun die Form,

$$\begin{aligned}
 H(\vec{x}, \vec{p}_x) &= \vec{p}\dot{\vec{x}} - L = \frac{\vec{p}}{m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right) - \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right)^2 \\
 &\quad + e\phi(x) - \frac{e}{cm} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right) \vec{A}(x) \\
 &= \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right) \left[ \frac{\vec{p}}{m} - \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right) - \frac{e}{cm}\vec{A}(x) \right] \\
 &\quad + e\phi(x) \\
 &= \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right) \left[ \frac{\vec{p}}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{A}(x) \right] + e\phi(x) \\
 &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(x) \right)^2 + e\phi(x). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Falls das Problem mit verallgemeinerten Koordinaten zeitunabhängig ist, so gilt,

$$L = T - V \Rightarrow H = T + V$$

und der Wert von  $H$  ist die Energie, denn

$$H = \underbrace{\sum_{\alpha} \dot{p}^{\alpha} p_{\alpha}}_{2T} - \underbrace{L}_{T-V} = T + V.$$

Die allgemeine Form der kinetischen Energie ist,

$$T = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}. \quad \circ$$

## 7.3 Poisson-Klammern

Wir betrachten eine Messgröße  $F(q, p, t)$  und berechnen ihre Zeitableitung.

**BSP 5**  $L_z = x p_y - y p_x$ , Drehimpuls in  $z$ -Richtung.  $\blacksquare$

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha}} \frac{dq^{\alpha}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{dp_{\alpha}}{dt} \right] = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \right] \\
 &\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die **Poissonklammer** eingeführt, die definiert ist als

$$\{A, B\} := \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial A}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial q^{\alpha}} \right].$$

*Bemerkungen.* 1.) Falls  $F$  nicht explizit von der Zeit abhängig ist, d.h.  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ , ist  $F(q, p)$  genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn  $\{F, H\} = 0$ .

2.) Falls  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängig ist, ist  $H$  erhalten,

$$\{H, H\} = \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \right] = 0.$$

*Spezialfälle.* Sei  $F(q^{\alpha}, p^{\alpha}) = q^{\alpha}$  oder  $p_{\alpha}$ , so ist  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  und,

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\alpha} = \{q^{\alpha}, H\} &= \sum_{\beta} \left[ \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial H}{\partial p_{\beta}} - \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial H}{\partial q^{\beta}} \right] = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \\ \dot{p}_{\alpha} = \{p_{\alpha}, H\} &= \sum_{\beta} \left[ \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial H}{\partial p_{\beta}} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial H}{\partial q^{\beta}} \right] = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}}. \end{aligned}$$

**Eigenschaften** Die Poisson-Klammer ist ein bilinearer Differentialoperator mit den Eigenschaften,

(i)  $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$ , (Linearität),

(ii)  $\{A, B\} = -\{B, A\} \Rightarrow \{A, A\} = 0$ , (Antisymmetrie),

(iii)  $\{A, c\} = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,

(iv)  $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$ , (Jacobi Identität).  $\times$

*Bemerkung.*  $\{q^{\alpha}, p_{\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}$ .

$$\gg \sum_{\gamma} \underbrace{\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\gamma}}}_{\delta_{\alpha\gamma}} \underbrace{\frac{\partial p_{\beta}}{\partial p_{\gamma}}}_{\delta_{\beta\gamma}} - \underbrace{\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial p_{\gamma}}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_{\beta}}{\partial q^{\gamma}}}_{0} \ll \quad \rightarrow$$





## 7.4 Extremalprinzip

Analog zum Lagrange existiert ein Extremalprinzip zu dem die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind.

Für die Lagrangefunktion impliziert eine Variation von  $q(t)$  auch eine Variation von  $\dot{q}(t)$ . Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind das Extremal der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Für die Hamiltonfunktion sind nun  $q(t)$  und  $p(t)$  voneinander unabhängige Größen. Übertragen wir die Wirkung für die Lagrangefunktion auf den Hamilton, ergibt sich,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H(q^{\alpha}, p_{\alpha}, t)}_{L'}$$

wobei  $L'$  hier für den Zahlenwert der Lagrangefunktion zum Zeitpunkt  $t$  steht.

