

Mathematische Methoden der Physik

Jan-Cornelius Molnar

Revision: 23. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialrechnung	3
1.1	Differentiationsregeln	6
2	Integration	8
2.1	Stammfunktion	10
2.2	Integrationsregeln	12
3	Vektoren	13
3.1	Basisvektoren	14
3.2	Skalar Produkt und Betrag	15
3.3	Vektorprodukt	16
4	Komplexe Zahlen	18
4.1	Komplex Konjugierte	19
4.2	Funktionen komplexer Variablen	20
4.3	Exponentialfunktion	20
4.4	Logarithmus	23
5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	26
5.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	27
5.2	Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung	29
5.3	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	31
5.4	Green'sche Funktion	33
6	Differenzial- und Integralrechnung mit mehreren Variablen	41
6.1	Totales Differential	43
6.2	Variablen Transformation	44
6.3	Mehrdimensionale Integrale	45
6.4	Variablen Transformation	48
7	Vektoranalysis	55
7.1	Linien- und Oberflächenintegrale	56
7.2	Ableitungsoperatoren	61
7.3	Gauß'scher Integralsatz	64
7.4	Integralsatz von Stokes	66
7.5	Anwendung: Coulomb Potential	66
8	Krummlinige Koordinaten	69
8.1	Zylinderkoordinaten	71
8.2	Kugelkoordinaten	72
9	Fourierreihe und Fouriertransformation	73
9.1	Fourierreihe	73

1 Differentialrechnung

Ableiten ist der Prozess in dem bestimmt wird, wie sich eine Funktion $f(x)$ ändert unter einer Variation ihres Arguments x .

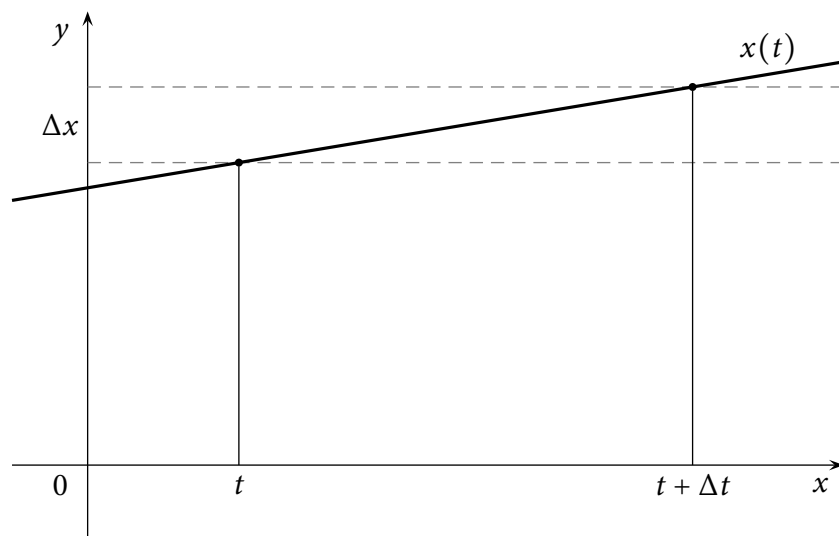
1.1 Beispiel (Geschwindigkeit eines Massenpunktes)

Bei gleichförmiger Bewegung gilt

$$x(t) = v \cdot t + x_0$$

mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

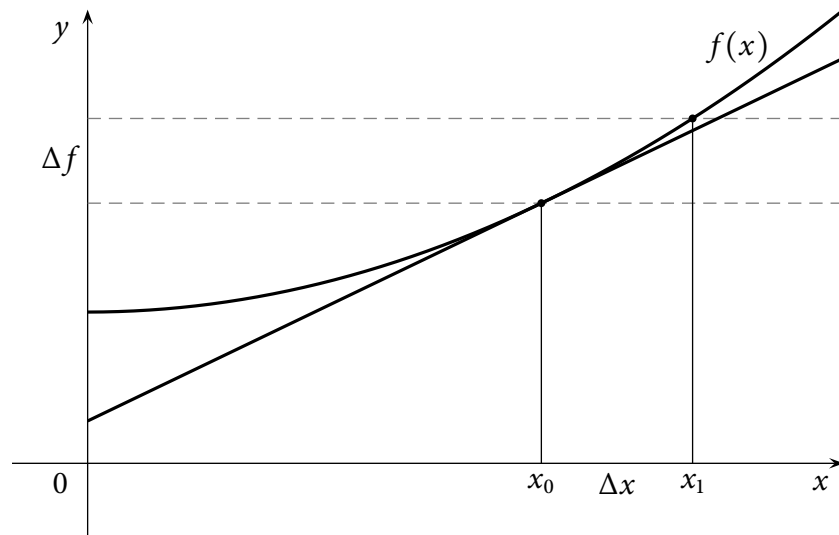


Die Ableitung bestimmt somit das Prinzip, mit dem wir die Geschwindigkeit eines Massenpunktes auf beliebige Wege $x(t)$ verallgemeinern können.

Auf einem kleinen Bereich $\Delta x = x_1 - x_0$ ändert sich die Funktion $f(x)$ um den kleinen Wert

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0).$$

1. DIFFERENTIALRECHNUNG



Für kleine Δx beschreibt somit der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

das Verhalten der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 .

1.2 Definition (Ableitung)

Die formale Definition der Ableitung folgt mittels des Grenzwerts.

$$\frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

Eine Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar, wenn dieser Grenzwert existiert. Da $f'(x)$ wieder Funktion der Variable x ist, können wir höhere Ableitungen bilden mittels

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

1.3 Beispiel (Ableitungen)

- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$$\begin{aligned} \Delta f &= (x + \Delta x)^n - x^n = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k - x^n \\ &= \binom{n}{1} \Delta x x^{n-1} + \sigma(\Delta x) \end{aligned}$$

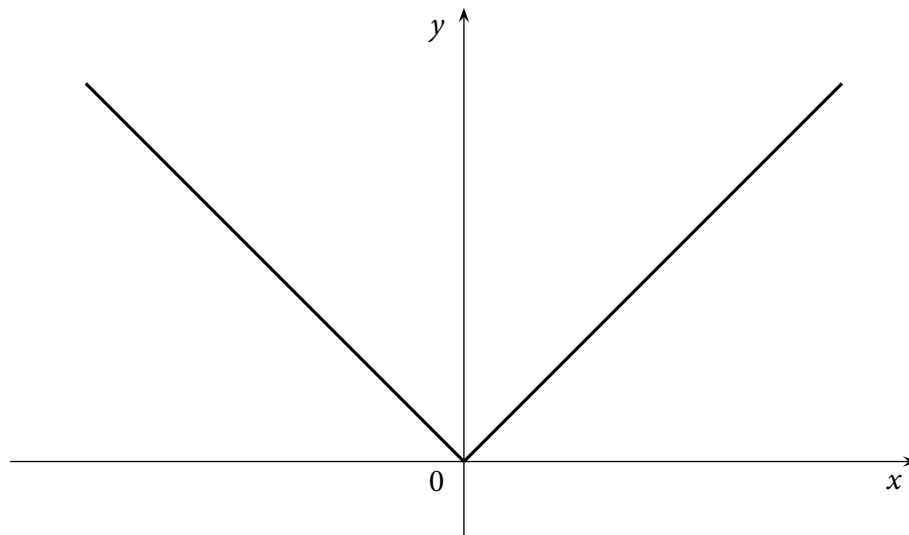
↩

1. DIFFERENTIALRECHNUNG

- $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- nicht differenzierbar in $x = 0$

$$f(x) = |x|$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x) \text{ Dirac } \delta\text{-Funktion}$$

◁

1.4 Definition (Taylor Reihe)

Die Ableitungen beschreiben das Verhalten um einen bestimmten Punkt. Daher können wir eine differenzierbare Funktion in einer kleinen Umgebung als *Taylor Reihe* approximieren.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \sigma((x - x_0)^3) \quad (1.3)$$

×

1. DIFFERENTIALRECHNUNG

Achtung Die Approximation kann nicht immer durch Mitnahme höherer Terme beliebig genau gemacht werden.

Die erste Ableitung beschreibt die Steigung der Kurve während die zweite Ableitung die Krümmung einer Kurve ergibt. Bei der Bewegung $x(t)$ eines Massenpunktes beschreibt die erste Ableitung die Geschwindigkeit

$$v = \frac{d}{dt}x(t) \equiv \dot{x}(t),$$

während die zweite Ableitung die Beschleunigung ergibt

$$a = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \equiv \ddot{x}(t).$$

$$\Rightarrow \text{Newton'sche Gesetz: } m\ddot{x}(t) = F(x, t)$$

1.1 Differentiationsregeln

Die Ableitung ist eine lineare Operation, d.h.

$$(a \cdot f(x))' = a f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (1.4)$$

↷

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) &= (f(x) + f'(x)\Delta x + \sigma(\Delta x^2))(g(x) + g'(x)\Delta x + \sigma(\Delta x^2)) \\ &= f(x) \cdot g(x) + \Delta x \underbrace{(f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + \sigma(\Delta x^2))}_{f(x)g(x)} \end{aligned}$$

↶

Kettenregel Betrachte die Funktion $f(g(x))$. Für die Ableitung erhalten wir

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left(\frac{d}{dg}f(g)\right) \frac{d}{dx}g(x) \quad (1.5)$$

↷

$$f(g(x + \Delta x)) \simeq f(g(x) + \underbrace{\Delta x g'(x)}_{\Delta g}) \simeq f(g(x)) + \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{f(g(x))'} \Delta x + \sigma(\Delta x^2)$$

6 |

1. DIFFERENTIALRECHNUNG

↶

Umkehrfunktion

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$
$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

71

2 Integration

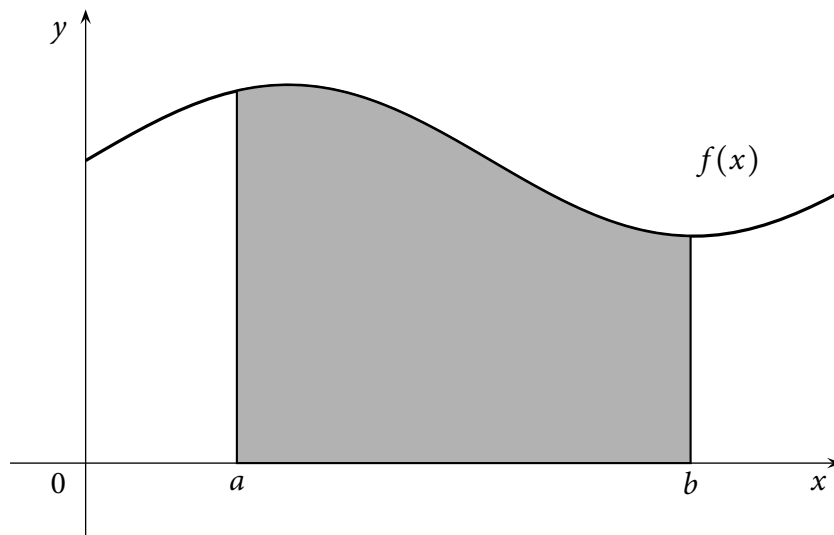
Das Integral $I = \int_a^b f(x) dx \equiv \int_a^b dx f(x)$ kann als Fläche unter der Kurve $f(x)$ verstanden werden.

Die formale Definition folgt ebenfalls aus einem Grenzwertprozess. Dazu wird das Intervall $a \leq x \leq b$ in eine große Anzahl von kleinen Intervallen aufgeteilt

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b$$

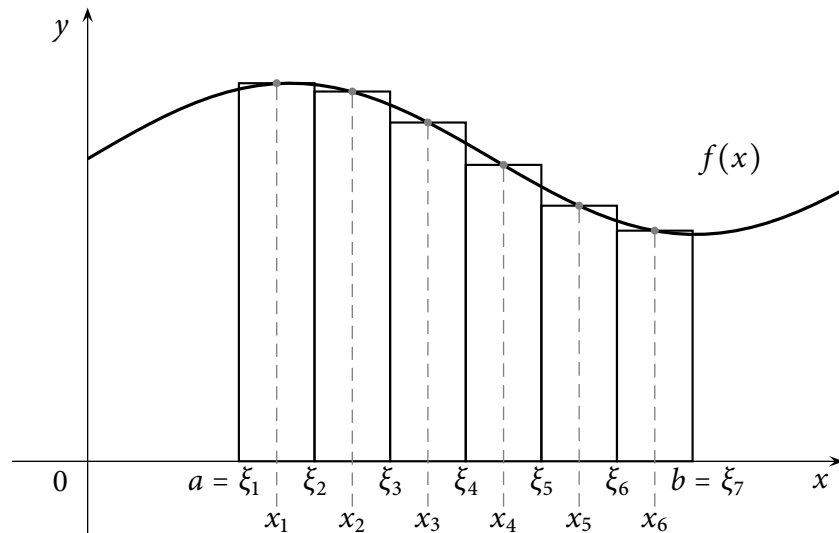
und dann folgende Summe geformt

$$S = \sum_{i=0}^n f(x_i)(\xi_i - \xi_{i-1}). \tag{2.1}$$



Die Positionen x_i sind beliebig im Intervall $\xi_{i+1} \leq x_i \leq \xi_i$. Das (Riemann'sche) Integral erhält man nun im Limes, wenn man die Länge der Intervalle $\xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i$ gegen Null streben lässt.

2. INTEGRATION



Eine Funktion $f(x)$ heißt integrierbar, wenn dieser Grenzwert existiert. Desweiteren muss er eindeutig sein, d.h., unabhängig von der Wahl von ξ_i und x_i .

