Theo 1 - Zusammenfassung

Jan-Cornelius Molnar, Version: 29. September 2009 16:50

1 Grundprinzipien

1.1 Allgemeines

- *Die Raumzeit* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *ist* $(1+3)$*-dimensional.*
- *Eine Bewegung (auch Trajektorie, Teilchen) ist eine Abbildung*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \; t \mapsto \boldsymbol{r}(t).$$

Der Graph einer Bewegung heißt Weltlinie.

- *Geschwindigkeit und Beschleunigung sind*

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r} = \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

- *Inertialsysteme sind Systeme in denen alle Naturgesetze zu allen Zeiten gleich sind.*
- *Der Impuls eines Teilchens ist* $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$*.*
- *Der Phasenraum* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *enthält alle* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$*.*
- *Galilei-Transformationen sind die Homomorphismen zwischen Inertialsystemen und bilden die Galilei-Gruppe. Diese heißt auch Symmetriegruppe der KM.*
- *Die Arbeit einer Kraft* $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *entlang des Weges* $\boldsymbol{\gamma}$ *ist,*

$$A := \int_\gamma \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,.$$

- *Ein Kraftfeld* $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *heißt genau dann konservativ, wenn seine Arbeit entlang eines beliebigen Weges* $\boldsymbol{\gamma}$ *nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig ist. In diesem Fall existiert ein Potential* $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, so dass*

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V.$$

- *Die quadratische Form*

$$T = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

heißt kinetische Energie.

- *Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist* $H = T + V$*.*

1.2 Sätze über Inertialsysteme

Gegeben sei ein abgeschlossenes N-Teilchen System.

- *Es existiert ein Inertialsystem.*

- *Ein zu einem Inertialsystem gleichförmig und geradlinig bewegtes System ist ebenfalls ein Inertialsystem.*

Trägheitsgesetz *Die Beschleunigung eines Teilchens ist unabhängig vom Inertialsystem. Insbesondere erfährt ein freies Teilchen keine Beschleunigung.*

- *Die Masse eines Teilchens ist unabhängig vom Inertialsystem.*

Bewegungsgesetz *Eine Bewegung erfüllt die Differentialgleichung,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}_i = -\boldsymbol{F}_i, \qquad m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t). \tag{1}$$

Sie ist durch die Angabe von zwei Daten ($\boldsymbol{r}_i(t_0), \dot{\boldsymbol{r}}_i(t_0)$) eindeutig bestimmt.

Actio=Reaktio *Keine Kraft ohne Gegenkraft,*

$$\boldsymbol{F}_{A\to B} = -\boldsymbol{F}_{B\to A}, \qquad \sum_i \boldsymbol{F}_i = 0.$$

- *Das Verhältnis der Beschleunigung zweier Teilchen ist unabhängig von der Kraft,*

$$\frac{\ddot{x}_j}{\ddot{x}_i} = \frac{m_i}{m_j}.$$

1.3 Sätze über Galilei-Transformationen

- *In der (3+1)-dimensionalen Raumzeit haben die Galilei-Transformationen die Form,*

$$\begin{pmatrix} t' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ \boldsymbol{v} & \pm\boldsymbol{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3).$$

Die Galilei-Gruppe hat 10 Parameter + 2 diskrete Symmetrien.

- *Gleichung (1) ist invariant unter Galilei-Transformationen. Daraus folgen drei Eigenschaften der Raumzeit.*

Homogenität der Raumzeit *Ist $\boldsymbol{\varphi}(t)$ eine Lösung von (1), so $\boldsymbol{\varphi}(t+s) + \boldsymbol{a}$ ebenfalls, d.h. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ hängt nur von Relativabständen und nicht von der Zeit ab.*

Invarianz unter boost *Ist $\boldsymbol{\varphi}(t)$ Lösung von (1), so auch $\boldsymbol{\psi}(t)$ mit $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$, d.h. (1) hängt nur von Relativgeschwindigkeiten ab.*

Isotropie des Raumes *Ist* $\boldsymbol{\varphi}(t)$ *Lösung von (1), so auch* $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\varphi}(t)$ *mit* $\boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3)$, *d.h.* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$.

- *Wechselwirkungskräfte haben die Form,*

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} f_{ij}\left(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|\right), \text{ mit } \qquad \boldsymbol{F}_i = \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij}.$$

- *Es gibt keine fundamentalen 3-Teilchen Kräfte.*

1.4 Erhaltungssätze

Gegeben sei ein abgeschlossenes System von N-Teilchen. Bezeichne die Teilchen mit $\boldsymbol{r}_i$, ihre Impulse mit $\boldsymbol{p}_i$.