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen auf die unabhängigen Größen  $q^{\alpha}$  und  $p^{\beta}$  ergibt,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial L'}{\partial q^{\alpha}} = 0,$$

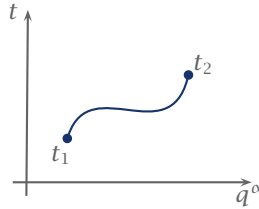
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{p}^{\alpha}} - \frac{\partial L'}{\partial p^{\alpha}} = 0.$$

Einsetzen des Ausdrucks für  $L'$  führt wieder auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^{\alpha}} &= p_{\alpha} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} p_{\alpha} &= \dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial q^{\alpha}} = - \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{p}^{\alpha}} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\partial L'}{\partial p^{\alpha}} = \dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p^{\alpha}} \Rightarrow \dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p^{\alpha}}. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Wirkung entlang einer physikalischen Bahn mit  $H = E$  ist gegeben durch,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H \right] = \sum_{\alpha} \int_y p_{\alpha} dq^{\alpha} - E(t_2 - t_1). \quad \rightarrow$$



43 Wirkung entlang einer Trajektorie

## 7.5 Kanonische Transformationen

Wir wollen nun untersuchen, welche Transformationen die Hamiltonfunktion invariant lassen. Für die Newtonschen Gleichungen waren das lediglich die Galilei-Transformationen. Der Lagrangeformalismus hingegen ist invariant unter beliebigen Transformationen, d.h.

$$Q^{\alpha} = f(q^{\beta}, t)$$

$$\dot{Q}^{\alpha} = \frac{d}{dt} f(q^{\beta}, t)$$

für jede Transformation  $f$  im Konfigurationsraum. Beispielsweise ließen sich durch das Einführen von Kugelkoordinaten zahlreiche Probleme leicht auflösen bzw. reduzieren.

Im Hamiltonformalismus sind  $q^{\alpha}$  und  $p^{\alpha}$  von einander unabhängig, d.h. Transformationen können  $p^{\alpha}$  ändern während sie  $q^{\alpha}$  invariant lassen und umgekehrt.

Die Klasse von Transformationen im Phasenraum ( $(q, p)$ -Raum), die die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant lassen heißen **kanonische Transformationen**.

Wir wollen uns zunächst auf die wichtigste Untergruppe dieser Transformationen

$$(q^\alpha, p^\alpha) \mapsto (Q^\alpha, P^\alpha)$$

beschränken, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (i) zeitunabhängig,
- (ii) kontinuierlich in einem Parameter  $s$ .

Wir betrachten eine Messgröße  $F$ , die nicht explizit von der Zeit abhängt, entlang einer Bewegungskurve. Aufgrund der Zeitunabhängigkeit der Transformation ist  $\frac{dF}{dt}$  invariant,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{q,p} = \{F, H\}_{Q,P},$$

d.h. die Poissonklammer in neuen und alten Koordinaten ist identisch. Da dies für alle Hamiltonfunktionen gelten muss, folgt allgemein

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{q,p} &= \{A, B\}_{Q,P}, \\ \sum_{\alpha} \frac{\partial A}{\partial q^\alpha} \frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \frac{\partial B}{\partial q^\alpha} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial A}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial B}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial P_\alpha} \frac{\partial B}{\partial Q^\alpha}, \end{aligned}$$

bzw. in symplektischer Schreibweise,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial B}{\partial \bar{x}_j} = \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \bar{y}_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial B}{\partial \bar{y}_j},$$

wobei

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} q^1 \\ p^1 \\ \vdots \\ q^f \\ p^f \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} Q^1 \\ P^1 \\ \vdots \\ Q^f \\ P^f \end{pmatrix}.$$

*Spezialfall.*  $A = P_\alpha, B = Q^\beta \Rightarrow \{P_\alpha, Q^\beta\}_{q,p} = \{P_\alpha, Q^\beta\}_{Q,P} = \delta_{\alpha\beta}$ .

**Bsp 6** Sei  $Q^\beta = \lambda q^\beta$ , so folgt  $P_\alpha = \frac{1}{\lambda} p_\alpha$ , denn  $\{Q^\alpha, P_\alpha\} = \delta_{\alpha\beta}$ . ■

Seien  $\bar{y}$  die neuen und  $\bar{x}$  die alten Koordinaten in symplektischer Notation, so ergibt sich,

$$\{\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_j\}_x = \varepsilon_{ij} = \sum_{l,m} \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial x_k} \varepsilon_{lm} \frac{\partial \mathcal{Y}_j}{\partial x_m} = \varepsilon_{ij}$$

Bezeichne  $M_{il} := \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial x_l}$  die Funktionalmatrix der kanonischen Transformation, so gilt

$$M \varepsilon M^\top = \varepsilon. \quad \rightarrow$$

**Definition** Die *Symplektische Gruppe*

$$Sp(f, \mathbb{R}) := \left\{ M \in \mathbb{R}^{2f \times 2f} : M \varepsilon M^\top = \varepsilon \right\}.$$

ist die Gruppe der  $2f \times 2f$ -Matritzen mit  $M \varepsilon M^\top = \varepsilon$ . ✕