2.1 Beispiel

$$\int_0^b dx x = \frac{1}{2}b^2$$

Unterteile das Intervall $0 \leq x \leq b$ mit $\Delta x = \frac{b}{n}$. Wähle $x_i = \xi_i$, so gilt für die Summe

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot k \cdot \Delta x = b^2 \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= b^2 \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Den Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ erhalten wir somit für $n \rightarrow \infty$ und das Integral wird zu

$$I = \int_a^b dx x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}$$

◁

2.2 Bemerkung Jedes Integral kann geschrieben werden als

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \quad \text{mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_i) \Delta x. \quad (2.2)$$

—

Das Integral hat folgende Eigenschaften

2. INTEGRATION

- $\int_a^b dx 0 = 0$
- $\int_a^a dx f(x) = 0$
- $\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x)$
- $\int_a^b dx [f(x) + g(x)] = \int_a^b dx f(x) + \int_a^b dx g(x)$
- $\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$

Falls $a < b$, so definiert man

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (2.3)$$

2.1 Stammfunktion

Ersetzt man die obere Integrationsgrenze b durch x , so definiert das Integral eine neue Funktion

$$F(x) = \int_a^x du f(u) \quad (2.4)$$

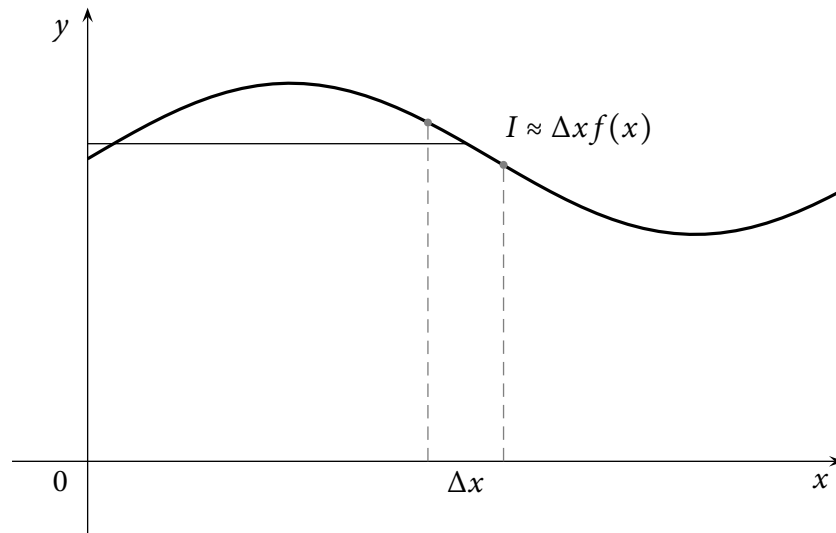
Diese Funktion lässt sich jetzt differenzieren

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} du f(u) = \int_a^x du f(u) + \int_x^{x+\Delta x} du f(u) \\ &= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} du f(u) \end{aligned}$$

Somit folgt die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} du f(u) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\Delta x f(x) + \sigma(\Delta x^2)] = f(x) \end{aligned}$$

2. INTEGRATION



2.3 Definition (Stammfunktion)

Jede Funktion $F(x)$ mit

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (2.5)$$

heißt *Stammfunktion* von $f(x)$ oder *unbestimmtes Integral*. ×

Alle Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante: $G(x) = F(x) + c$ ist ebenfalls eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Man schreibt daher für das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int dx f(x) \quad (2.6)$$

Das *bestimmte Integral* folgt somit aus der Stammfunktion

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a) \equiv F|_a^b \quad (2.7)$$

Es folgen sogleich eine Reihe elementarer Integrale

- $\int dx x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int dx e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$
- $\int dx \frac{a}{x} = a \cdot \ln|x|$
- $\int dx \cos bx = \frac{1}{b} \sin bx$

2. INTEGRATION

2.2 Integrationsregeln

Substitution Es sei $y = g(x)$ so gilt

$$\int dy f(y) = \int dx g'(x) f(g(x)) \quad (2.8)$$

2.4 Bemerkung Schreibe $\frac{d}{dx}y = g'(x) \Rightarrow dy = g'(x)dx$

$$\int_a^b dy f(y) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} dx g'(x) f(g(x)) \quad \text{—} \circ$$

Partielle Integration

$$\int dx f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int dx f(x)g'(x) \quad (2.9)$$

2.5 Beispiel

$$\begin{aligned} \int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{x=\sin y}{=} \int dy \cos y \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \int dy \cos y \frac{1}{\cos y} \\ &= y = \arcsin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dx \ln x &= \int dx \frac{1}{f'(x)} \cdot \ln x = x \ln x - \int dx x \cdot \frac{1}{x} \\ &= x \ln x - x \end{aligned} \quad \triangleleft$$

3 Vektoren

3.1 Definition (Skalar)

Physikalische Größen, die nur von ihrem Betrag abhängen

- T: Temperatur
- p: Druck
- m: Masse
- $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$: Feinstrukturkonstante

×

3.2 Definition (Vektor)

Physikalische Größen, die durch ihren Betrag und ihre Richtung bestimmt sind

- \vec{v} : Geschwindigkeit
- \vec{F} : Kraft
- \vec{E} : elektrisches Feld

×

Einen Vektor stellen wir durch einen Pfeil im Raum dar mit seiner Länge bestimmt durch seinen Betrag.

Addition

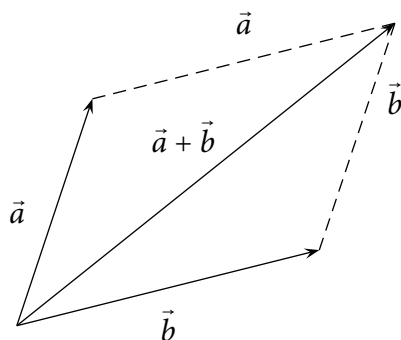
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} : \text{kommutativ}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} : \text{assoziativ}$$

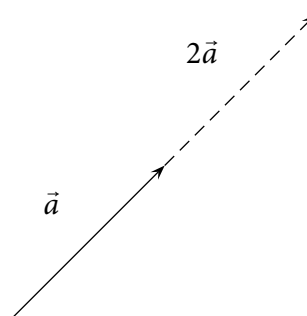
Skalare Multiplikation $\lambda \cdot \vec{a}$:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$



Addition



Skalare Multiplikation

3. VEKTOREN

3.1 Basisvektoren

Für 3 beliebige Vektoren, die nicht in einer Ebene liegen, können wir jeden Vektor darstellen als

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (3.1)$$

Die drei Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formen eine Basis; die Skalare a_1, a_2, a_3 heißen Komponenten des Vektors \vec{a} zu dieser Basis.

3.3 Bemerkung Meistens werden die Basisvektoren orthogonal aufeinander gewählt aber es ist nicht notwendig. —○

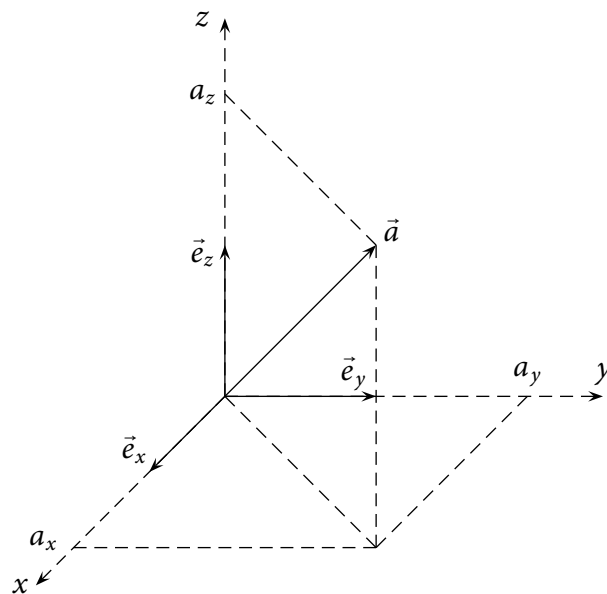
Im Allgemeinen gilt

1. Die Anzahl Vektoren in der Basis ist bestimmt durch die Dimension des Raumes.
2. Die Vektoren in der Basis sind linear unabhängig, d.h.,

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_n\vec{e}_n \neq 0$$

für alle c_i , außer $c_i = 0$.

Im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) haben wir die natürliche Basis der Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ entlang der x, y, z Achsen.



3. VEKTOREN

Für eine gewählte Basis können wir somit jeden Vektor in seinen Komponenten schreiben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Die Addition und skalare Multiplikation hat in Komponentenschreibweise die Form:

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} + \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \\ \bullet \lambda \vec{a} &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Skalar Produkt und Betrag

3.4 Definition (Skalarprodukt)

Das *Skalarprodukt* im dreidimensionalen kartesischen Raum ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle . \quad (3.3)$$

×

3.5 Definition (Betrag)

Der *Betrag* eines Vektors ist bestimmt durch das Skalarprodukt mit sich selbst.

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (3.4)$$

×

Für die natürliche Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ folgt somit

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z &= 0 && \text{orthogonal} \\ |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| &= 1 && \text{normiert} \end{aligned}$$

3.6 Bemerkung Die Basis heißt orthonormiert.

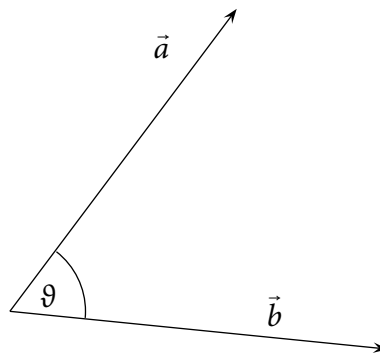
—○

Das Skalarprodukt kann auch geschrieben werden als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \vartheta$$

mit dem Winkel ϑ zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

3. VEKTOREN



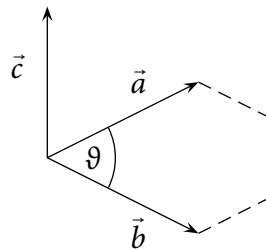
3.3 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt wird geschrieben als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

wobei \vec{c} orthogonal auf \vec{a} und \vec{b} steht, mit dem Betrag

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \vartheta, \quad \text{der Fläche des Parallelogramms.}$$



Zudem bilden \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ein rechthändiges Dreiein.
Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \\ \vec{b} \times \vec{a} &= -\vec{a} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

(3.5)

3. VEKTOREN

In den Koordinaten der natürlichen Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ hat das Vektorprodukt die Form

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \vec{c}. \quad (3.6)$$

3.7 Beispiel

Bewegung eines Massenpunktes: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$

Drehimpuls: $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

Lorentz-Kraft: $\vec{F} = q(\underbrace{\vec{E}}_{\text{el. Feld}} + \vec{v} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{Magnetfeld}})$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$ ◁

4 Komplexe Zahlen

Die Gleichung $z^2 = -1$ hat keine Lösung in den reellen Zahlen. Man kann jedoch die reellen Zahlen \mathbb{R} erweitern, sodass diese Gleichung ebenfalls zwei Lösungen besitzt.

Dazu führt man die *imaginäre Einheit* ein

$$i \text{ mit der Definition } i^2 = -1 \tag{4.1}$$

Die beiden Lösungen obiger Gleichung nehmen die Form an

$$z = \pm i$$

Eine Zahl in diesem erweiterten Raum kann somit einen Realteil und einen Imaginärteil besitzen und heißt komplexe Zahl.

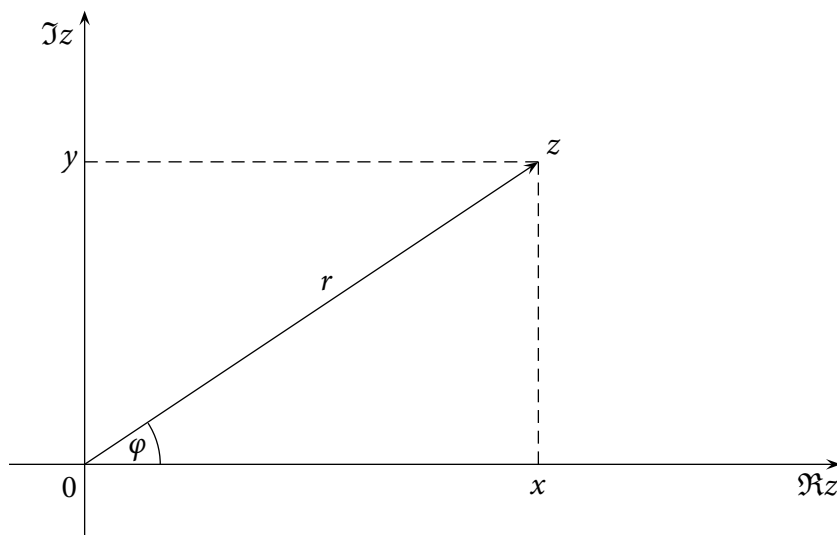
$$z = \underbrace{x}_{\text{Realteil}} + \underbrace{iy}_{\text{Imaginärteil}} \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen verhält sich gleich wie mit reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= xu - yv + i(xv + uy) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Eine komplexe Zahl kann in der komplexen Ebene dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z = x &= r \cos(\varphi) && : \text{Real-Teil} \\ \operatorname{Im} z = y &= r \sin(\varphi) && : \text{Imaginär-Teil} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z| && : \text{Betrag von } z \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \equiv \arg(z) && : \text{Argument von } z \end{aligned} \tag{4.4}$$

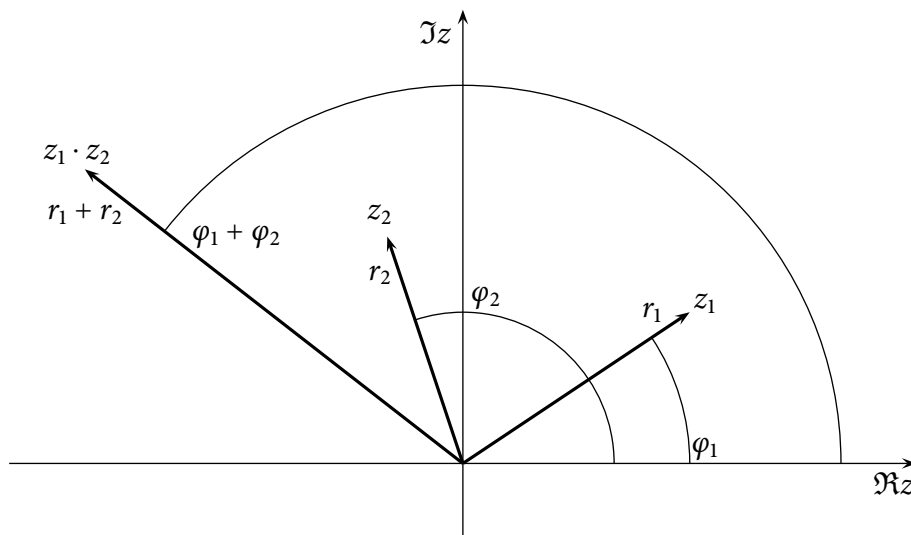


4. KOMPLEXE ZAHLEN

4.1 Bemerkung

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

d.h. Multiplikation zweier komplexer Zahlen multipliziert ihren Betrag und addiert ihr Argument.