Impulserhaltung *Der totale Impuls* $\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$ *ist erhalten.*

Schwerpunktssatz *Der Schwerpunkt*

$$\boldsymbol{r}_{\text{tot}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i, \qquad M = \sum_i m_i,$$

ist erhalten und bewegt sich gleichförmig, d.h.

$$\boldsymbol{r}_{\text{tot}} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{\boldsymbol{p}_{\text{tot}}}{M} \cdot t, \qquad \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p}_{\text{tot}} \text{ erhalten.}$$

Drehimpulserhaltung *Der totale Drehimpuls* $\boldsymbol{L}_{\text{tot}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ *ist erhalten.*

Energieerhaltung *Für konservative Kraftfelder ist die Gesamtenergie erhalten.*

2 Lagrangesche Mechanik

Die Lagrangesche Mechanik beschreibt die Bewegung eines Systems mit Hilfe des Konfigurationsraums. Sie ist invariant bezüglich der Gruppe der Diffeomorphismen auf dem Konfigurationsraum auch in Koordinaten. In einem Newtonschen System mit Potential sind die Bewegungen Extremalwerte eines Variationsprinzips.

- *Eine Abbildung* $\Phi : C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *heißt Funktional.*
- Φ *heißt differenzierbar, falls*

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{h}) = \Phi(\boldsymbol{\gamma}) + \mathrm{D}\Phi(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h}^2).$$

- *Eine Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ heißt extremal zu Φ, falls $\mathrm{D}\Phi(\boldsymbol{\gamma}) = 0$.*
- *Die Lagrange Funktion ist $L = T - V$.*
- *Die Wirkung ist das Funktional,*

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Sie hat die selbe Einheit wie h bzw. $\hbar$.

- *Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0.$$

- *Es gelten die Bezeichnungen,*
  (a) q^i *verallgemeinerte Koordinaten*,
  (b) $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ *konjugierte Impulse*,
  (c) $\dfrac{\partial L}{\partial q^i}$ *verallgemeinerte Kräfte*.
- *Eine Koordinate q^i heißt zyklisch, falls $\dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0$.*
- *Die Lorentzkraft hat die Form,*

$$\boldsymbol{F}_L = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right).$$

- *Ein einparametriger Diffeomorphismus $h_s^i : q^i \mapsto \tilde{q}^i = h_s^i(q^i)$ heißt Symmetrie des Systems, falls*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = 0.$$

2.1 Sätze Variationsrechnung

- *Das Funktional*

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma}) := \int_{t_0}^{t_1} \phi(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar mit

$$\mathrm{D}\Phi\boldsymbol{h} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} \right] \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}t + \left(\boldsymbol{h}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

- *Damit eine Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ extremal zum Funktional der Wirkung $S(\boldsymbol{\gamma})$ ist, ist es notwendig und hinreichend, dass sie die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt. Diese Eigenschaft ist vom Koordinatensystem unabhängig.*

Hamiltons Prinzip der kleinsten Wirkung *Die Bewegungen eines Newtonschen Systems (1) stimmen mit den Extremalen der Wirkung überein.*

- *Ist $L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$, so haben L und L' dieselben Extremale.*
- *Ist q^i zyklisch, so ist p_i erhalten.*

Noether Theorem *Zu jeder Symmetrie h_s^i gibt es eine Erhaltungsgröße,*

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\mathrm{d}h_s^j(q^j)}{\mathrm{d}s} \Big|_{s=0}.$$

2.2 Sätze zur Lorentzkraft

- *$\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld lassen sich über Potentiale definieren,*

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

- *Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichungen haben die Form,*

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\left[\phi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right],$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_L = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right).$$

3 Zweikörperproblem

Das zwei Körperproblem beschreibt die Bewegung zweier Massen in einem rotationssymmetrischen Potential.

- *Die reduzierte Masse ist* $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.
- *Das allgemeine Gravitationspotential hat die Form,*

$$V(r) = -\frac{k}{r},$$

wobei $k = G m_1 m_2$ *bzw.* $k = q_1 q_2$.