Entwickeln wir  $\bar{y}$  in  $s$ , so ergibt sich,

$$\mathcal{Y}_i = x_i + s \cdot \mathcal{V}_i + o(s^2),$$

mit  $\bar{\mathcal{V}}_i(x) = \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial s} \Big|_{s=0}$ . Differentiation der Entwicklung nach  $x_k$  ergibt,

$$M_{ik} = \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} + s \underbrace{\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_k}}_{=: m_{ik}},$$

d.h. wir können die Funktionalmatrix  $M$  in  $s$  entwickeln,

$$M = \mathbb{1} + s m + o(s^2).$$

Einsetzen in die Bedingung für eine kanonische Transformation ergibt,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= M \varepsilon M^\top = (\mathbb{1} + s m + o(s^2)) \varepsilon (\mathbb{1} + s m + o(s^2)) \\ &= \varepsilon + s [m \varepsilon + \varepsilon m^\top] + o(s^2) \\ &\Rightarrow m \varepsilon + \varepsilon m^\top = 0 \end{aligned}$$

Multiplikation von rechts und links mit  $\varepsilon$  unter Verwendung von  $\varepsilon^2 = \mathbb{1}$  und  $\varepsilon^\top = -\varepsilon$  ergibt,

$$\varepsilon m \varepsilon^2 + \varepsilon^2 m^\top \varepsilon = 0 \Leftrightarrow \varepsilon m - m^\top e^\top = 0 \Leftrightarrow \varepsilon m - (\varepsilon m)^\top = 0. \quad (*)$$

Setze nun

$$\sum_j e_{ij} m_{jk} = \sum_j e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left( \sum_j \varepsilon_{ij} v_j \right)}_{=: g_i},$$

so nimmt (\*) die Form an,

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0.$$

In drei Dimensionen wäre dies äquivalent damit, dass  $\text{rot } g = 0$ . Hier haben wir die höherdimensionale Verallgemeinerung. Analog zum dreidimensionalen Fall existiert daher ein Skalarfeld  $G$  so, dass

$$g_i = -\nabla_i G = -\frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

$G$  heißt **Erzeugende** Funktion für die kanonische Transformation (bzw. den kanonischen Fluss).

### ■ Zusammenfassung

- 1.)  $v_i = \left. \frac{dy_i}{ds} \right|_{s=0} = -\sum_j \varepsilon_{ij} g_j = \sum_j \varepsilon \frac{\partial G}{\partial y_j}$ .
- 2.) Zu jeder kanonischen Transformation  $g$  existiert eine erzeugende Funktion  $G$ .
- 3.) Jede Funktion  $G$  erzeugt eine kanonische Transformation.

Insbesondere erzeugt die Hamiltonfunktion eine kanonische Transformation. Diese ist die Transformation im Koordinatenraum, die zu gegebenen Anfangsbedingungen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen liefert.

**Bsp 7** Erzeugende für eine Drehung um die  $z$ -Achse. Die Drehung ist charakterisiert durch,

$$\dot{\vec{y}} = \vec{x} + s\vec{v} \times \vec{x}.$$

Dabei ist,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{ds} &= -x_2 \\ \frac{dy_2}{ds} &= x_1 \\ \frac{dy_3}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

D.h.  $G = L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$ , die  $z$ -Komponente des Drehimpulses, ist Erzeugende für die Rotation.

Analog sieht man, dass der Impuls die Erzeugende für die Translation im Raum ist. ■

### ■ Symmetrien und Erhaltungssätze

Eine kanonische Transformation  $g$  ist eine **Symmetrie**, wenn sie die Hamiltonfunktion nicht ändert,

$$0 = \frac{dH}{ds}(\bar{y}) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial s} = \sum_{i,j} \frac{\partial H}{\partial y_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial G}{\partial y_j} = \{H, G\}.$$

D.h.  $g$  ist genau dann eine Symmetrie, wenn die Poissonklammer von  $H$  und ihrer Erzeugenden  $G$  verschwindet.

Die Erzeugende einer Symmetrie ist daher stets eine Erhaltungsgröße, denn

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = 0.$$

## 7.6 Endliche kanonische Transformationen

Die Transformation lässt die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

invariant. In neuen Koordinaten,

$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q^\alpha}.$$

Falls  $H$  zeitabhängig ist, erhalten wir eine neue Hamiltonfunktion  $H'$ .

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung,

$$\delta \left( \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H \right) = 0,$$

$$\delta \left( \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}^\alpha - H' \right) = 0,$$

d.h.  $\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H$  und  $\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}^\alpha - H'$  dürfen sich lediglich um eine totale Zeitableitung unterscheiden. Dies ergibt eine neue Funktion,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - P_\alpha \dot{Q}^\alpha - (H - H'),$$

$$dF = \sum_\alpha p_\alpha dq^\alpha - P_\alpha dQ^\alpha - (H - H') dt.$$

Wir nehmen an, dass  $F(q, Q, t)$  die Form,

$$dF = \sum_\alpha p_\alpha dq^\alpha - P_\alpha dQ^\alpha - \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

hat. Dadurch ergeben sich die Bedingungen,

$$\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} = p_\alpha, \quad -\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha} = P_\alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H - H'.$$

Unter diesen Bedingungen erzeugt  $F$  eine kanonische Transformation.