4.1 Komplex Konjugierte

4.2 Definition (Komplexe Konjugation)

Es gibt eine spezielle Funktion, das *Komplex Konjugierte*, das jeder komplexen Zahl eine neue komplexe Zahl zuordnet mittels

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy. \quad \times$$

Es gelten die Relationen

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad (4.6)$$

$$z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Es gelten die Rechenregeln

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (4.7)$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1 + iz_2)} = \bar{z}_1 - i\bar{z}_2$$

4. KOMPLEXE ZAHLEN

4.3 **Bemerkung** Die Division von komplexen Zahlen erfolgt am einfachsten mit folgendem Trick

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x + iy)(u + iv)}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv + i(xv + yu)}{u^2 + v^2} \quad \circ$$

4.2 Funktionen komplexer Variablen

4.4 **Beispiel**

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \triangleleft$$

Die Ableitung von komplexen Funktionen folgt analog zur Ableitung reeller Funktionen

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (4.8)$$

4.5 **Bemerkung** Falls eine komplexe Funktion differenzierbar in einer kleinen Umgebung ist, so heißt sie *analytisch*. ◦

4.6 **Beispiel**

$$\frac{d}{dz} z^n = n \cdot z^{n-1}$$

Re z , Im z , \bar{z} , $|z|^2$ sind nicht differenzierbar ◁

4.3 Exponentialfunktion

4.7 **Definition (Exponentialfunktion)**

Die exponential Funktion $\exp(z)$ ist definiert mittels der Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (4.9)$$

×

4.8 **Bemerkung** Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

$\exp(1) \equiv e$	Eulersche Zahl	
$\exp(x) \equiv e^x$	für $x \in \mathbb{R}$	
$\Rightarrow \exp(z) \equiv e^z$	Erweiterung von e^z auf komplexe Zahlen	◦

4. KOMPLEXE ZAHLEN

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$$

↷

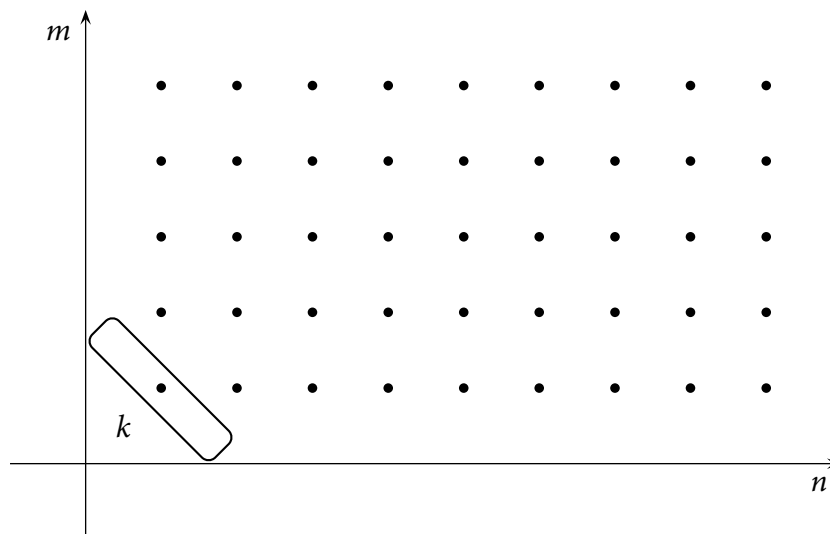
$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(z) &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dz} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z) \end{aligned}$$

↶

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

↷

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z_2^m \right) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \frac{1}{n!m!} z_1^n \cdot z_2^m \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (z_1 + z_2)^l = \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

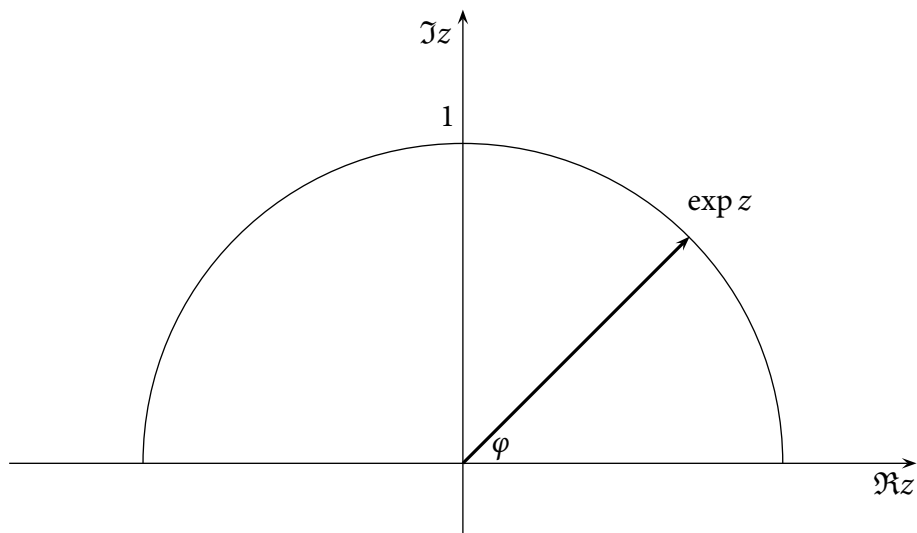


↶

Von besonderem Interesse ist der Wert von e^z für ein imaginäres $z = i\varphi$:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{i\varphi}} &= |e^{i\varphi}|^2 = e^0 = e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = 1 \\ \Rightarrow e^{i\varphi} &\text{ liegt auf dem Einheitskreis} \end{aligned}$$

4. KOMPLEXE ZAHLEN



Aus der Definition von $\exp(i\varphi)$ folgt

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k}}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \varphi^{2l+1}}_{\sin \varphi}. \quad (4.10)$$

Daraus ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

4.9 Bemerkung Es gilt die *Euler'sche Gleichung*

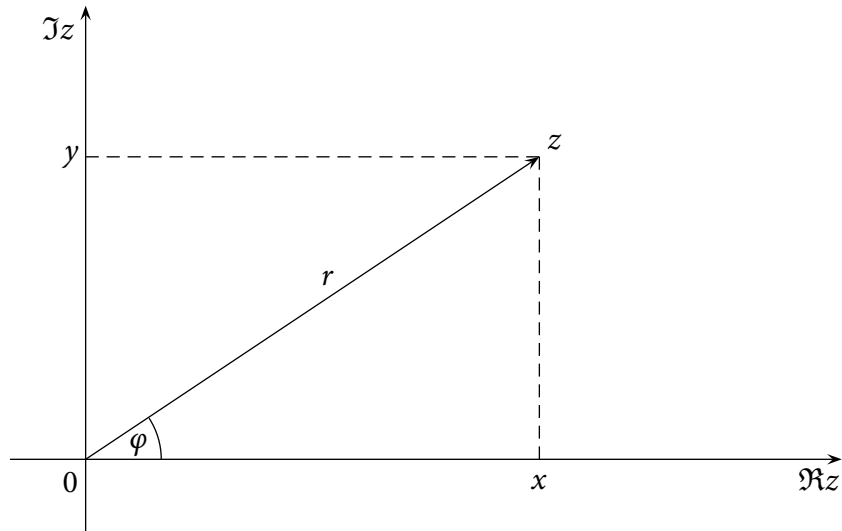
$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (4.11)$$

—○

Jede komplexe Zahl kann somit geschrieben werden als

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

4. KOMPLEXE ZAHLEN



4.10 Beispiel

$$\begin{aligned}z^n &= (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} \\(e^{i\varphi})^2 &= e^{i2\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi \\&= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \underbrace{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}_{\cos 2\varphi} + i \underbrace{2 \sin \varphi \cos \varphi}_{i \sin 2\varphi} \\&= \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)\end{aligned}$$

◁

4.11 Bemerkung $\cos(z)$ und $\sin(z)$ sind nun ebenfalls für komplexe Zahlen definiert. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\cos ix &= \frac{e^{i \cdot ix} + e^{-i \cdot ix}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \\ \sin ix &= \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sinh x\end{aligned}$$

—○

4.12 Beispiel

$$\cosh 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

◁

4.4 Logarithmus

4.13 Definition (Logarithmus Funktion)

Der Logarithmus ist definiert als Umkehrfunktion von $\exp(z)$:

$$z = e^w \Leftrightarrow w = \ln z$$

×

4. KOMPLEXE ZAHLEN

Schreiben wir $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+k\cdot 2\pi)}$ für $k \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\ln(z) = \ln\left(re^{i(\varphi+k\cdot 2\pi)}\right) = \ln(r) + \ln\left(e^{i(\varphi+k\cdot 2\pi)}\right) = \ln(r) + i(\varphi + k \cdot 2\pi).$$

Somit ist der Logarithmus nicht mehr eindeutig.

Die Exponentialfunktion bildet den Bereich $x \in (-\infty, \infty)$ und $y \in [0, 2\pi)$ bereits auf die gesamte komplexe Ebene ab. Daher wissen wir nicht mehr, von welchem k wir gestartet sind. Der Logarithmus hat daher einen Schnitt in der komplexen Ebene, in dem die Funktion nicht stetig ist. Die Lage des Schnittes kann im Prinzip frei gewählt werden.

Mit Hilfe des Logarithmus' lassen sich jetzt auch beliebige Wurzeln und Potenzen definieren.

$$f(z) = z^v = \exp(v \cdot \ln z)$$

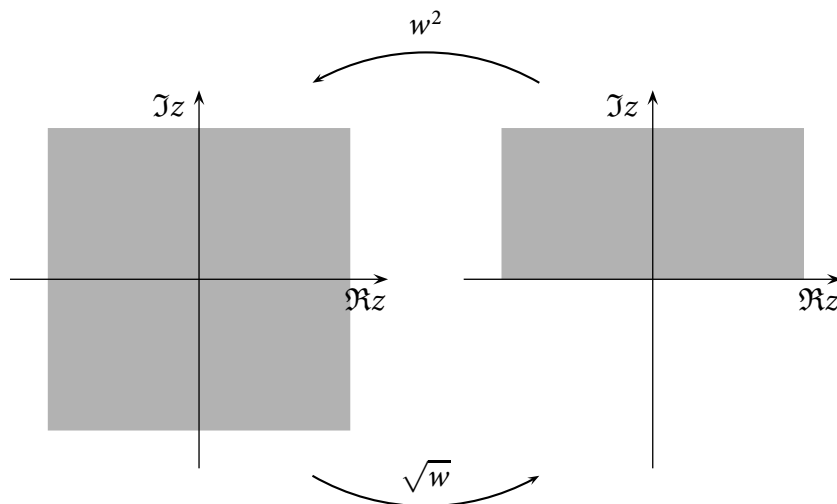
Für $v = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Winkelfunktion

$$f(z) = \sqrt{z}.$$

Die Vieldeutigkeit des Logarithmus wird auf die Winkelfunktion vererbt

$$\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + ki\pi} \quad k = 0, 1$$

Die Vieldeutigkeit kann elegant interpretiert werden durch das Einführen von *Riemannschen Blättern*. Man interpretiert die z -Ebene bestehend aus 2 Riemannschen Blättern: Das erste Blatt wird mittels \sqrt{z} auf die obere Halbebene in der w -Ebene abgebildet. Das zweite Riemannsche Blatt wird auf die untere Halbebene abgebildet.



4. KOMPLEXE ZAHLEN

Die beiden Riemannschen Blätter heißen Riemannsche Flächen. Die Wurzel Funktion ist dann analytisch von der Riemannschen Fläche nach \mathbb{C} (außer $z = 0$). Der Schnitt ist die Kreuzungslinie der beiden Blätter.

4.14 Bemerkung Für den $\ln(z)$ ist die Riemannsche Fläche eine Spirale. —○

4.15 Beispiel

Lösungen von $z^n = 1$ haben die Form

$$z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen treten in der Physik sehr häufig auf

5.1 Beispiel (Radioaktiver Zerfall)

Die Anzahl Atome, die in einem Zeitintervall Δt zerfallen, ist proportional zur Anzahl Teilchen und der Rate Γ .

$$\begin{aligned}\Delta N &= -N(t) \Gamma \cdot \Delta t & (5.1) \\ \Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} &= -\Gamma N(t)\end{aligned}$$

Die DG hat die Lösung $N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$ mit N_0 als Atomzahl zur Zeit $t = 0$. ◁

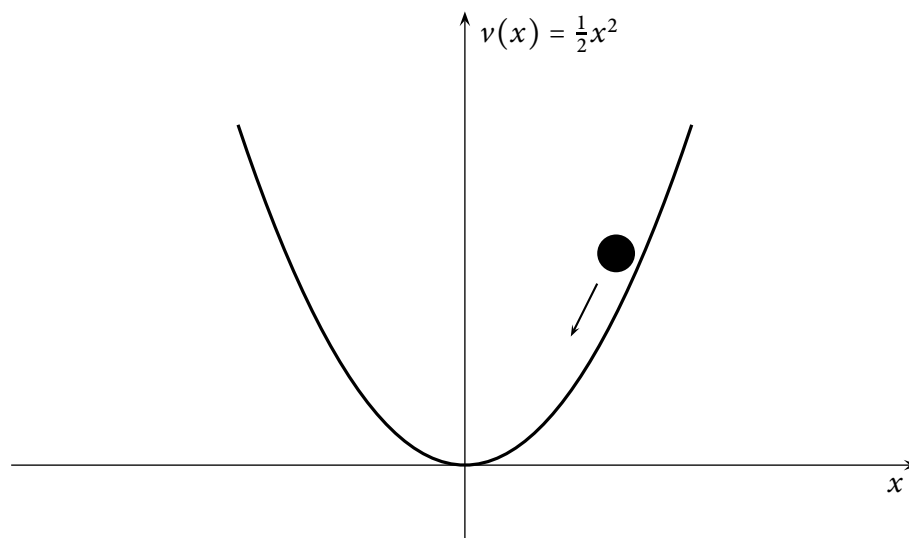
5.2 Beispiel (Harmonischer Oszillator)

$$\begin{aligned}m\ddot{x}(t) &= F = -m\omega^2 x \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x &= 0\end{aligned}$$

Die DG hat die Lösung $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$. Da $x(t)$ reell ist, muss gelten $A^* = B = \frac{x_0}{2} e^{i\varphi}$ und die allgemeinste Lösung hat die Form

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

mit x_0 und φ bestimmt durch die Anfangs-/Randbedingungen.



5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lineare DG 1. Ordnung haben die Form

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (5.2)$$

und benötigen im Allgemeinen eine Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0, \quad (5.3)$$

um eine spezielle Lösung zu bestimmen.

