Höhere Analysis - Mitschrieb

bei PD. Dr. P. H. Lesky

Jan-Cornelius Molnar, Version: 19. Juli 2009 14:46

Inhaltsverzeichnis

1 Fourierreihen

Fourierreihen sind eine Verallgemeinerung von orthonormalen Basen auf unendlich dimensionale Vektorräume. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie sich bekannte Aussagen aus der Linearen Algebra auf unendlich dimensionale Vektorräume übertragen lassen.

1-A Orthonormalsysteme

1.1 **Definition** *Sei L ein linearer Raum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L \times L \to \mathbb{C},$$

heißt Skalarprodukt, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(S1) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle,\ \forall\ x_1, x_2, y \in L,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

(S2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},\ \forall\ x, y \in L.$

(S3) $\langle x, x\rangle > 0,\ \forall\ x \in L \setminus \{0\}.$

$(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *heißt Prähilbertraum.* ⋊

1.2 *Bemerkung.* $(S2) \Rightarrow \langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$. $(S1) \Rightarrow \langle 0, 0\rangle = 0$.
$(S1) \wedge (S2) \Rightarrow \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, y_2\rangle$. ⊸

1.3 **Satz** *Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ wird eine Norm auf L definiert. Es gilt die Cauchy-Schwartz-Bounjakowski Ungleichung,*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|. \quad ⋊$$

» Der Nachweis der Normeigenschaften ist eine leichte Übung. Die Cauchy-Schwartz-Bounjakowski Ungleichung ist ein Spezialfall der Hölder-Ungleichung. «

1.4 **Korollar** *Das Skalarprodukt ist stetig bezüglich der induzierten Norm, d.h. für*

$$\|x - x_n\|, \|y - y_n\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \to 0. \quad ⋊$$

» Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen und $x_n \to x, y_n \to y$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle - \langle x, y - y_n\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y - y_n\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y - y_n\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

für n hinreichend groß, da y_n konvergent und daher beschränkt. «

1.5 **Definition** $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *heißt Hilbertraum, falls L vollständig bezüglich der durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm ist.* ⋊

1.6 **Bsp** 1.) Das Standardbeispiel für den Hilbertraum ist der Raum der quadratsummierbaren Folgen,

$$L = \left\{ (x_j) : \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j \right|^2 < \infty \right\},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\Big\langle (x_j), (y_j) \Big\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

2.) $L := C([a,b] \to \mathbb{C})$ mit

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ist lediglich ein Prähilbertraum, man kann L jedoch zu $\mathcal{L}^2$ erweitern mit,

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{[a,b]} f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu.$$

$(\mathcal{L}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$ ist ein Hilbertraum und es gilt, $L \subseteq \mathcal{L}^2$, $\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g\rangle$ für $f, g \in L$ und L liegt dicht in $\mathcal{L}^2$. ■

1.7 **Satz** *Zu jedem Prähilbertraum $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ mit $L \subseteq H$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_H \big|_L = \langle\cdot,\cdot\rangle$ und L liegt dicht in H. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ heißt die Vervollständigung von L.* ⋊

1.8 **Definition** *Eine Folge (e_j) im Prähilbertraum $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\left\langle e_k, e_j \right\rangle = \delta_{kj}$.* $\rtimes$

1.9 **Satz** *Sei (e_j) ein ONS. Dann gilt,*

(a) $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \Rightarrow x_j = \left\langle x, e_j \right\rangle$.

(b) *$\{e_j\}$ ist linear unabhängig, d.h. jede endliche Teilmenge ist linear unabhängig.* $\rtimes$

1.10 **Satz** *Sei (e_j) ein ONS im Prähilbertraum $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $x \in L$. Dann gilt*

1.) Besselsche Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 \leq \|x\|^2,$$

insbesondere ist die Reihe konvergent.

2.) Parsevallsche Gleichung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2.$$

3.) $M := \left\{ x \in L : x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\}$ ist abgeschlossen in L.

4.) Ist L ein Hilbertraum, so ist $\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j$ immer konvergent (nicht zwangsläufig gegen x). $\rtimes$

» 1.)+2.)

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 = \langle x, x \rangle - \sum_{j=1}^{N} \overline{\left\langle x, e_j \right\rangle} \left\langle x, e_j \right\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle \overline{\left\langle x, e_j \right\rangle} + \sum_{j=1}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle \overline{\left\langle x, e_j \right\rangle} = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2.$$

4.)

$$\left\| \sum_{j=N}^{M} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 \overset{2.)}{=} \sum_{j=N}^{M} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 < \varepsilon,$$

für $N, M > N_\varepsilon$.