- *Der Laplace-Runge-Lenz Vektor ist*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \mu k \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

- *Der Abstand von Einfallachse und Streuzentrum heißt Stoßparameter* b.
- *Der Streuwinkel sei* ϑ.
- *Der differentielle Wirkungsquerschnitt zu einem Fluss* F *ist gegeben durch*

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega}.$$

3.1 Allgemeiner Fall

Allgemeine Lösung *Der Lagrange hat im rotationssymmetrischen Potential die Form*

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - V(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|).$$

(a) *Schwerpunkts- und Relativkoordinaten, reduzierte Masse und Schwerpunktsatz,*

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(|\boldsymbol{r}|).$$

(b) *Drehimpulserhaltung* $\Rightarrow$ *Bewegung auf Ebene beschränkt.*

(c) *Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten (und* $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$*)*

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\varphi}^2 - \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\underbrace{\left[V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}_{U(r)\ \text{effektives Potential}}.$$

(d) *Energieerhaltung liefert,*

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - U(r)}, \\
\int \mathrm{d}t &= \int \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(E - U(r))}}, \\
\int \mathrm{d}\varphi &= \int \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U(r)}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

- *Es gibt nur zwei Potentiale mit geschlossenen Trajektorien kr^2 und kr^{-1}.*

3.2 Gravitationspotential

Lösung von (2)

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0),$$

wobei $p = \frac{l^2}{\mu k}$ *und* $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$.

(a) $E = E_{min}$, *Kreisbahn,*

(b) $E_{min} < E < 0$, *Ellipsenbahn,*

(c) $E = 0$, *Parabelbahn,*

(d) $E > 0$, *Hyperbelbahn.*

- *Der Laplace-Runge-Lenz Vektor* $\boldsymbol{A}$ *ist erhalten und* $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{L} \rangle = 0$.

3.3 Keplersche Gesetze

1. Keplersches Gesetz *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.*

2. Keplersches Gesetz *Eine von der Sonne zu einem Planeten gezogene Strecke überstreicht in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen* $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const.}$

3. Keplersches Gesetz *Für alle Planeten gilt* $\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{const.}$

3.4 Streuung

▪ *Geschwindigkeit und Stoßparameter des ein- und ausfallenden Teilchens stimmen überein.*

Rutherfordstreuung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{e_1 e_2}{2E}\right)^2 \frac{1}{|\sin(\vartheta/2)|^4}.$$

4 Zwangsbedingungen

▪ *Eine Zwangsbedinung heißt holonom, falls sie auf die Form*

$$f(q^1, \dots, q^N, t) = 0$$

gebracht werden kann, ansonsten nichtholonom.

▪ *Eine Zwangsbedingung heißt skleronom bzw. autonom, falls sie nicht explizit von der Zeit abhängt, sonst rheonom.*

▪ *Eine Bewegung heißt bedingte Extremale, wenn sie unter allen auf einer Mannigfaltigkeit M zugelassenen Bewegungen extremal ist.*

▪ *Zwangskräfte haben die Form,*

$$\boldsymbol{Z}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

▪ *Die Tangentailvektoren der Konfigurationsmannigfaltigkeit $TM_{\boldsymbol{x}}$ heißen virtuelle Verrückungen $\delta \boldsymbol{r}$ bzw. δq^i.*

4.1 Holonome Zwangsbedingungen

▪ *k unabhängige Nebenbedingungen erzeugen eine Konfigurationsmannigfaltigkeit der Dimension $N - k$.*

Lösungsverfahren

(a) *Einführen von verallgemeinerten Koordinaten, die $f_k(q^i, t) = 0$ erfüllen.*

(b) *Kinetische Energie und Potential in verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken.*

(c) *Lagrangefunktion aufstellen und ELG berechnen.*

Prinzip von d'Alembert *Eine Lösung von (1) erfüllt für jede virtuelle Verrückung $\delta\boldsymbol{r}$,*

$$\sum_i (m_r \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i)\, \delta\boldsymbol{r}_i = 0.$$

▪ *Damit eine Bewegung bedingte Extremale der Wirkung ist, ist es notwendig und hinreichend, dass sie die d'Alembertsche Gleichung erfüllt.*

5 SRT

Die SRT ist eine Verallgemeinerung der KM, dahin dass die absolute Gleichzeitigkeit durch eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für Informationen ersetzt wird.

- *Die Axiome der SRT*
  (a) *Es gibt Inertialsysteme in denen alle Naturgesetzte zu allen Zeiten die gleiche Form haben.*
  (b) *Die Lichtgeschwindigkeit ist eine universelle Konstante.*
- *Die Poincaré Transformationen sind affine Abbildungen*

$$\underline{\boldsymbol{x}}' = \Lambda \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{a}},$$

und bilden die Symmetriegruppe der SRT. Λ (linear) heißt Lorentztransformation.