Der triviale Fall

Ist $a(x) = 0$, so ist die Lösung bestimmt durch das Integral von $b(x)$.

$$y(x) = \int_0^x du b(u) + y_0 \quad (5.4)$$

5.3 Beispiel (Geschwindigkeit eines Teilchens mit zeitabhängiger Kraft)

$$\dot{v} = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow v = \int_0^t \frac{F(t)}{m} dt + v_0 \quad \triangleleft$$

Der homogene Fall

Eine homogene Differentialgleichung hat die Form

$$y' = a(x)y. \quad (5.5)$$

5.4 Bemerkung Eine Eigenschaft von linearen homogenen Differentialgleichungen ist, dass für die Lösungen y_1, y_2 auch folgende Funktionen Lösungen sind:

- $\lambda y_1(x)$
- $y_1(x) + y_2(x)$ ◊

Die Lösung der Differentialgleichung finden wir mittels Division von y :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{d}{dx} \ln y = a(x) \\ \Rightarrow \ln y(x) &= \int_0^x du a(u) + c \equiv A(x) + c \\ \Rightarrow y(x) &= y_0 e^{\int_0^x du a(u)} = y_0 e^{A(x)} \end{aligned}$$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Der inhomogene Fall

Zusätzlich zur homogenen Gleichung haben wir noch einen Treiber $b(x)$.

$$y' - a(x)y = b(x) \quad (5.6)$$

Für zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gilt, dass

$$y_1(x) - y_2(x)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

↗

$$\begin{aligned} & [y_1(x) - y_2(x)]' - a(x)[y_1(x) - y_2(x)] \\ &= \underbrace{[y_1'(x) - a(x)y_1(x)]}_{b(x)} - \underbrace{[y_2'(x) - a(x)y_2(x)]}_{b(x)} \\ &= b(x) - b(x) = 0 \end{aligned}$$

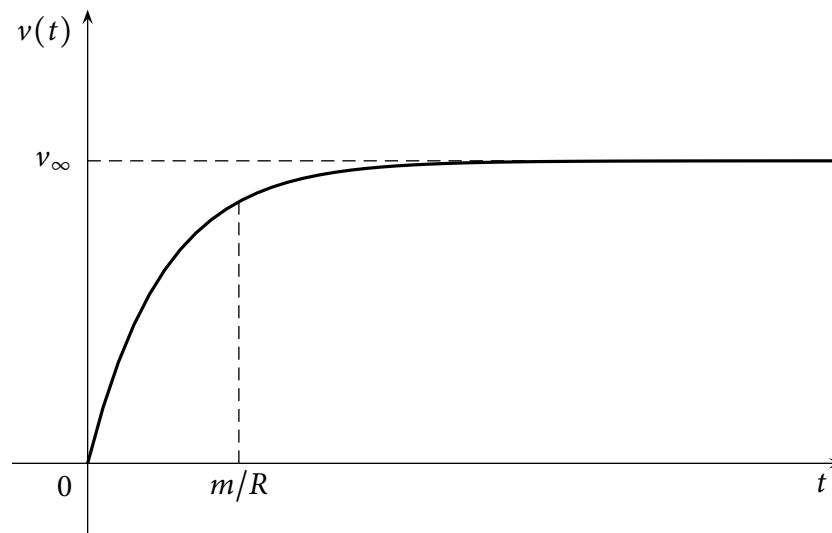
↖

Eine Lösung erhält man mittels Multiplikation der DG mit $e^{-A(x)}$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow e^{-A(x)} y' - \underbrace{a(x)e^{-A(x)}}_{(e^{-A(x)})'} y = b(x)e^{-A(x)} \\ & \Rightarrow \frac{d}{dx} (ye^{-A(x)}) = b(x)e^{-A(x)} \\ & \Rightarrow y(x) = e^{A(x)} \underbrace{\int_0^x du b(u)e^{-A(u)}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{y_0 e^{A(x)}}_{\text{homogene Lösung}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.5 Beispiel (Beschleunigter Massenpunkt mit linearem Luftwiderstand)

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= \underbrace{F}_{\text{Beschleunigung}} - \underbrace{R \cdot v}_{\text{Luftwiderstand}} \\ v &= \underbrace{\frac{F}{R}}_{v_\infty} (1 - e^{-t \frac{R}{m}}) + v_0 e^{-t \frac{R}{m}} \end{aligned}$$



5.2 Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Die allgemeine Form lautet

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad (5.8)$$

und ist im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar, außer in Spezialfällen, von denen wir einige untersuchen wollen.

Separierbare Differentialgleichungen

Falls $F(x, y)$ separierbar ist, d.h.

$$F(x, y) = f(x)g(y),$$

so können wir die Differentialgleichung umschreiben auf

$$\begin{aligned} \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \text{integrieren mit } x &\Rightarrow \int dx \frac{y'}{g(y)} = \underbrace{\int dy \frac{1}{g(y)}}_{G(y)} = \underbrace{\int dx f(x)}_{H(x)+c} \end{aligned}$$

Falls $G(y)$ invertierbar ist, erhalten wir

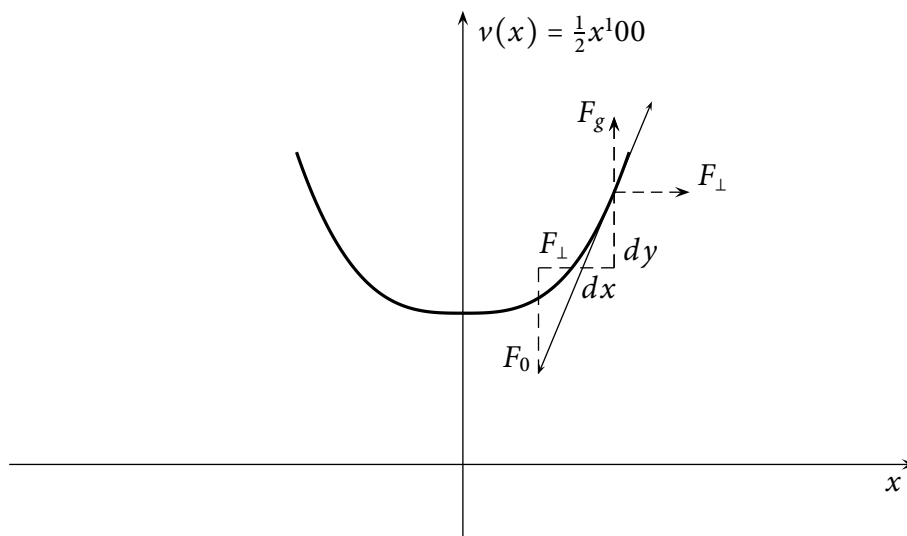
$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c)$$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5.6 Beispiel

Kettengleichung: Freihängendes Seil/Kette

$$y'' = \alpha \sqrt{1 + (y')^2}$$



Setze $u = y'$

$$\begin{aligned} \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} &= \alpha \\ \Rightarrow \int du \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} &= \int dz \frac{\cosh(z)}{\sqrt{1+\sinh^2(z)}} = \int dz \frac{\cosh(z)}{\cosh(z)} \\ &= z = \operatorname{arcsinh} u = \int dx \alpha = \alpha x + c_1 \\ \Rightarrow y' = u &= \sinh(\alpha x + c_1) \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + c_1) + \tilde{c} \end{aligned}$$

Bernoulli-Gleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^v$$

Mit einer geschickten Substitution kann diese Gleichung auf die Form einer inhomogenen Differentialgleichung gebracht werden.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^v} &= a(x)y^{1-v} + b(x) \\ \frac{1}{1-v} (y^{1-v})' &= \frac{v'}{1-v} \end{aligned}$$

Setze $y^{1-v} = v$ und man erhält

$$v' = (1-v)a(x)v + (1-v)b(x)$$

\Rightarrow Löse mit dem Trick von Gleichung 5.7

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Die allgemeine Form ist

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = b(x). \quad (5.9)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist eindeutig bestimmt durch das Anfangswertproblem

$$y(0) = y_0, y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \quad (5.10)$$

5.7 Beispiel (Differentialgleichung 2. Ordnung)

$$\underbrace{L}_{\text{Induktion}} \ddot{I} + \underbrace{R}_{\text{Widerstand}} \dot{I} + \underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{Kapazität}} I = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{ext. Drive}} : \text{elektrischer Schwingkreis} \quad (5.11)$$

ist durch die Vorgabe von $I(0)$ und $\dot{I}(0)$ bestimmt. ◁

Allgemeiner Lösungsansatz

- Finde n unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ für die homogene Gleichung mit $b(x) = 0$.

$$\Rightarrow y_c(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Lösung der homogenen Gleichung.

- Finde eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung mit $b(x) \neq 0$.
- Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \quad (5.12)$$

Konstante Koeffizienten

Homogene Gleichung

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (5.13)$$

Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ können wir die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung umwandeln:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Die Gleichung hat genau n Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es ist jetzt nötig, 3-Fälle zu unterscheiden:

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Alle λ_i sind reell und verschieden. Somit sind $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ linear unabhängig und die Lösung hat die Form

$$y_c(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (5.14)$$

2. Einige λ_i sind komplex. Falls a_i reell sind, so ist $\overline{\lambda_i}$ ebenfalls eine Lösung. So können wir schreiben ($\lambda_i = \alpha + i\beta$)

$$y_i(x) = C_i e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{C_i} e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (5.15)$$

$$= 2Ae^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi) \quad (5.16)$$

3. Einige Lösungen sind mehrfache Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k \equiv \lambda$. Dann sieht man, dass die Funktionen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

ebenfalls Lösungen sind. Wir erhalten somit wieder n unabhängige Lösungen.

$$y_c = (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (5.17)$$

5.8 Beispiel

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y' + y &= 0 \quad \text{Ansatz } y = e^{\lambda x} \\ \Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{\lambda x} &= 0 \\ \Rightarrow 0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \\ \Rightarrow e^x, x e^x &\text{ sind Lösungen} \end{aligned}$$

$$\heartsuit (x e^x)'' - 2(x e^x)' + x e^x = x e^x + 2e^x - 2(x e^x + e^x) + x e^x = 0 \heartsuit$$

Die Lösung ist somit $y_c(x) = (C_1 + x C_2) e^x$. ◁

Inhomogene Gleichung

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 = b(x) \quad (5.18)$$

Es gibt keine allgemeine Methode, die eine partikulär Lösung liefert. Für spezielle $b(x)$ helfen aber folgende Ansätze.

1. $b(x) = A e^{\Gamma x}$ mit Γ reell oder komplex
Ansatz: $y_p(x) = B e^{\Gamma x}$
2. $b(x) = A_1 \sin(\Gamma x) + A_2 \cos(\Gamma x)$
Ansatz: $y_p(x) = B_1 \sin(\Gamma x) + B_2 \cos(\Gamma x)$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

3. $b(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$
Ansatz: $y_p(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n$
4. Falls $b(x)$ eine Summe oder ein Produkt von obigen Formen ist, so ist der Ansatz ebenfalls eine Summe oder Produkt der entsprechenden Ansätze.

5.9 Beispiel

$$y'' + y = \cos 2x$$

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

$$\Rightarrow -4B_1 \cos 2x - 4B_2 \sin 2x + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x = \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -4B_1 + B_1 &= 1 & \Rightarrow B_1 &= -\frac{1}{3} \\ -4B_2 + B_2 &= 0 & B_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x \quad : \text{partikulär Lösung}$$

$$\Rightarrow y_c(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad : \text{homogene Lösung}$$

\Rightarrow Vollständige Lösung:

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad \triangleleft$$

5.10 Bemerkung Die allgemeine Lösung folgt aus der Summe der partikulär Lösung y_p und der Lösung der homogenen Gleichung y_c .

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) \quad (5.19)$$

—○

5.4 Green'sche Funktion

Betrachte die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a \frac{d}{dx}y + by = f(x), \quad (5.20)$$

für einen allgemeinen Treiber $f(x)$. Die Lösung des homogenen Problems kennen wir.

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Frage Gibt es einen speziellen Treiber $h(x, z)$, sodass wir mit einer Lösung von

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + a\frac{d}{dx}G(x, z) + bG(x, z) = h(x, z) \quad (5.21)$$

eine Lösung zur obigen Gleichung finden für einen beliebigen Treiber $f(x)$:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(x, z)f(z) \quad (5.22)$$

5.11 Bemerkung Der Ansatz $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(x, z)f(z)$ folgt aus der Linearität der Differentialgleichung:

- Ist $y(x)$ Lösung zum Treiber $f(x)$
 $\Rightarrow cy(x)$ ist Lösung zum Treiber $cf(x)$
- Ist $y_1(x)$ Lösung zu $f(x)$ und $y_2(x)$ Lösung zu $g(x)$
 $\Rightarrow y_1(x) + y_2(x)$ ist Lösung zum Treiber $f(x) + g(x)$ —◦

Einsetzen von $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(x, z)f(z)$ in die Differentialgleichung liefert

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}y(x) + a\frac{d}{dx}y(x) + by(x) \quad (5.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \left[\underbrace{\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + a\frac{d}{dx}G(x, z) + bG(x, z)}_{h(x, z)} \right] \quad (5.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z)h(x, z) \quad (5.25)$$

d.h., der spezielle Treiber $h(x, z)$ muss die Eigenschaft haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)h(x, z) = f(x) \quad (5.26)$$

Die Funktion, die diese Eigenschaft besitzt wird in der Physik als *Dirac-Delta Funktion* bezeichnet, mit der Notation $h(x, z) \equiv \delta(x - z)$ und ist mathematisch gesehen eine *Distribution* oder uneigentliche Funktion. Als nächstes untersuchen wir diese Funktion im Detail.