3.) Sei nun $x \in \overline{M}^L$. Zeige $x \in M$ bzw. $x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j$. Die Reihe,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left\langle x, e_j \right\rangle e_j}_{\in M}$$

konvergiert in H und daher ist $y := x - \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \in \overline{M}^H$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt,

$$\langle y, e_k \rangle_H = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \delta_{jk} = 0.$$

y ist also orthogonal zu e_k für $k \in \mathbb{N}$ und damit auch zu allen Linearkombinationen. Aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt also auch

$$\langle y, u \rangle = 0, \ \forall\ u \in \overline{M}^H.$$

Da $y \in \overline{M}^H$ gilt insbesondere $\langle y, y \rangle = 0$ und daher ist $y = 0$, also geht

$$\left\| \underbrace{x - \sum_{j=1}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j}_{\in L} \right\|_H \to 0,$$

für $N \to \infty$, wobei die H-Norm hier für endliches N eine L-Norm ist. «

1.11 **Bsp** Sei $L := C([0,\pi] \to \mathbb{C})$ und $e_j : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$.

3.) besagt nun, dass die Menge

$$\left\{ f \in C([0,\pi] \to \mathbb{C}) \ : \ f(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, e_j \right\rangle e_j(\cdot) \right\}$$

abgeschlossen in L ist.

4.) besagt, dass für jedes $f \in L$ die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, e_j \right\rangle \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(j, \cdot)$$

in $\mathcal{L}^2([0,\pi])$ konvergiert. Das heißt aber nicht, dass sie auch punktweise gegen f konvergiert! ■

1.12 **Definition** *Sei $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, (e_j) ein ONS.*

1.) Für $x \in L$ heißt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j$$

die Fourierreihe von x, $\left\langle x, e_j \right\rangle$ heißt j-ter Fourierkoeffizient.

2.) (e_j) heißt vollständiges Orthogonalsystem (VONS), falls

$$\forall\, x \in L \,:\, x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j. \quad \rtimes$$

1.13 **Satz** *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum mit VONS (e_j). Dann ist*

$$\phi : H \to l_2,\; x \mapsto \left(\left\langle x, e_j \right\rangle\right)_{j\in\mathbb{N}},$$

ein Hilbertraum-Isomorphismus[1]. $\rtimes$

1-B Operatoren und Eigenwerte

Wir wollen jetzt konkrekt mit Fourierreihen rechnen. Dazu werden wir die Zusammenhänge von Fourierreihen und Operatoren studieren und beispielsweise Ableitungsoperatoren durch Fourierreihen beschreiben.

[1] Ein Hilbertraumisomorphismus ist eine bijektive, lineare und Skalarprodukt erhaltende Abbildung.

1.14 **Definition** *1.) Sei $D(A)$ eine lineare Teilmenge von L. Ein Operator A in L ist eine lineare Abbildung,*

$$A : D(A) \to L.$$

2.) A heißt symmetrisch[2], falls $\forall\ x, y \in D(A)$ gilt,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

3.) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, falls

$$\exists\ x \in D(A) \setminus \{0\} : Ax = \lambda x.$$

Ein solches x heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

$$N(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda \operatorname{Id}),$$

heißt geometrische Vielfachheit von λ. ⋊

1.15 **Satz** *1.) Ist A symmetrisch, sind alle Eigenwerte reell.*

2.) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenräumen sind orthogonal. ⋊

1.16 **Bsp** Sei (e_n) ein ONS im Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und (λ_j) Folge in $\mathbb{C}$ und,

$$D(A) := \left\{ x \in H\ :\ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \lambda_j \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 < \infty \right\},$$

$$Ax := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, \quad \text{für } x \in D(A). \tag{*}$$

1.) A ist linear.

2.) Falls (λ_j) reell ist A symmetrisch

$$\begin{aligned}\langle Ax, y \rangle &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left\langle \lambda_j \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, y \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left\langle x, e_j \right\rangle \left\langle e_j, y \right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left\langle x, \lambda_j \left\langle y, e_j \right\rangle e_j \right\rangle = \langle x, Ay \rangle .\end{aligned}$$

[2] Wir fordern hier hermitesch aber da wir hauptsächlich über $\mathbb{C}$ arbeiten, kürzen wir dies zu symmetrisch.

3.) (i) Alle λ_j sind Eigenwerte.