**BSP 8** Betrachte den Harmonischen Oszillator mit,

$$H = \frac{p^2}{2m} + k \frac{q^2}{2}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Durch kühne Überlegung erhält man die Erzeugende,

$$F = \frac{m\omega q^2}{2} \cot(Q),$$

dann ist

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q,$$
$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q}.$$

Auflösen der Gleichung ergibt,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$
$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q.$$

Die neue Hamiltonfunktion hat die Form,

$$H' = H + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} = \frac{2Pm\omega \cos^2 Q}{2m} + \omega^2 m \frac{2P \sin^2 Q}{2}$$
$$= P\omega \cos^2 Q + P\omega \sin^2 Q = P\omega.$$

Nach der kanonischen Transformation ist  $Q$  eine zyklische Koordinate,

$$Q = \omega t + \varphi,$$
$$E = \omega P \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}. \quad \blacksquare$$

## 7.7 Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen

Wir wollen nun untersuchen, welche kanonische Transformation  $F_2$  zur Folge hat, dass

$$H'(Q^\alpha, P_\alpha) = \text{const} = 0,$$
$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} = 0$$
$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial q^\alpha} = 0.$$

Wir erhalten so eine Differentialgleichung, deren Lösung die gesuchte kanonische Transformation ist.



Die Erzeugende dieser Transformation ist die Wirkung,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L.$$

Betrachte nun zu festem Anfangspunkt  $q^\alpha$ ,  $S(q^\alpha, t)$  als Funktion des Endpunkts für *physikalische Bahnen*. Für die Ortsableitung ergibt sich,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int_{t_1}^t dt L = \int_{t_1}^t ds \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \sum_{\beta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^t ds \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right]}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Big|_{t_1}^t = p_\alpha. \end{aligned}$$

Betrachte nun  $q^\alpha$  als fixiert und differenziere nach  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t dt L = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{dS}{dt} - \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}^\alpha = -H. \end{aligned}$$

Die Wirkungsfunktion  $S(q^\alpha, t)$  erfüllt die folgenden Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \\ dS &= \sum_{\alpha} p_\alpha dq^\alpha - H dt \end{aligned}$$

Damit folgt die **Hamilton-Jacobi Differentialgleichung**,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q^\alpha, p_\alpha, t) = -H\left(q^\alpha, \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}, t\right).$$

$S(q^\alpha, t)$  ist somit durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in  $f + 1$  Variablen bestimmt. Für partielle Differentialgleichungen existieren weitreichende Lösungsverfahren und -sätze, mit denen man sich in der Quantenelektrodynamik ausführlich beschäftigt.

Die Lösung ist durch  $f + 1$  Integrationskonstanten bestimmt. Eine Integrationskonstante ist trivial,

$$S(q^\alpha, t, a^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, f.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung können wir als Erzeugende einer kanonischen Transformation mit  $p_\alpha = a^\alpha$  auffassen,

$$F_2(q^\alpha, p_\alpha) = S(q^\alpha, t, a^\alpha).$$

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}$$

$$Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial p_\alpha}$$

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

**BSP 9** Wir betrachten erneut den harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2,$$

und lösen die Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen.

Separation führt auf,

$$S(q^\alpha, t) = S_0(q^\alpha) + S_1(t).$$

Für den zeitabhängigen Teil ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0(q)}{\partial q} \right)^2 - m\omega^2 q^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial t} &= -a^1 \Rightarrow \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0(q)}{\partial q} \right)^2 + m\omega^2 q^2 = a^1 \end{aligned}$$

Für den Ortsanteil erhalten wir so,

$$\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m} \sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}$$

dies kann man integrieren,

$$S_0(q) = \int dq \sqrt{2m} \sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}.$$

Die Lösung hat daher die Form,

$$S(q, t) = \int dq \sqrt{2m} \sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2} + a^1 t.$$

Man kann hiervon eine analytische Lösung berechnen. Betrachten wir die neuen Koordinaten,

$$P_\alpha = a^1, \quad Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial a^1} = \int dq \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}} - t$$
$$\Rightarrow Q^\alpha + t = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2a^1}} \right).$$

In den neuen Koordinaten  $(Q^\alpha, P_\alpha)$  verschwindet die Hamiltonfunktion  $H' = 0$ , d.h.  $P = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$  und daher

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + Q))$$
$$p = \dots$$

D.h. in den neuen Koordinaten ist der Impuls  $P$  die Amplitude und  $Q$  die Phase des Oszillators, beide Konstanten. ■