- *Ein Vektor $\underline{\boldsymbol{x}}$ heißt abhängig von*

$$\underline{\boldsymbol{x}}_\mu \underline{\boldsymbol{x}}^\mu = \begin{cases} > 0, & \textit{zeitartig}, \\ = 0, & \textit{lichtartig}, \\ < 0, & \textit{raumartig}. \end{cases}$$

- *Zwei Ereignisse A und B finden gleichzeitig statt, wenn zwei von A und B zur gleichen Zeit ausgesandte Lichtstrahlen zur gleichen Zeit bei einem in der Mitte ruhenden Detektor eintreffen.*
- *Ein Zeitintervall im Ruhesystem heißt Eigenzeit $\tau = t_2 - t_1$. Das Differential der Eigenzeit ist*

$$\mathrm{d}\tau = 1/\gamma\, \mathrm{d}t\,.$$

- *Das Skalarprodukt in der Minkowski-Metrik ist*

$$\underline{\boldsymbol{x}}_\mu \underline{\boldsymbol{x}}^\mu = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 .$$

- *Der differentielle Minkowsi-Abstand ist*

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} = c\,\mathrm{d}\tau .$$

- *4-er Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung*

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\underline{\boldsymbol{x}} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \gamma^4 \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c^2}\begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

- *Relativistischer Impuls,*

$$\underline{\boldsymbol{p}} = m\underline{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} E/c \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}.$$

- *4-er Wellenvektor des Lichts*

$$\underline{\boldsymbol{k}}^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

5.1 Allgemeine Sätze

Seien im Folgenden A ein in K ruhender Beobachter und A' ein dazu in x-Richtung mit v gleichförmig bewegter Beobachter mit Ruhesystem K'.

- *Gleichzeitigkeit $x_A^0 = x_B^0$ und "am gleichen Ort" $\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_B$ sind relativ und beziehen sich auf das Ruhesystem des Beobachters.*

Lorentzkontraktion *Zur Längenmessung müssen Anfang und Ende gleichzeitig gemessen werden. Ein längs x-Achse in K ruhender Stab, der für A die Länge L hat, hat für A' die Länge $L' = \frac{1}{\gamma}L < L$.*

Zeitdilatation *Finden zwei Ereignisse in K mit der Zeitdifferenz τ am selben Ort statt, so liegt zwischen ihnen in K' die Zeitdifferenz $\tau' = \gamma\tau > \tau$.*

- *Messen wir im Laborsystem zwischen zwei Ereignissen die Zeit $t_2 - t_1$, so ist im Ruhesystem der Ereignisse die Zeit vergangen,*

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t .$$

- *Die Lichtgeschwindigkeit ist die maximale Geschwindigkeit für Teilchen und Informationen. ⇒ Eine Teilchentrajektorie befindet sich stets im Lichtkegel.*

5.2 Sätze zur Lorentztransformation

- *Die Lorentztransformation für einen boost in x-Richtung hat die Form,*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh\psi, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

- $\underline{\boldsymbol{x}}_\mu \underline{\boldsymbol{x}}^\mu$ *ist erhalten,* $\underline{\boldsymbol{u}}_\mu \underline{\boldsymbol{u}}^\mu = c^2$, $\underline{\boldsymbol{p}}_\mu \underline{\boldsymbol{p}}^\mu = m^2 c^2$.

Geschwindigkeitsaddition *Es addieren sich die Rapiditäten, d.h.*

$$v_3 = \tanh\psi_3 = \tanh(\psi_2 + \psi_1)$$

- $\underline{\boldsymbol{a}}_\mu \underline{\boldsymbol{p}}^\mu = 0$.

Newtonsche Gesetz *Mit der Kraft $\underline{\boldsymbol{f}}^0$ im Ruhesystem erhält man das Gesetz,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underline{\boldsymbol{p}}^\alpha = f^\alpha = \Lambda^\alpha \underline{\boldsymbol{f}}^0 = \Lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F} \end{pmatrix}.$$

6 Starre Körper

- *Wir betrachten ein inertiales Ruhesystem K mit den Vektoren $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\omega}$, …und ein dazu bewegtes System K' mit den Vektoren $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Omega}$.*

- *Ein Starrer Körper ist ein System von Massenpunkten $(\boldsymbol{x}_i, m_i)$ mit einer holonomen Bindung, die den Abstand fixiert,*

$$|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = \text{const}.$$

- *Der Trägheitsoperator* bzw. *Trägheitstensor ist die lineare Abbildung*

$$I\boldsymbol{\Omega} = m\boldsymbol{Q} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}).$$

Die Eigenwerte I_1, I_2, I_3 heißen Hauptträgheitsmomente, die Hauptachsen e_1, e_2, e_2 heißen Hauptträgheitsachsen.