(ii) Falls $\exists\, x \in L \setminus \{0\} : \ \forall\ j \in \mathbb{N} \left\langle x, e_j \right\rangle = 0$ gilt $Ax = 0$.

(iii) Es gibt keine weiteren Eigenwerte außer $0, \lambda_j$.

Sei $x \in D(A) \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$ und $\lambda_j \neq \lambda$, dann

$$\lambda \langle x, e_k \rangle = \langle \lambda x, e_k \rangle = \langle Ax, e_k \rangle = \lambda_k \langle x, e_k \rangle$$

Daher ist $\langle x, e_k \rangle = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$ und $\lambda = 0$.

4.) Falls (λ_j) beschränkt, gilt $D(A) = H$. (Bessel)

5.) Falls (e_j) ein VONS, folgt $D(A)$ liegt dicht in H. Denn sei $x \in H$, wähle N mit

$$\Bigg\| x - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j}_{\in D(A)} \Bigg\| < \varepsilon.$$

Ausblick. (e_j) VONS und (λ_j) reell $\Rightarrow$ A ist selbstadjungiert. ■

1.17 **Definition** *Die Darstellung (*) heißt Spektraldarstellung des Operators A. Der Abschluss der Menge aller Eigenwerte,*

$$\sigma(A) = \overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}}$$

heißt Spektrum von A.

Ein Operator, der eine Spektraldarstellung besitzt, heißt diskreter Operator. ⋊

Wir werden später sehen, dass es auch selbstadjungierte Operatoren gibt, die keine Spektraldarstellung besitzen.

1.18 **Bsp** Sei $H = \mathcal{L}^2([0,\pi])$ sowie,

$$D(A) = \left\{ f \in C^2([0,\pi] \to \mathbb{C}) : f(0) = f(\pi) = 0 \right\},$$

$$Af = -f'', \qquad \text{für } f \in D(A).$$

1.) A ist symmetrisch, denn für $f, g \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= -\int_0^\pi f''\overline{g}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{-\left[f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{g'(x)}\right]\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi f\overline{g''}\,\mathrm{d}x = \langle f, Ag\rangle\end{aligned}$$

wie mit zweifacher partieller Integration folgt.

2.) A ist positiv definit, d.h. für $f \in D(A)$ gilt $\langle Af, f\rangle \geq 0$ und $\langle Af, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^\pi f'(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi |f'|^2\,\mathrm{d}x$$

wie mit partieller Integration folgt.

3.) *Eigenwerte*. Sei $Af = \lambda f$, dann folgt

$$-f'' = \lambda f$$

dies ist eine Differentialgleichung mit Lösung,

$$f(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Die Randbedingungen erzwingen $c_1 = 0$ sowie $\lambda = j^2$ für $j \in \mathbb{N}$. Normierte Eigenfunktionen sind daher,

$$e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(jx), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

4.) Definiere $\tilde{A}$ durch (*) mit $D(A) \subseteq D(\tilde{A})$:

$$\tilde{A}f = Af, \quad \text{für } f \in D(A).$$

$\tilde{A}$ heißt die Fortsetzung bzw. Erweiterung von A. Da $\tilde{A}$ selbstadjungiert ist, spricht man von einer selbstadjungierten Erweiterung.

Sei $f \in D(A)$, dann ist

$$\left\langle f, e_j\right\rangle = \frac{1}{\lambda_j}\left\langle f, Ae_j\right\rangle = \frac{1}{\lambda_j}\left\langle Af, e_j\right\rangle = -\frac{1}{\lambda_j}\left\langle f'', e_j\right\rangle$$

Damit ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \lambda_j \left\langle f, e_j \right\rangle \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle f'', e_j \right\rangle \right| \leq \|f''\|^2 < \infty,$$

und daher ist $f \in D(\tilde{A})$.

$$\tilde{A} f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle f, e_j \right\rangle e_j = -\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f'', e_j \right\rangle = -f''. \quad \blacksquare$$

1.19 *Bemerkung.* A besitze die Darstellung (*), dann gilt A ist positiv definit genau dann wenn alle Eigenwerte positiv sind,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle x, e_j \right\rangle \overline{\left\langle x, e_j \right\rangle} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_j \geq 0. \quad \multimap$$

1.20 **Definition** *Ein linearer Operator A in $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $D(A) = L$ heißt beschränkt, falls*

$$\forall\ x \in L : \|Ax\| \leq c \|x\|.$$

Dann heißt,

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \inf \{ c > 0 : \ \forall\ x \in L : \|Ax\| \leq c \|x\| \} \\ &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \end{aligned}$$

die Operatornorm bzw. Norm von A. Insbesondere gilt,

$$\forall\ x \in L : \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad \rtimes$$