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dirac- δ -Funktion

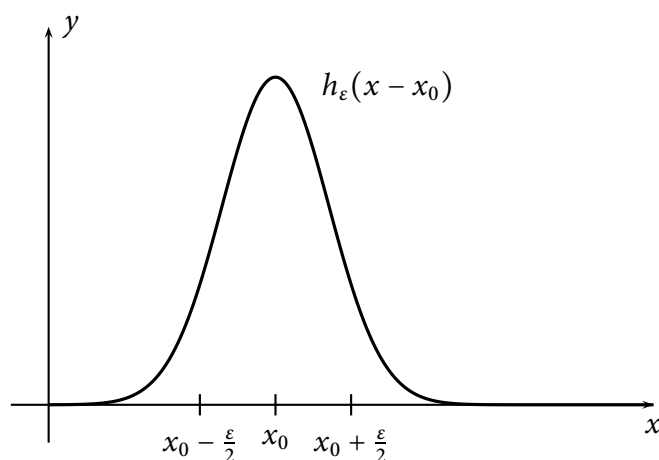
Die wichtigste Eigenschaft der δ -Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0), \quad (5.27)$$

für alle Funktionen $f(x)$. $\ni f(x)$ soll beliebig oft differenzierbar sein. \leftarrow

Wir können die δ -Funktion beliebig genau approximieren mit der Funktion

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \quad (5.28)$$



Für kleine ε gilt somit

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx h_\varepsilon(x - x_0) f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx h_\varepsilon(x - x_0) \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \sigma(x - x_0) \right] \end{aligned}$$

Es gilt

•

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_\varepsilon(x - x_0) f(x_0) &= f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \\ &\stackrel{z = \frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} f(x_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}}_1 = f(x_0) \end{aligned}$$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\varepsilon}(x - x_0) f'(x_0) (x - x_0)$$

$$\stackrel{z=x-x_0}{=} f'(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}} \underbrace{e^{-\frac{z^2}{\varepsilon}}}_{\text{punktsymmetrisch}} \quad z = 0$$

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\varepsilon}(x - x_0) \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)$$

$$\stackrel{z=\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} \frac{1}{2} f''(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dz \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^2 e^{-z^2}$$

$$= \frac{1}{4} f''(x_0) \cdot \varepsilon \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h_{\varepsilon}(x - x_0) f(x) = f(x_0) + \frac{1}{4} f''(x_0) \varepsilon + \sigma(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0) \quad (5.29)$$

Die Frage ist somit, ob man das Integral mit dem Limes vertauschen kann

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{\varepsilon}(x - x_0) f(x)$$

$$\text{" = " } \int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon}(x - x_0) f(x)$$

$$\Rightarrow \delta(x - x_0) \text{" = " } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon}(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}}$$

$$= \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

Wir sehen, dass die δ -Funktion keine eigentliche Funktion ist sondern, dass sie erst Sinn ergibt, indem man über sie integriert. Trotzdem ist es möglich, mit ihr als abstraktes Objekt zu rechnen.

Eigenschaften der δ -Funktion

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$
- $\int_{-\eta}^{\eta} dx f(x) \delta(x) = f(0)$ für beliebige $\eta > 0$

↷

$$\begin{aligned} \int_{-\eta}^{\eta} dx f(x) \delta(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\eta}^{\eta} dx h_{\varepsilon}(x) f(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx h_{\varepsilon}(x) f(x)}_{f(0)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{-\eta} dx h_{\varepsilon}(x) f(x)}_{=0} - \underbrace{\int_{\eta}^{\infty} dx h_{\varepsilon}(x) f(x)}_{=0} \right] \\ &= f(0) \end{aligned}$$

↶

- $\delta(x) = \delta(-x)$
 ↷ $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(-x) f(x)$ ↶
- $\delta(x) \cdot x = 0$
 ↷ $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) x \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(x) = g(0) = f(0) \cdot 0 = 0$ ↶

5.12 Beispiel

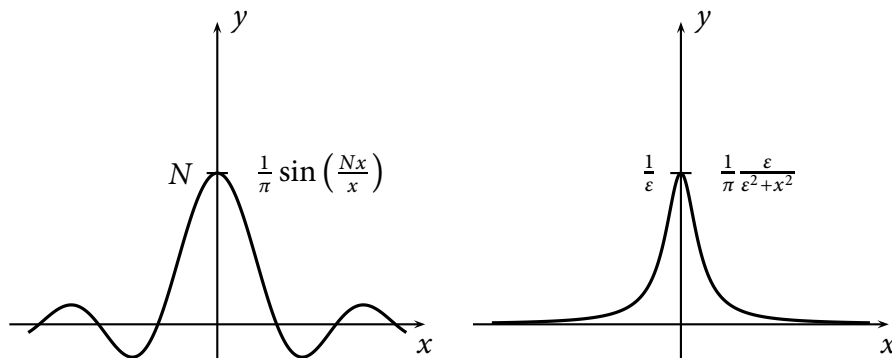
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) [\delta(x-1) + \delta(x+1)] = f(1) + f(-1)$
- $\int_a^b dx f(x) \delta(x-c) = \begin{cases} f(c) & a < c < b \\ 0 & c < a \text{ oder } c > b \end{cases}$
- $\int_{-1}^2 dx x^2 \delta(x-1) = 1$
- $\int_{-1}^2 dx x^2 \delta(x+2) = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x} \delta(x-y^2) = e^{-y^2}$

◁

Alternative Funktionsfolgen, die gegen die δ -Funktion konvergieren

- $\frac{1}{\pi} \sin \frac{Nx}{x}$ für $N \rightarrow \infty$
- $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



5.13 Bemerkung Mathematisch ist die δ -Funktion eine Distribution.

- Mit S bezeichnen wir den *Schwartz-Raum*. Für $f \in S$ gilt, $f \in C^\infty$ und $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ $\alpha \in \mathbb{N}_0$
- Distributionen sind stetige lineare Abbildungen vom Schwartz-Raum in die Menge der reellen Zahlen.

$$T : f \in S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

—○

5.14 Beispiel

- Für eine Funktion $h(x)$ erhalten wir die Distribution

$$H(f) \equiv \int dx h(x) f(x)$$

- Die Abbildung

$$f(x) \mapsto f(x_0)$$

ist gerade die δ -Funktion.

- Weitere Distributionen sind auch

$$f(x) \mapsto f'(x_0)$$

oft als $\delta'(x - x_0)$ bezeichnet.

◁

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Green'sche Funktion für den Oszillator

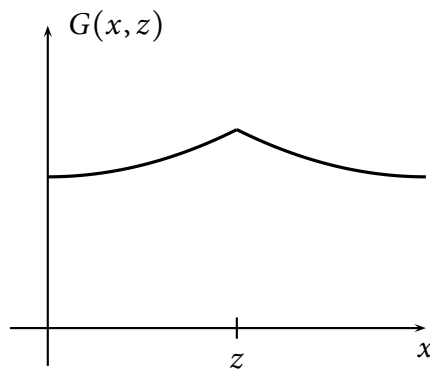
Die Differentialgleichung für die Green'sche Funktion lautet

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + a \frac{d}{dx}G(x, z) + bG(x, z) = \delta(x - z) \quad (5.30)$$

Integrieren wir diese Gleichung um eine kleine Umgebung $\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx \frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + a \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{d}{dx}G(x, z) + b \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx G(x, z) = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{d}{dx}G(x, z) \right]_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} + [G(x, z)]_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} + G(z, z)\varepsilon \end{aligned}$$

Die Funktion $G(x, z)$ ist aber stetig bei $x = z$ und nur die Ableitung hat einen Sprung.



Somit gilt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left[\frac{d}{dx}G(x, z) \right]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} = G'(z + \varepsilon, z) - G'(z - \varepsilon, z) = 1 \quad (5.31)$$

Da aber $\delta(x - z) = 0$ für $x \neq z$ gilt

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + a \frac{d}{dx}G(x, z) + bG(x, z) = 0 \quad x \neq z \quad (5.32)$$

und $G(x, z)$ kann konstruiert werden aus der Lösung der homogenen Gleichung mit obiger Bedingung für $x = z$.

5.15 Beispiel

Green'sche Funktion zur Differentialgleichung für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + G(x, z) = \delta(x - z) \quad G(0, z) = 0 \quad G\left(\frac{\pi}{2}, z\right) = 0$$

5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } G(x, z) &= A(z) \sin x & x < z \\ G(x, z) &= B(z) \cos x & x > z \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\text{Stetigkeit: } A(z) \sin z - B(z) \cos z = 0$$

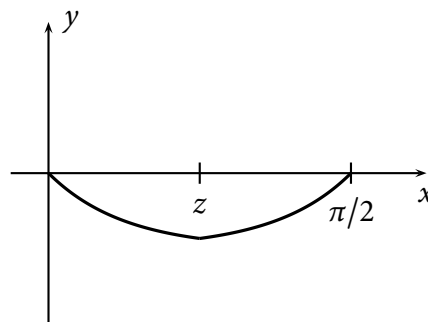
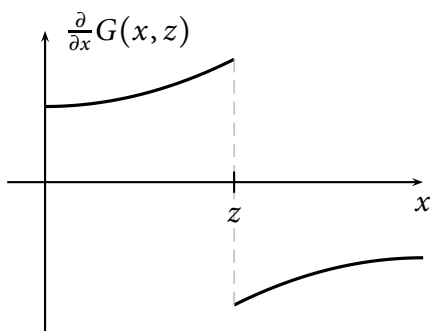
$$\text{Springen in Ableitung: } -A(z) \cos z + B(z) \sin z = -1$$

$$A(z) = -\cos z$$

$$B(z) = -\sin z$$

Die Green'sche Funktion hat die Form

$$G(x, z) = \begin{cases} -\sin z \cos x & x \geq z \\ -\cos z \sin x & x < z \end{cases}$$



◁

5.16 Beispiel

Finde eine partikulär Lösung zur Differentialgleichung auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$y''(x) + y'(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \frac{1}{\sin z} G(x, z)$$

$$= -\cos x \int_0^x dz \frac{\sin z}{\sin z} - \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} dz \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$= -x \cos x + \sin x \ln \sin x$$

◁

6 Differenzial- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

Die Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen mit mehreren Variablen wird mittels der *partiellen Ableitung* erreicht.

- Funktion $f(x, y)$
- partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Die partielle Ableitung entspricht der normalen Ableitung wobei die weiteren Variablen fixiert werden.

6.1 Bemerkung Äquivalente Schreibweisen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f \equiv f_x$$

—○

Manchmal gibt man die Variable, die fixiert werden soll, noch explizit an

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad : \text{ partielle Ableitung nach } x \text{ mit } y \text{ fixiert}$$

6.2 Beispiel

$$f(x, y) = x^3 y - e^{xy}$$
$$\Rightarrow \partial_x f = 3x^2 y - y e^{xy}$$
$$\partial_y f = x^3 - x e^{xy}$$
$$\partial_x^2 f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = 6xy - y^2 e^{xy}$$
$$\partial_y^2 f = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) = -x^2 e^{xy}$$
$$\partial_x \partial_y f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) = 3x^2 - e^{xy} - x y e^{xy}$$
$$\partial_y \partial_x f = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = 3x^2 - e^{xy} - x y e^{xy}$$

◁

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

- 6.3 Bemerkung** • Es gilt allgemein, dass die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keine Rolle spielt.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \quad (6.1)$$

- Die Verallgemeinerung für Funktionen mit mehr als zwei Variablen folgt analog. \rightarrow

6.4 Beispiel

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$\Rightarrow \partial_x f = yz$$

$$\partial_y f = xz$$

$$\partial_z f = xy \quad \triangleleft$$

Kettenregel

Die Variablen x, y der Funktion $f(x, y)$ hängen von einem Parameter t ab $\Rightarrow x(t), y(t)$.

Die Ableitung der Funktion $f(x(t), y(t))$ nach t ist somit gegeben durch

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (6.2)$$

\curvearrowright

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \sigma(\Delta x, \Delta y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &\cong \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

\curvearrowleft

6.5 Beispiel

- $f(x, y) = xe^{-y}$ mit $x = 1 + t, y = t^3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \underbrace{e^{-y(t)}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \underbrace{1}_{\frac{dx}{dt}} - \underbrace{x(t)e^{-y(t)}}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \underbrace{3t^2}_{\frac{dy}{dt}} \\ &= [1 - 3t^2(1+t)] e^{-t^3} \end{aligned}$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

$$\bullet f(x, y) = \int_0^y dx e^{-zx^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = e^{-zy^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \int_0^y dx \frac{\partial}{\partial z} e^{-zx^2} = \int_0^y dx -x^2 e^{-zx^2}$$

$$y = t^2 \quad z = t$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^{t^2} dx e^{-tx^2} \right] = e^{-zy^2} \cdot 2t - \left[\int_0^y dx x^2 e^{-zx^2} \right] \cdot 1$$

◁

6.1 Totales Differential

Wir betrachten die Funktion $f(x, y)$ auf \mathbb{R}^2 . Das totale Differential ist eine lineare Abbildung, die jedem Vektor $\vec{v} = (v_x, v_y)$ eine reelle Zahl zuordnet.

$$[df](\vec{v}) = \frac{d}{dt} f(x + v_x t, y + v_y t) = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y \quad (6.3)$$

Insbesondere haben wir die speziellen Differentiale

$$[dx](\vec{v}) = v_x$$

$$[dy](\vec{v}) = v_y$$

und somit können wir schreiben

$$[df](\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (6.4)$$

6.6 Bemerkung • Das totale Differential wird in der Physik oft als infinitesimale Änderung von f unter infinitesimalem dx und dy interpretiert.

- Es ist jedoch besser es zu interpretieren, dass für $\vec{v} = (\Delta x, \Delta y)$ gilt

$$\Delta f \cong [df](\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad \text{—} \circ$$

Ein Differential $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ heißt exakt, wenn die Funktion $f(x, y)$ existiert mit

$$A(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$B(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

Eine notwendige Bedingung, dass ein Differential exakt ist (und auf topologisch sehr vielen Gebieten auch hinreichend), ist

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \quad (6.5)$$

6.7 Beispiel

- $y dx + x dy \Rightarrow f(x, y) = xy + c$
- $y dx + 3x dy \Rightarrow$ inexakt
- Anwendung finden wir vor allem in der Thermodynamik

$$\begin{aligned} dF &= - \underbrace{S}_{\text{Entropie}} \underbrace{dT}_{\text{Änderung der Temperatur}} - \underbrace{p}_{\text{Druck}} dV : \text{Freie Energie} \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V &= -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -p \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V : \text{Maxwell Relation} \end{aligned}$$

◁

6.2 Variablen Transformation

Wir betrachten die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$. Die Variablen x_i sind aber ebenfalls Funktionen von n -anderen Variablen u_i :

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_n)$$

aus der Kettenregel folgt somit

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (6.6)$$

6.8 Beispiel (Polarkoordinaten)

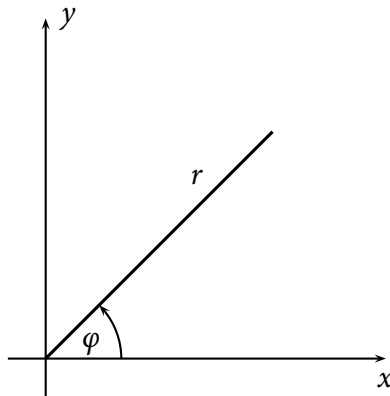
$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\cos \varphi}{r}\end{aligned}$$



Somit gilt

$$\begin{aligned}\partial_x &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi \\ \partial_y &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{\cos \varphi}{r} \partial_\varphi\end{aligned}$$

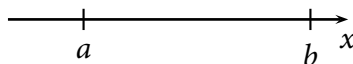
◁

6.3 Mehrdimensionale Integrale

Das bestimmte Integral

$$\int_a^b dx f(x)$$

kann aufgefasst werden als Integral über die eindimensionale Region $a \leq x \leq b$ der Funktion $f(x)$.