6.1 Sätze über bewegte Bezugssysteme

▪ *Die Bewegung von K' lässt sich schreiben als das Produkt einer Translation und einer Drehung,*

$$\boldsymbol{q} = B(t)\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}(t), \qquad B \in \mathrm{SO}(3), \quad \boldsymbol{r}(t) \text{ Translation.}$$

▪ *Die Transformation $K \leftrightarrow K'$ erhält die Metrik und daher Skalar- und Vektorprodukt.*

▪ $\dot{B}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$.

▪ *Für eine reine Translation $(B = \mathbb{1})$ ist*

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{r}}\right)^2.$$

In K' wirkt eine zusätzliche Inertialkraft,

$$m\ddot{\boldsymbol{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{Q}} - m\ddot{\boldsymbol{r}}.$$

▪ *Für eine reine Rotation $(\boldsymbol{r} = 0)$ ist,*

$$T = \frac{1}{2}m\left((\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q})^2 + 2\left\langle \dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}\right\rangle + \dot{\boldsymbol{Q}}^2\right).$$

In K' wirken zusätzlich,

(a) *die Trägheitskraft $m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{Q}$,*

(b) *die Corioliskraft $2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{Q}}$,*

(c) *die Zentrifugalkraft $m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q})$,*

$$m\ddot{\boldsymbol{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{Q}} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}) + m\left(2\dot{\boldsymbol{Q}} \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{Q} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right).$$

6.2 Sätze starrer Körper

▪ *Die Konfigurationsmannigfaltigkeit des starren Körpers ist $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ bzw. $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(2)$, falls alle Punkte auf einer Geraden liegen.*

▪ *Der Schwerpunkt des freien starren Körpers bewegt sich geradlinig und gleichförmig.*

▪ *Bei der Bewegung eines freien starren Körpers um einen festen Punkt $\boldsymbol{O}$ sind Drehimpuls und Energie erhalten.*

- *Die Geschwindigkeit des i-ten Teilchens ist gegeben durch,*

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{r}}.$$

- *Der Drehimpuls des starren Körpers ist*

$$\boldsymbol{m} = m\boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{M} = m\boldsymbol{Q} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}).$$

Die kinetische Energie

$$T = M\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}_i)^2.$$

- *I ist symmetrisch und $I\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{M}$.*
- *Die Rotationsenergie zum Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ bezüglich des Punktes $\boldsymbol{O}$ hat die Form,*

$$T = \frac{1}{2}\langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}\rangle.$$

- *Bei Drehung eines in $\boldsymbol{O}$ befestigten Körpers mit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{e}$ um die Achse $\boldsymbol{e}$ ist die Energie*

$$T = \frac{1}{2}I_e\Omega^2, \qquad I_e = \sum_i m_i r_i^2.$$

r_i ist der Abstand des i-ten Punktes zur Achse $\boldsymbol{e}$.

7 Hamiltonsche Dynamik

- *Die Legendre Transformation einer konvexen Funktion $f(x)$ mit $p = f'(x)$ ist,*

$$g(p) = px(p) - f(x(p)).$$

- *Die Legendre-Transformierte der Lagrange Funktion heißt Hamilton Funktion.*
- *Die Poissonklammer ist ein bilinearer Differentialoperator definiert als*

$$\{A, B\} := \sum_\alpha \left[\frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q^\alpha}\right].$$

- *Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind,*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

7.1 Sätze

- *Die Legendre Transformation ist involutiv.*
- *Sei* $F(q,p,t)$ *eine Messgröße, so gilt*

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}\,.$$

Ist F *nicht explizit von der Zeit abhängig ist, so ist* F *genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn* $\{F, H\} = 0$*.*

- $\dot{q}^\alpha = \{q^\alpha, H\} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha}.$
- *Damit eine Bewegung eine Extremale der Wirkung*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - L$$

ist, ist es notwendig und hinreichend, dass sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erfüllt.