1.21 **Lemma** *Besitzt A die Darstellung (*), dann ist A genau dann beschränkt, wenn (λ_j) beschränkt ist.* $\rtimes$

» $\Rightarrow$: Sei A beschränkt, dann gilt $|\lambda_i| = \|Ae_i\| \leq \|A\|$.
$\Leftarrow$: Sei $\lambda_j \leq M, \ \forall\ j \in \mathbb{N}$, so folgt mit der Besselschen Ungleichung,

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \lambda_j \right|^2 \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 \leq M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 \\ &\leq M^2 \|x\|^2. \quad « \end{aligned}$$

1.22 **Satz** *Sei A ein Operator mit $D(A) = L$, dann ist äquivalent.*

(i) *A ist beschränkt.*

(ii) *A ist stetig in $x = 0$.*

(iii) *A ist überall stetig.* $\rtimes$

» (i)⇒(iii): Sei (x_j) Folge in L und $x_j \to x$, dann ist

$$\left\|Ax_j - Ax\right\| \le \|A\| \left\|x_j - x\right\|,$$

also ist A sogar lipschitz.

(iii)⇒(ii): Klar, denn Stetigkeit überall impliziert Stetigkeit in $x = 0$.

(ii)⇒(i): Sei A stetig in $x = 0$, unbeschränkt und (x_j) eine Folge mit $\left\|Ax_j\right\| > j\left\|x_j\right\|$. Setze $y_j := \frac{x_j}{\|Ax_j\|}$, dann ist $\left\|y_j\right\| < \frac{1}{j}$ und daher ist (y_j) eine Nullfolge. Aber $\left\|Ay_j\right\| = 1$ und damit ist (Ay_j) keine Nullfolge und A nicht stetig. «

1.23 **Definition** *Ein linearer Operator heißt kompakt, falls (Ax_j) eine konvergente Teilfolge enthält, wenn (x_j) beschränkt ist, oder äquivalent AM präkompakt ist (d.h. $\overline{AM}$ ist kompakt), wenn $M \subseteq L$ beschränkt ist.* $\rtimes$

1.24 **Satz** *Jeder kompakte Operator ist beschränkt.* $\rtimes$

» Sei A nicht beschränkt und (x_j) Folge mit $\left\|Ax_j\right\| > j\left\|x_j\right\|$. Setze $y_j = \frac{x_j}{\|x_j\|}$, dann ist $\left\|y_j\right\| = 1$, also ist (y_j) beschränkt. Es gilt jedoch

$$\left\|Ay_j\right\| = \frac{\left\|Ax_j\right\|}{\left\|x_j\right\|} > j \to \infty,$$

also divergiert (Ay_{j_k}) für jede Teilfolge von (y_j) und A ist nicht kompakt. «

1.25 **Bsp** 1.) Seien $L = C([0,\pi] \to \mathbb{C})$, $Af = -f''$ und $D(A) =$ wie in 1.18.

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_j = j^2, j \in \mathbb{N}$, also ist A nicht beschränkt und daher nicht kompakt.

Wir werden später sehen, dass A^{-1} existiert und kompakt ist.

2.) Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $G \in C(K \times K \to \mathbb{R})$, $L := C(K \to \mathbb{C})$, $D(A) := L$, sowie

$$Af(x) := \int_K G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

A ist ein Integraloperator, G nennt man den Integralkern. Man kann zeigen, dass A kompakt ist.

» *Beweisskizze.* Sei (f_n) beschränkt, dann ist

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_K |f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

Wir sehen daher,

(i) (Af_j) ist gleichmäßig beschränkt auf K.

$$\begin{aligned}\left\|Af_j(x)\right\|^2 &= \left\|\left\langle G(x,\cdot), \overline{f_j}\right\rangle\right\|^2 \leq \|G(x,\cdot)\|^2 \left\|\overline{f_j}\right\|^2 \\ &= \int_K \underbrace{|G(x,y)|^2}_{\leq c} \mathrm{d}y \left\|f_j\right\|^2 \leq cM^2\lambda^{(n)}(K).\end{aligned}$$