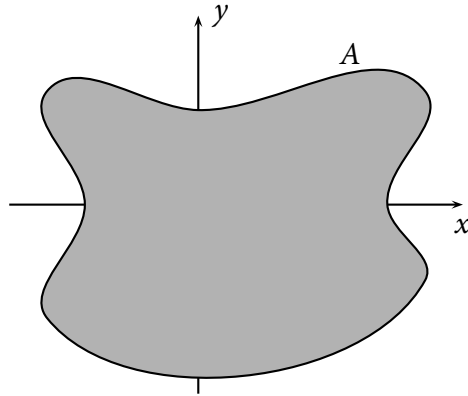


6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

Mehrdimensionale Integrale erweitern dies nun auf höherdimensionale Regionen:

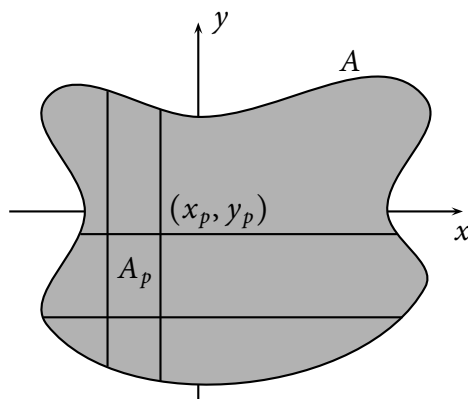
Das bestimmte Integral von $f(x, y)$ auf der Fläche A ist definiert als

$$I = \int_A dx dy f(x, y). \quad (6.7)$$



Die formale Definition folgt analog zum Riemann'schen Integral über den Grenzwert.

$$S = \sum_{p=1}^N f(x_p, y_p) \Delta A_p \quad (6.8)$$



Unterteile die Fläche A in N Unterflächen ΔA_p $p = 1 \dots N$ und wähle einen beliebigen Punkt (x_p, y_p) in A_p . Falls die Summe S gegen einen eindeutigen Wert konvergiert für $\Delta A_p \rightarrow 0$, existiert das Integral mit

$$I = \int_A dx dy f(x, y) = \lim_{\Delta A_p \rightarrow 0} S \quad (6.9)$$

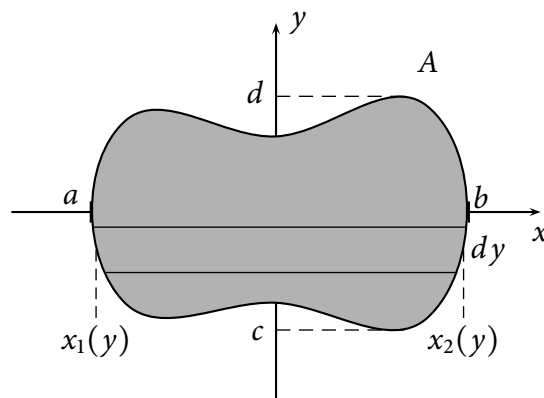
6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

Der bequemsten Weg das Integral zu berechnen ist zuerst das Integral über einen horizontalen Streifen zu berechnen

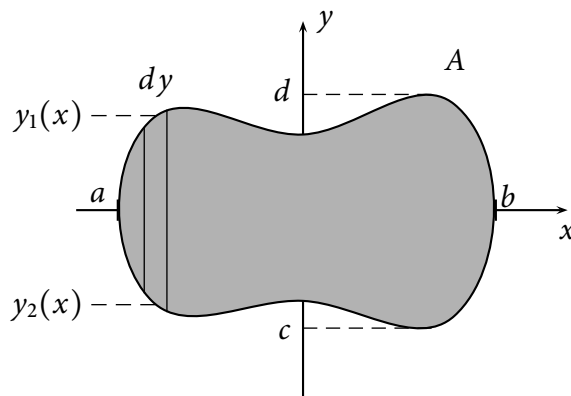
$$\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx f(x, y) \right] dy$$

und im zweiten Schritt das Integral über y zu berechnen

$$I = \int_c^d dy \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx f(x, y) \right)$$



6.9 Bemerkung Als Alternative kann auch zuerst das Integral über y berechnet werden und im zweiten Schritt über x .

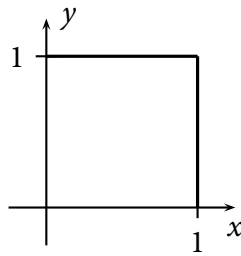


—○

6.10 Beispiel

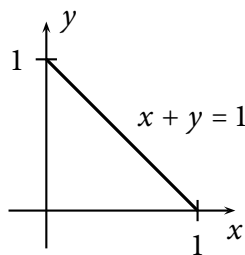
- Die Fläche A sei das Quadrat mit Seitenlänge 1 und $f(x, y) = xy^2$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN



$$\begin{aligned} \int_A dx dy x y^2 &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx x y^2 = \int_0^1 dy y^2 \left(\int_0^1 dx x \right) \\ &= \int_0^1 dy y^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Die Fläche A des Dreiecks beschränkt durch die Linien $x = 0$, $y = 0$ $x + y = 1$



$$\begin{aligned} \int_A dx dy x y^2 &= \int_0^1 dy y^2 \int_0^{1-y} dx x = \int_0^1 dy y^2 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{1-y} \right) \\ &= \int_0^1 dy \frac{1}{2} y^2 (1-y)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{10 - 15 + 6}{60} \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

◁

6.4 Variablen Transformation

Wir betrachten das Integral auf dem Bereich A

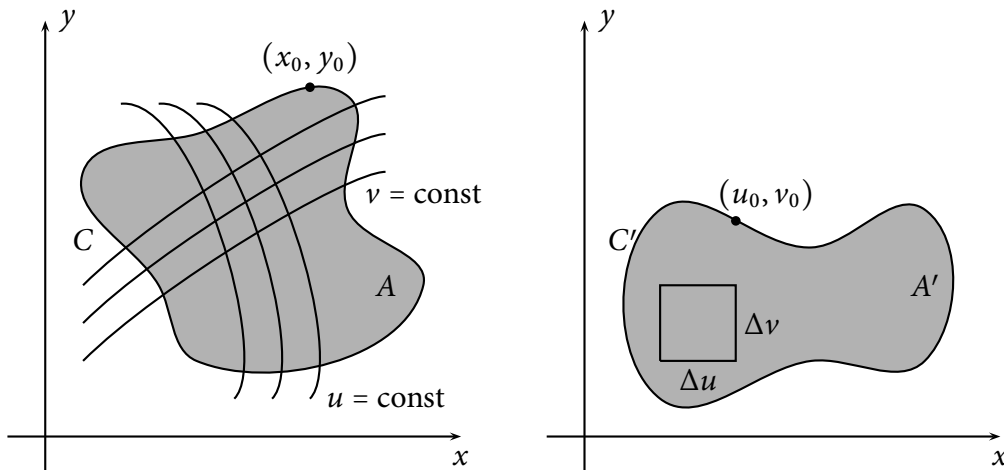
$$I = \int_A dx dy f(x, y)$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

wobei die Variablen $x(u, v), y(u, v)$ ebenfalls Funktionen von den Variablen u, v sind.

$$\Rightarrow \hat{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

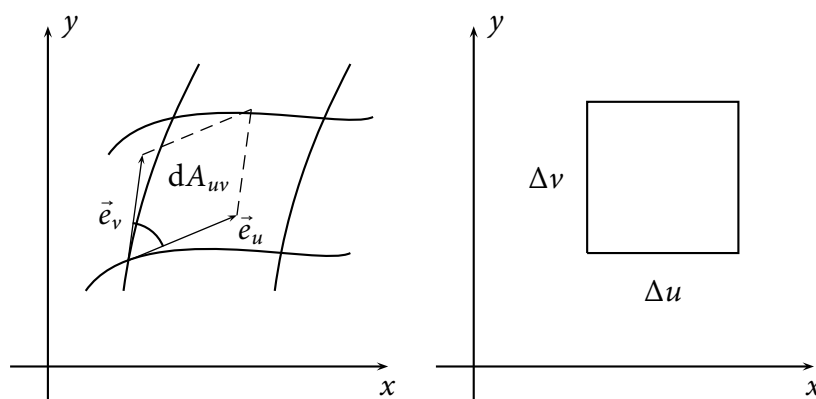
Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie das Integral in den neuen Variablen aussieht.



Zuerst müssen wir den Integrationsbereich A in den neuen Integrationsbereich A' umformen. D.h., der Bereich A ist beschränkt mit der geschlossenen Kontur C . Der Integrationsbereich A' in den neuen Variablen ist beschränkt mit der Kontur C' :

- $(u_0, v_0) \in C' \Rightarrow (x_0(u_0, v_0), y_0(u_0, v_0)) \in C$
- $(u, v) \in A' \Rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in A$

Die Integration in den x, y Koordinaten ist der Limes von kleinen Volumenelementen.



6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

Daher müssen wir die Fläche dA_{uv} für ein kleines Quadrat $\Delta u \cdot \Delta v$ berechnen: dA_{uv} ist ein Parallelogramm aufgespannt mit

$$\begin{aligned}\vec{e}_u &= \begin{pmatrix} \partial_u x(u, v) \\ \partial_u y(u, v) \end{pmatrix} && : \text{Tangentenvektor an die Linie } v = \text{const} \\ \vec{e}_v &= \begin{pmatrix} \partial_v x(u, v) \\ \partial_v y(u, v) \end{pmatrix} && : \text{Tangentenvektor an die Linie } u = \text{const}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow dA_{uv} &= \Delta u \cdot \Delta v \cdot |\vec{e}_u| |\vec{e}_v| |\sin \varphi| \\ &= \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|}_{J: \text{Jacobian}} \underbrace{\Delta u \cdot \Delta v}_{du dv}\end{aligned}$$

Somit folgt aus der Definition des Integrals

$$\begin{aligned}I &= \int_A dx dy f(x, y) = \lim_{\Delta A_p \rightarrow 0} \sum_{p=1}^N f(x_p, y_p) \Delta A_p && (6.10) \\ &= \lim_{\Delta u \Delta v \rightarrow 0} \sum_{p=1}^N f(x(u_p, v_p), y(u_p, v_p)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \Delta u \cdot \Delta v \\ &= \int_{A'} du dv f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \\ &= \int_{A'} du dv \hat{f}(u, v) J(u, v)\end{aligned}$$

mit dem *Jacobian*

$$J(u, v) = \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right| \quad (6.11)$$

6.11 Beispiel

$$\begin{aligned}& \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ & [J(\varphi, \vartheta) = \cos(\varphi) \cos(\vartheta)] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi} \sqrt{1-\cos^2 \vartheta}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\end{aligned}$$

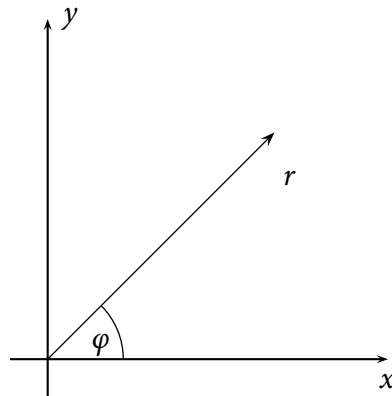
◁

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

Polar Koordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow J(r, \varphi) &= \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| \\ &= |\cos(\varphi)r \cos(\varphi) - \sin(\varphi)(-1)r \sin(\varphi)| = r \end{aligned}$$

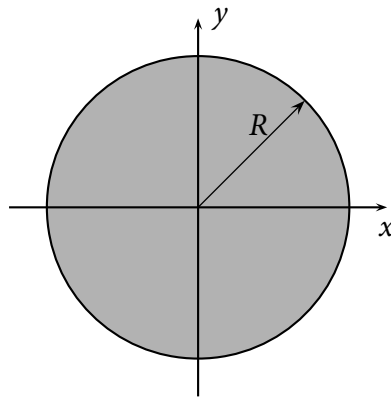
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_A dx dy f(x, y) &= \int_{A'} d\varphi dr r f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &= \int_{A'} d\varphi dr r \hat{f}(r, \varphi) \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.12 Beispiel

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$A :=$ Kreis mit Radius R

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN



$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{f}(r, \varphi) &= e^{-r^2} \\ I &= \int_A dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_{A'} d\varphi dr r e^{-r^2} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^R dr r e^{-r^2} \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi (1 - e^{-R^2})\end{aligned}$$

◁

Als Anwendung können wir jetzt das Integral

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

berechnen:

$$\begin{aligned}F^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = \pi \\ \Rightarrow F &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung der Variablen Transformation in höheren Dimensionen ergibt:

$$f(x_1, \dots, x_n) \quad x_i(u_i, \dots, u_j)$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN

$$\begin{aligned} I &= \int_A dx_1 \dots, dx_n \quad f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{A'} du_1 \dots, du_n \quad \hat{f}(u_1, \dots, u_n) J(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Der Jacobian ist stets durch die Variablentransformationsmatrix gegeben

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \quad n \times n \text{ Einträge,}$$

wobei $J = \det M$: Determinante von M (siehe Lineare Algebra).

In der dritten Dimension lautet er

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

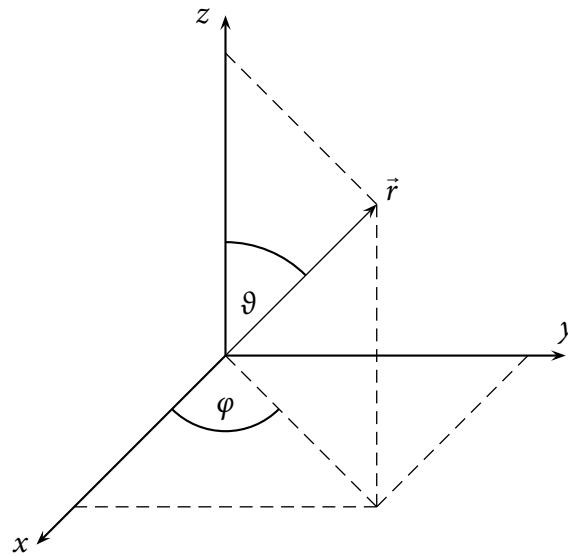
und

$$\begin{aligned} J &= \partial_u x (\partial_v y \partial_w z - \partial_w y \partial_v z) \\ &\quad - \partial_u y (\partial_v x \partial_w z - \partial_w x \partial_v z) \\ &\quad + \partial_u z (\partial_v x \partial_w y - \partial_w x \partial_v y) \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ y &= r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ z &= r \cos(\vartheta) \\ \Rightarrow r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

6. DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MIT MEHREREN VARIABLEN



Die Fläche $r = \text{const}$ beschreibt eine Kugel mit Zentrum $(0, 0, 0)$ und Radius r .