(ii) (Af_j) ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\begin{aligned}&\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 :\ \forall\ x, y \in K,\ \forall\ j \in \mathbb{N} \\ &\qquad : |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|Af_j(x) - Af_j(y)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|Af_j(x) - Af_j(y)\right\|^2 &= \left\|\left\langle G(x,\cdot), f_j\right\rangle - \left\langle G(y,\cdot), f_j\right\rangle\right\|^2 \\ &= \left|\left\langle G(x,\cdot) - G(y,\cdot), f_j\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \|G(x,\cdot) - G(y,\cdot)\|^2 \left\|f_j\right\|^2 \\ &\leq \tilde{\varepsilon}^2 M^2 \lambda^{(n)}(K) < \varepsilon,\end{aligned}$$

für $|x - y| < \tilde{\delta}$. Wir können nun den Satz von Arzelá-Ascoli anwenden, der besagt, dass (Af_j) eine Teilfolge (Af_{j_k}) enthält mit $Af_{j_k} \twoheadrightarrow g \in L$ auf K. Damit erhalten wir,

$$\left\|Af_{j_k} - g\right\|^2 = \int_K \underbrace{\left|Af_{j_k}(x) - g(x)\right|^2}_{<\varepsilon \text{ für } k > N_\varepsilon} \mathrm{d}x \leq \varepsilon^2 \lambda^{(n)}(K),$$

also $Af_{j_k} \to g$ in L. ■

1.26 **Satz** *Sei A ein Operator im Hilbertraum H. Dann sind äquivalent,*

(i) *A ist kompakt und symmetrisch.*

(ii) *A besitzt die Darstellung (*) mit $(\lambda_j) \to 0$ und λ_j reell.* ⋊

» "⇐": Übung.
"⇒": Nächstes Kapitel. «

1-C Kompakte Symmetrische Operatoren

1.27 **Definition** *Sei $M \subseteq L$. Dann heißt*

$$M^\perp := \{x \in L : \ \forall\ y \in M : \langle x, y \rangle = 0\},$$

das orthogonale Komplement. ⋊

1.28 **Satz** *Sei $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum, $A : L \to L$ symmetrisch und beschränkt. Dann gilt*

(i) $\forall\ x \in L : \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A$.

(iii) $A\big|_{\overline{\operatorname{im} A}}$ *ist injektiv.*

(iv) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$.

» (i) $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$.

(ii) Sei $x \in \operatorname{im} A^\perp$, dann gilt für alle $y \in L$:

$$0 = \langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = 0 \Rightarrow x \in \ker A.$$

Sei $x \in \ker A$, dann gilt für alle $y \in L$:

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{im} A^\perp.$$

(iii) Seien $x, y \in \overline{\operatorname{im} A}$, dann ist auch $x - y \in \overline{\operatorname{im} A}$. Sei $Ax = Ay$, dann gilt

$$\begin{aligned} A(x-y) = 0 &\Rightarrow x - y \in \ker A = \operatorname{im} A^{\perp} \\ &\Rightarrow \langle x-y, z\rangle = 0, \;\; \forall\, z \in \operatorname{im} A \\ &\Rightarrow \langle x-y, z\rangle = 0, \;\; \forall\, z \in \overline{\operatorname{im} A} \\ &\Rightarrow x - y = 0. \end{aligned}$$

(iv) Sei $A \neq 0$, also $\|A\| > 0$, $d := \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$. Zeige $d = \|A\|$.

"$\leq$": Für $\|x\| = 1$ gilt, $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \, \|x\| \leq \|A\| \, \|x\|^2 = \|A\| \Rightarrow d \leq \|A\|$.

"$\geq$": Für $x \neq 0$ gilt,

$$|\langle Ax, x\rangle| = \|x\|^2 \left| \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq d \, \|x\|^2 .$$

Die Ungleichung gilt offensichtlich für $x \in L$.

Sei nun $\alpha > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\left\langle A(\alpha x + \frac{1}{\alpha}Ax), \alpha x + \frac{1}{\alpha}Ax \right\rangle - \left\langle A(\alpha x - \frac{1}{\alpha}Ax), \alpha x - \frac{1}{\alpha}Ax \right\rangle \\ &= 2\,\langle Ax, Ax\rangle + 2\,\langle Ax, Ax\rangle = 4\,\|Ax\|^2 \end{aligned}$$

Somit gilt,

$$\begin{aligned} 4\,\|Ax\|^2 &\leq d \left\| \alpha x + \frac{1}{\alpha}Ax \right\|^2 + d \left\| \alpha x - \frac{1}{\alpha}Ax \right\| \\ &= 2d \left(\alpha^2 \,\|x\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\,\|Ax\|^2 \right) \end{aligned}$$