- $r \in [0, \infty)$
- $\varphi \in [0, 2\pi)$
- $\vartheta \in [0, \pi)$

$$I = \int_A dx dy dz f(x, y, z) = \int_{A'} d\varphi d\vartheta \sin(\vartheta) dr r^2 \hat{f}(r, \varphi, \vartheta)$$

6.13 Beispiel

Volumen der Kugel: $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\begin{aligned} \int_A dx dy dz 1 &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta}_2 \underbrace{\int_0^R dr R^2}_{\frac{1}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

◁

7 Vektoranalysis

Wir sind interessiert an Funktionen von $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- $f(x)$: reelle Funktion
- $f(\vec{r})$: skalares Feld $\phi(\vec{r}), E(\vec{r})$
- $\vec{f}(x)$: Raumkurve, $\vec{x}(t), \vec{v}(t)$
- $\vec{f}(\vec{r})$: Vektorfeld, $\vec{F}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})$

Ableiten eines Vektors:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i(t) \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) \vec{e}_i$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ \vdots \\ A_n(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_i(\vec{r}) \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x A_1(\vec{r}) \\ \partial_x A_2(\vec{r}) \\ \partial_x A_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} A_i(\vec{r}) \vec{e}_i$$

7.1 Bemerkung Mittels Kettenregel ermitteln wir das Verhalten von verschiedenen Punkten

- $\frac{d}{du}(\phi \vec{a}) = \phi \frac{d\vec{a}}{du} + \left(\frac{d\phi}{du}\right) \vec{a}$
- $\frac{d}{du}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \frac{d\vec{b}}{du} + \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right) \cdot \vec{b}$
- $\frac{d}{du}(\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{d\vec{b}}{du}\right)$

—○

7.2 Beispiel Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{d\vec{r}}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_\vartheta| = r$$

$$|\vec{e}_r| = 1$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta = 0$$

◁

7.1 Linien- und Oberflächenintegrale

Ein Linienintegral ist gegeben durch Ausdrücke von der Form

$$I = \int_C d\vec{r} \vec{A}(x, y, z),$$

wobei C eine Kurve im Raum darstellt. Die Kurve ist parametrisiert durch einen Parameter t .

$$[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{r}(t) \in C$$

mit $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_A$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_B$. Die Berechnung des Linienintegrals erfolgt dann mittels

$$d\vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \cdot dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right] \cdot \vec{A}(\vec{r}(t))$$

7.3 Beispiel

Die Arbeit entlang eines Weges $\vec{r}(t)$ im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

$$W = \int_C d\vec{r} \vec{F}(\vec{r})$$

◁

7. VEKTORANALYSIS

7.4 **Bemerkung** Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve C:

$$t = f(s) \Rightarrow \vec{r}(f(s)) \equiv \vec{r}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_C d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] \vec{A}(\vec{r}(t)) \\ &= \int_{s_0}^{s_1} ds \underbrace{f' \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]}_{\frac{d\vec{r}}{ds}} \vec{A}(\vec{r}(t)) \end{aligned}$$

—○

7.5 **Beispiel**

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ \vec{r}(\varphi) &= R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ \frac{d}{d\varphi} \vec{r} &= R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{2\pi} d\varphi R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \frac{R}{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))R^2} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \end{aligned}$$

◁

7.6 **Bemerkung** Weitere Linienintegrale

$$\int_C d\vec{r} f(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt f(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} : \text{Vektorgröße}$$

Bogenlänge

$$\begin{aligned} \int_C ds &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \\ \Rightarrow \int_C ds \phi(\vec{r}) &: \text{Skalare Größe} \\ \int_C ds \vec{F}(\vec{r}) &: \text{Vektorgröße} \end{aligned}$$

—○

7. VEKTORANALYSIS

7.7 Beispiel (Länge einer Geraden)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\varphi)t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_C ds = \int_0^1 dt \sqrt{1 + \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1 + \sin^2(\varphi)}$$

◁

7.8 Beispiel (Umfang eines Kreises)

$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} d\varphi R \sqrt{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = R \cdot 2\pi$$

◁

Eine Fläche im \mathbb{R}^3 können wir darstellen mit Hilfe von zwei Parametern.

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

7.9 Beispiel

Eine Ebene aufgespannt durch \vec{a} und \vec{b} durch den Punkt \vec{r}_0 hat die Form

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

Eine Kugel mit dem Radius R

$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

◁

Die Vektoren

$$\vec{e}_u = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$$

$$\vec{e}_v = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$$

beschreiben die Tangentenvektoren an die Linien auf der Fläche mit $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$. Das Flächendifferential dA in einem Punkt hat somit die Form

$$dA = |\vec{e}_u(u, v) \times \vec{e}_v(u, v)| \stackrel{du dv}{=} \left| \frac{d\vec{r}}{du}(u, v) \times \frac{d\vec{r}}{dv}(u, v) \right| du dv$$

7. VEKTORANALYSIS

Somit ist der Flächeninhalt einer Fläche im \mathbb{R}^3 gegeben durch

$$F_B = \int \int_B du dv \left| \frac{d}{du} \vec{r}(u, v) \times \frac{d}{dv} \vec{r}(u, v) \right|$$

7.10 Beispiel

Darstellung der Fläche

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{du}(u, v) \times \frac{d\vec{r}}{dv}(u, v) \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

$$F_B = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \sqrt{3} = \int_0^1 dv \sqrt{3}(1-v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \triangleleft$$

Bei einem Oberflächenintegral wird jetzt jeder Punkt auf der Oberfläche mit einer Funktion gewichtet.

$$\int_S ds \phi(\vec{r}) = \int_B du dv \phi(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{d\vec{r}}{du}(u, v) \times \frac{d\vec{r}}{dv}(u, v) \right| : \text{Skalares Integral}$$

Es ist jedoch auch möglich vektorielle Oberflächenintegrale zu definieren. Insbesondere ist das Oberflächenelement

$$d\vec{A} = \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} du dv = \vec{n} dA$$

eine Vektorgröße, wobei der Einheitsvektor \vec{n} senkrecht auf der Oberfläche steht.

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv}}{\left| \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} \right|}$$

Die Richtung von \vec{n} hängt von der Orientierung der Oberfläche ab. Bei geschlossenen Flächen, wie z.B. einer Kugel, wird die Orientierung normalerweise so gewählt, dass \vec{n} nach außen zeigt.

7. VEKTORANALYSIS

7.11 Beispiel (Kugel)

$$\begin{aligned}\vec{r}(\vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\vartheta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ |\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi| &= |\sin(\vartheta)| \\ \Rightarrow \vec{n} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \vec{r}(\vartheta, \varphi)\end{aligned}$$

Wir finden jetzt die weiteren Oberflächenintegrale

$$\begin{aligned}\int_S d\vec{s} \vec{F}(\vec{r}) &= \int_B du dv \vec{F}(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) : \text{skalare Gr\o{o}\ss e} \\ \int_S d\vec{s} \phi(\vec{r}) &= \int_B du dv \phi(u, v) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) : \text{Vektorgr\o{o}\ss e} \\ \int_S d\vec{s} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \int_B du dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \times \vec{F}(u, v) : \text{Vektorgr\o{o}\ss e}\end{aligned}$$

7.12 Beispiel

- Der Tragfl\u00fcgel eines Flugzeugs erzeugt durch seine Form und den Luftstrom verschiedene Dr\u00fccke auf der Unter- und Oberseite. Bezeichnen wir mit $p(\vec{r})$ das erzeugte Druckfeld, so ist der Auftrieb des Flugzeugs gegeben durch

$$\vec{F} = \int_S d\vec{s} p(\vec{r}) : \text{wobei } S \text{ die Oberfl\u00e4che der Tragfl\u00e4chen ist.}$$

- Eine Fl\u00fcssigkeit flie\u00dft mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$. D.h. jedem Punkt \vec{r} ordnen wir die lokale Geschwindigkeit der Fl\u00fcssigkeit zu. Zudem hat sie eine Massendichte $\rho(\vec{r})$. Die lokale Masse, die pro Zeiteinheit durch die Oberfl\u00e4che flie\u00dft, ist gegeben durch

$$M = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \rho(\vec{r}).$$

7.2 Ableitungsoperatoren

7.13 Definition (Gradient)

Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ ordnet jedem Punkt \vec{r} im Raum eine reelle Zahl zu. Der Gradient des Skalarfeldes ist definiert als

$$\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Somit ist $\nabla\phi(\vec{r})$ ein Vektorfeld. In seinen Komponenten hat es die Form (in der natürlichen Basis)

$$\nabla\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}. \quad \times$$

Das Verhalten des Skalarfeldes von einem Punkt \vec{r}_0 lässt sich mit dem Gradienten sehr einfach beschreiben.

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \vec{r}_0 + s\vec{a} \\ \Rightarrow \frac{\partial\phi(\vec{r}(s))}{ds} &= \vec{a} \cdot \nabla\phi(\vec{r}_0) : \text{Richtungsableitung} \end{aligned}$$

Der Gradient zeigt somit in die Richtung der stärksten Zunahme des Skalarfeldes.

Die Gleichung $\phi(\vec{r}) = \text{const}$ bestimmt eine Fläche im \mathbb{R}^3 , wobei der Gradient immer senkrecht auf dieser Fläche steht.

7.14 Definition (Ableitungsoperator)

Der Name *Ableitungsoperator* kommt von der Eigenschaft, dass jedem Skalarfeld ein Vektorfeld zugeordnet ist. Daher schreibt man auch oft

$$\nabla = \partial_x\vec{e}_x + \partial_y\vec{e}_y + \partial_z\vec{e}_z, \quad : \text{Nabla}$$

wobei für jedes Skalarfeld gilt

$$\nabla\phi(\vec{r}) = (\partial_x\vec{e}_x + \partial_y\vec{e}_y + \partial_z\vec{e}_z)\phi(\vec{r}) = \partial_x\phi\vec{e}_x + \partial_y\phi\vec{e}_y + \partial_z\phi\vec{e}_z \quad \times$$

7.15 Beispiel

$$\phi(x, y, z) = xyz \quad \nabla\phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yx \end{pmatrix}$$

$$\phi(x, y, z) = MmG \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} : \text{Gravitationspotential}$$

$$\Rightarrow F_g = -\nabla\phi = MmG \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \text{Gravitationskraft} \quad \triangleleft$$

7. VEKTORANALYSIS

7.16 Definition (Divergenz)

Betrachte ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, das jedem Punkt \vec{r} einen Vektor zuordnet.

Die *Divergenz* von $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad \times$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes beschreibt physikalisch Quellterme.

- Die Divergenz eines \vec{E} -Feldes verschwindet, wenn keine Ladungen vorhanden sind: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.
- Für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ und die Massendichte $\rho(\vec{r})$ einer fließenden Flüssigkeit gilt $\operatorname{div} [\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})] = 0$, wenn keine Quelle/Abfluss vorhanden ist.

7.17 Beispiel

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 3$$

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

◁

7.18 Definition (Laplace Operator)

Die Kombination von Gradient und Divergenz ergibt den *Laplace Operator* für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$.

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \operatorname{div} \nabla \phi(\vec{r}) = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi \quad \times$$

7.19 Beispiel

Gravitationspotential $\phi(\vec{r}) = MmG \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \neq 0$$

Da aber bei $\vec{r} = 0$ eine Quelle/Masse sitzt, die ein Gravitationsfeld erzeugt, sollte also $\operatorname{div} \nabla \phi(\vec{r})$ bei $\vec{r} = 0$ nicht verschwinden. In der Tat gilt:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = 4\pi MmG \underbrace{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}_{\delta(\vec{r})},$$

mit der bekannten δ -Funktion.

◁

7. VEKTORANALYSIS

7.20 Definition (Rotation)

Die *Rotation* ist definiert für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mittels

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \vec{e}_x (\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \vec{e}_y (\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \vec{e}_z (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und ist somit wieder ein Vektorfeld. ×

Die physikalische Interpretation ist, dass die Rotation Wirbel/Drehungen beschreibt:

Betrachte das Kraftfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Objekt das wir in einem solchen Feld platzieren, beginnt sich um seine eigenen Achse zu drehen.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{Drehachse des Objekts}$$

7.21 Beispiel

Maxwell Gleichung Elektrodynamik

\vec{E} : elektrisches Feld,

ρ : Ladungsdichte,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho(\vec{r})$$

\vec{B} : magnetisches Feld

j : Ladungsstrom

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{L} \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} + \frac{1}{L} \partial_t \vec{E} = j(\vec{r})$$

Quantenmechanik des Wasserstoffatoms

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + \frac{l^2}{|\vec{r}|} \psi(\vec{r}, t)$$

Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}$$
 ◁

7. VEKTORANALYSIS

7.22 **Bemerkung** Für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ gilt

$$\text{rot } \nabla \phi(\vec{r}) = 0$$

↷

$$\text{rot} \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi \\ \partial_z \partial_x \phi - \partial_x \partial_z \phi \\ \partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↶

Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt

$$\text{div } \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

—○

Zudem sind folgende Relationen einfach zu beweisen

$$\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \times (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \times \vec{A} + \phi (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

7.3 Gauß'scher Integralsatz

Die Integralsätze stellen einen Zusammenhang her zwischen den Ableitungsoperatoren und den Oberflächenintegralen. Der Gauß'sche Integralsatz besagt

$$\int_V d\vec{r} \text{ div } \vec{A}(\vec{r}) = \int_{S=\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_{S=\partial V} ds \vec{n} \cdot \vec{A}(\vec{r}),$$

wobei ∂V die Oberfläche des Volumens V beschreibt und \vec{n} senkrecht auf der Oberfläche steht und nach außen zeigt.

7. VEKTORANALYSIS

☞ Für einen Quader mit dem Volumen V gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_V dV \operatorname{div} \vec{A} \\
 &= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz [\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z] \\
 &= \int_0^b dy \int_0^c dz A_x(a, y, z) - \int_0^b dy \int_0^c dz A_x(0, y, z) \\
 &\quad + \int_0^a dx \int_0^c dz A_y(x, b, z) - \int_0^a dx \int_0^c dz A_y(x, 0, z) \\
 &\quad + \int_0^a dx \int_0^b dy A_z(x, y, c) - \int_0^a dx \int_0^b dy A_z(x, y, 0) \\
 &= \int_{\partial V=S} d\vec{s} \cdot \vec{A}
 \end{aligned}$$

Für ein allgemeines Volumen folgt der Satz durch Zerlegen des Volumens in kleine Quader und mittels einem Grenzwert. ☞

7.23 Bemerkung Falls das umschlossene Gebiet Löcher aufweist, so müssen diese Löcher bei der Bestimmung des Randes berücksichtigt werden. —◦

7.24 Beispiel

Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 3$$

mit dem Volumen V einer Kugel mit Radius R .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{A} &= 3 \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3 \\
 \int_{S=\partial V} ds \vec{n} \cdot \vec{r} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \cdot R^3 = 4\pi R^3
 \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung Die Änderung der Teilchenzahl von einer Flüssigkeit im Volumen V hat die Form

$$\partial_t N_v(t) = \partial_t \int_V d\vec{r} \varphi(\vec{r}, t) = \int_V d\vec{r} \partial_t \varphi(\vec{r}, t), \quad \varphi(\vec{r}, t) : \text{Teilchendichte}$$

7. VEKTORANALYSIS

Teilchenfluss aus dem Volumen: $\int_{\partial V=S} d\vec{r} \cdot \underbrace{\varphi(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)}_{j(\vec{r}, t): \text{Teilchenstrom}}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \partial_t N_v(t) &= \int_V d\vec{r} \partial_t \varphi(\vec{r}, t) = - \int_{\partial V=S} d\vec{s} \vec{j}(\vec{r}, t) \\ &= - \int_V d\vec{r} \operatorname{div} j(\vec{r}, t) : \text{gilt für alle Volumen } V\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t \varphi(\vec{r}, t) + \operatorname{div} j(\vec{r}, t) = 0$$

◁

7.4 Integralsatz von Stokes

Der Satz von Stokes verbindet Oberflächenintegrale mit Linienintegralen entlang der Begrenzungslinie der Oberfläche. Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt

$$\int_S d\vec{s} \cdot (\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})) = \int_{C=\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

Dabei bildet der Normalenvektor \vec{n} auf der Oberfläche mit der Umlaufrichtung der Linie C eine rechtshändige Schraube.

7.25 Bemerkung Die Fläche soll orientierbar sein, der Satz ist nicht anwendbar auf ein Möbiusband. →

Für ein Vektorfeld mit $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ gilt somit, dass alle geschlossenen Linienintegrale verschwinden.

$$\int_C d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

⇒ man kann jedoch nun zeigen, dass somit ein Skalarfeld ϕ existiert mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \nabla \phi(\vec{r}).$$

7.5 Anwendung: Coulomb Potential

Eine homogen gefüllte Kugel mit Masse M erzeugt ein Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{\alpha}{|r|} && : \alpha = MmG \\ & && : |r| > R \text{ Radius der Kugel} \\ & && : M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho\end{aligned}$$

7. VEKTORANALYSIS

Mittels dem Gradienten erzeugt dies das Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Weiter gilt, dass $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$. Es bleibt somit die Frage, was bei $\vec{r} = 0$ passiert. Allerdings macht das Resultat keinen Sinn für $|r| < R$, da sich innerhalb der Kugel das Potential verändert. Der Satz von Gauß besagt wiederum für S eine Kugel mit Radius $> R$

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \alpha \cdot \frac{\vec{r}}{|r|} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot |r|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \alpha = 4\pi\alpha : \text{unabhängig von } L \\ &\stackrel{\text{Satz von Gauß}}{=} \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}), \end{aligned}$$

also muss die $\operatorname{div} \vec{F}$ innerhalb des massiven Körpers gerade so sein, dass sich die Konstante $4\pi\alpha$ ergibt.

Der Körper hat eine homogene Massendichte und daher lässt sich das Potential schreiben

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \frac{3\alpha}{4\pi R^3} \frac{1}{|r - r'|}$$

Für $|r| > R$ ergibt dies $\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|r|}$, aber innerhalb des Körpers wird das Potential zu

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha}{2} \frac{|r|^2}{R^3} & |r| < R \\ \frac{\alpha}{|r|} & |r| > R \end{cases}$$

und das Gravitationsfeld wird zu

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \alpha \frac{\vec{r}}{R^3} & |r| < R \\ \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & |r| > R \end{cases}$$

und die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{R^3} & |r| < R \\ 0 & |r| > R \end{cases}$$

Der Satz von Gauß ist somit erfüllt für den realen Fall einer homogenen Kugel.

Um jetzt das Verhalten einer reinen Punktladung zu untersuchen, lassen wir den Radius der Kugel gegen Null gehen, behalten die Masse aber konstant.

7. VEKTORANALYSIS

Im Limes $R \rightarrow 0$ konvergiert $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})$ aber gegen eine 3-dimensionale δ -Funktion

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) \xrightarrow{R \rightarrow 0} 4\pi\delta(\vec{r})$$

$\leadsto \int d\vec{r} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 4\pi$ unabhängig von R und für $R \rightarrow 0$ ist alles Gewicht in einer kleinen Kugel um den Ursprung konzentriert. $\leftarrow \rho$

Somit gilt für das Potential einer punktförmigen Masse

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{\alpha}{|\vec{r}|} & \vec{F}(\vec{r}) &= \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ \Delta\phi(\vec{r}) &= -4\pi\alpha\delta(\vec{r}) \end{aligned}$$

7.26 Bemerkung In der Elektrostatik hat das Potential eines geladenen Punktteilchens (Elektron/Proton) ebenfalls das Potential $\phi(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\vec{r}|}$. Daher der Name *Coulomb Potential*. $\rightarrow \circ$

8 Krummlinige Koordinaten

Die drei häufigsten Koordinatensysteme sind

x, y, z : Kartesische Koordinaten

r, φ, z : Zylinder Koordinaten

r, φ, ϑ : Kugel Koordinaten

Eine gemeinsame Eigenschaft dieser Systeme ist, dass sie orthogonal sind und, dass der Laplace-Operator separiert. (siehe später)

Die Koordinaten Transformation hat im Allgemeinen die Form

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3) \\x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3) \\x_3 &= x_3(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{r}(u_1, u_2, u_3) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien sind definiert als

$$\vec{T}_i \equiv \vec{e}_{u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

Wir sind interessiert an orthogonalen Koordinatensystemen mit

$$\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Somit bilden in jedem Punkt \vec{r} die Vektoren \vec{e}_{u_i} eine Orthonormierte Basis. Die Vektoren \vec{e}_{u_i} hängen somit explizit vom Raumpunkt \vec{r} ab.

8.1 Bemerkung Wir können auch schreiben

$$\vec{e}_{u_1} = \vec{e}_{u_2} \times \vec{e}_{u_3} \quad \text{—o}$$

Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ können wir einfach in den neuen Koordinaten ausdrücken

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \phi(\vec{r}(u_1, u_2, u_3)).$$

Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ müssen wir zusätzlich die neue Basis \vec{e}_{u_i} berücksichtigen.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{u_i} A_{u_i}(u_1, u_2, u_3).$$

A_{u_i} erhalten wir mittels dem Skalarprodukt

$$A_{u_i} = \vec{A} \cdot \vec{e}_{u_i}.$$

8. KRUMMLINIGE KOORDINATEN

8.2 **Bemerkung** In den krummlinigen Koordinaten sind jetzt A_{u_i} und \vec{e}_{u_i} von u_1, u_2, u_3 abhängig.

$$\Rightarrow \partial_{u_j} \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial A_{u_i}}{\partial u_j} + A_{u_i} \frac{\partial \vec{e}_{u_i}}{\partial u_j} \right] \quad \text{—} \circ$$

8.3 Beispiel

Geschwindigkeitsvektor \vec{v} in Zylinder-Koordinaten

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z \quad \triangleleft$$

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Ableitungsoperatoren transformieren.

8.4 Definition (Gradient)

Die Komponente von $\nabla \phi$ in \vec{e}_{u_i} ist

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)_{u_i} &= \nabla \phi \cdot \vec{e}_{u_i} = \nabla \phi \cdot \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{h_{u_i}} \partial_{u_i} \phi(\vec{r}(u_1, u_2, u_3)) = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \\ \Rightarrow \nabla \phi &= \sum_i \vec{e}_{u_i} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \quad \times \end{aligned}$$

8.5 Definition (Divergenz)

Für die Divergenz in krummlinigen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_1} h_{u_3} A_{u_2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_1} h_{u_2} A_{u_3}) \right] \quad \times \end{aligned}$$

☞ Betrachte den Anteil $\vec{e}_{u_i} A_{u_i}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{e}_{u_1} A_{u_1}) &= \nabla \cdot ((\vec{e}_{u_2} \times \vec{e}_{u_3}) A_{u_1}) \\ &= \nabla \cdot (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} (\nabla u_2 \times \nabla u_3)) \\ &= \nabla (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &\quad + h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &= \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e}_{u_1} \cdot \nabla (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \\ &= \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \end{aligned}$$

und analog für die anderen Komponenten. $\leftarrow \rho$

8. KRUMMLINIGE KOORDINATEN

8.6 Definition (Laplace Operator)

Als wichtige Anwendung erhalten wir den Laplace Operator in krummlinigen Koordinaten

$$\nabla\phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_1}h_{u_2}h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_{u_2}h_{u_3}}{h_{u_1}} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_{u_1}h_{u_3}}{h_{u_2}} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_{u_1}h_{u_2}}{h_{u_3}} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad \times$$

8.7 Definition (Rotaion)

Zur Vollständigkeit noch die Rotaion

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{h_{u_2}h_{u_3}} \vec{e}_{u_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_3}A_{u_3}) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_2}A_{u_2}) \right] \\ &+ \frac{1}{h_{u_1}h_{u_3}} \vec{e}_{u_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_1}A_{u_1}) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_3}A_{u_3}) \right] \\ &+ \frac{1}{h_{u_1}h_{u_2}} \vec{e}_{u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2}A_{u_2}) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_1}A_{u_1}) \right] \end{aligned} \quad \times$$

8.1 Zylinderkoordinaten

Wir haben die Transformation

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_\varphi = r$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_z = 1$$

8. KRUMMLINIGE KOORDINATEN

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \phi \\ \Delta\phi &= \left[\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2 \right] \phi \\ &= \partial_r^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \phi + \partial_z^2 \phi \\ \int dr^3 &= \int d\varphi \int dr r \int dz\end{aligned}$$

8.2 Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad h_\vartheta = r$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_\varphi = r \sin(\vartheta)$$

$$\nabla\phi = \left[\vec{e}_r \partial_r \phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta \phi + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi \phi \right]$$

$$\Delta\phi = \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_\vartheta) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \partial_\varphi^2 \right] \phi$$

$$\int d\vec{r} = \int dr r^2 \int d\vartheta \sin(\vartheta) \int d\varphi$$

9 Fourierreihe und Fouriertransformation

9.1 Fourierreihe

Im Folgenden sind wir an periodischen Funktionen $f(x)$ interessiert, mit Periode L , d.h.

$$f(x + L) = f(x)$$

Insbesondere dürfen die Funktionen auch komplexwertig sein, und sollen die *Dirichlet Bedingung* erfüllen.

1. $|f(x)|$ ist integrierbar
2. $f(x)$ ist stückweise stetig
3. $f(x)$ hat endlich viele Extrema
4. $f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)]$

Ein spezielles Set von solchen Funktionen ist

$$f_n(x) = e^{i k_n x} \quad k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx f_n(x) f_m^*(x) = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i \frac{2\pi}{L} x(n-m)} = \delta_{n,m}.$$

9.1 Definition (Fourierkoeffizienten)

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(x)$ sind definiert als

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-i k_n x} f(x) dx \equiv c_n. \quad \times$$

9.2 Definition (Fourierreihe)

Die Fourierreihe hat somit die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i k_n x},$$

und es gilt, dass diese Reihe konvergiert und die Funktion identisch zu $f(x)$ ist, d.h. wir können $f(x)$ darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i k_n x} \quad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-i k_n x} f(x).$$

Somit können wir jede Funktion in *elementare Schwingungen* zerlegen. ×

9. FOURIERREIHE UND FOURIERTRANSFORMATION

9.3 **Bemerkung** $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ und somit haben wir die Funktion in sin und cos zerlegt. —○

9.4 **Bemerkung** Alternative Form der Fourierreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cos(k_n x) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(k_n x) \\ &= \underbrace{\hat{f}(0)}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))}_{a_n} \cos(k_n x) + i \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))}_{b_n} \sin(k_n x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \cos(k_n x) f(x)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(k_n x) f(x) \quad \text{—○}$$

- 9.5 **Bemerkung**
- Falls $f(x)$ reell ist, so gilt $\hat{f}(n) = \hat{f}^*(-n)$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$)
 - Falls $f(x)$ symmetrisch ist, d.h. $f(x) = f(-x)$, so gilt $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ ($b_n = 0$)
 - Falls $f(x)$ symmetrisch und reell ist, so ist $\hat{f}(n)$ symmetrisch und reell. ($a_n \in \mathbb{R}, b_n = 0$) —○

Die Idee für den Beweis für den obigen Satz hat die Form

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{ik_n x} = \frac{1}{L} \int_0^L dy \sum_{n=-N}^N e^{ik_n(x-y)} f(y) = \int_0^L dy D_N(x-y) f(x)$$

mit

$$D_N(x-y) \equiv \frac{1}{L} \frac{\sin\left(\frac{2\pi(N+\frac{1}{2})(x-y)}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{L}\right)} = e^{-iN\frac{2\pi}{L}(x-y)} \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}\right)^{2N+1}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}}$$

Die Funktion $D_N(x)$ gleicht aber der Funktionenreihe, die gegen eine δ -Funktion konvergiert, d.h.

$$\int_0^L dy D(x-y) = 1.$$

9. FOURIERREIHE UND FOURIERTRANSFORMATION

Formal gilt daher

$$D_N(x-y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL),$$

und somit

$$F_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^L dy \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL) f(y) = f(x)$$

9.6 Bemerkung Die Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x+jL)$$

wird in der Physik oft verwendet. —○

9.7 Bemerkung Für die Fourierkoeffizienten gilt die Gleichung

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 : \text{Satz von Parseval} \quad \text{—○}$$