Sei nun $\|x\| = 1$ und $\alpha^2 := \|Ax\| > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} &4\,\|Ax\|^2 \leq 2d\,(\|Ax\| + \|Ax\|) = 4d\,\|Ax\| . \\ &\Rightarrow \;\|Ax\| \leq d, \\ &\Rightarrow \;\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq d. \quad \ll \end{aligned}$$

1.29 *Bemerkung.* Ist zusätzlich zu 1.28 $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, so kann (ii) in der Form,

$$L = \overline{\operatorname{im} A} \oplus \ker A,$$

geschrieben werden. Dies bedeutet,

$$\forall\, x \in L\ \exists\, !y \in \overline{\operatorname{im} A}\ \exists\, !z \in \ker A : x = y + z. \quad ⊸$$

1.30 **Hauptsatz** *Sei $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unendlichdimensionaler Prähilbertraum. $A : L \to L$ symmetrisch und kompakt. Dann gilt*

(i) $\lambda = \|A\|$ oder $\lambda = -\|A\|$ ist ein Eigenwert.

(ii) Jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist reell und hat endliche Vielfachheit.

(iii) A hat entweder nur endlich viele Eigenwerte, dann ist $\lambda = 0$ Eigenwert mit Vielfachheit ∞ oder A hat abzählbar viele Eigenwerte (λ_j) und $\lambda_j \to 0$.

(iv) Sei (λ_j) die Folge der Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$, in der jeder Eigenwert so oft auftritt, wie es seiner Vielfachheit entspricht. Die zugehörigen Eigenelemente (e_j) können so normiert werden, dass sie ein ONS bilden. Dieses ONS ist vollständig in $\overline{\operatorname{im} A}$. ⋊

» Falls $A = 0$, dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert mit Vielfachheit ∞, die übrigen Aussagen ergeben sich dann sofort.

Sei nun $A \neq 0$, also $\|A\| > 0$.

(i) Nach 1.28 existiert eine Folge (y_j) in L mit

$$\left\|y_j\right\| = 1 \wedge \left|\left\langle Ay_j, y_j\right\rangle\right| \to \|A\|\,.$$

Eventuell Teilfolge bilden, dann erhalten wir

$$\left|\left\langle Ay_j, y_j\right\rangle\right| \to \lambda = \pm\|A\| \neq 0.$$

A ist kompakt und $\left\|y_j\right\| = 1$ also $Ay_j \to y \in L$ und damit gilt,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\|Ay_j - \lambda y_j\right\|^2 = \left\|Ay_j\right\|^2 - 2\lambda\left\langle Ay_j, y_j\right\rangle + \lambda^2\left\|y_j\right\|^2 \\ &\leq \underbrace{\|A\|^2}_{=\lambda^2}\left\|y_j\right\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda\underbrace{\left\langle Ay_j, y_j\right\rangle}_{\to\lambda} \to 0. \end{aligned}$$

$\lambda y_j \to y$ also $y_j \to \frac{1}{\lambda} y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Ay_j \to y, \\ Ay_j \to \frac{1}{\lambda} Ay, \end{cases}$$

da A stetig, also ist $Ay = \lambda y$ und $y \neq 0$, da $1 = \left\| y_j \right\| \to \left\| \frac{1}{\lambda} y \right\|$ und daher ist

$$\lambda = \pm \|A\|$$

ein Eigenwert von A.

(ii) Sei λ ein Eigenwert, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
Angenommen $\lambda \neq 0$ mit Vielfachheit ∞. Sei (x_j) eine Folge von linear unabhängigen Eigenelementen. Mit Gram-Schmidt erhalten wir dadurch eine orthonormale Folge (e_j) mit $Ae_j = \lambda e_j$. Nun ist $\left\| e_j \right\| = 1$ also enthält (Ae_j) eine konvergente Teilfolge aber

$$\left\| Ae_j - Ae_k \right\|^2 = |\lambda|^2 \left\| e_j - e_k \right\|^2 = 2\,|\lambda|^2 = \text{const} > 0. \;\lightning$$

(iii) Sei $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\lambda_1 = \pm \|A\| \neq 0$. Setze

$$A_1 := A|_{\{x_1\}^\perp} : \{x_1\}^\perp \to \{x_1\}^\perp,$$
$$y \perp x_1 \Rightarrow \langle Ay, x_1 \rangle = \langle y, Ax_1 \rangle = \lambda \langle y, x_1 \rangle = 0 \Rightarrow Ay \perp x_1.$$

Also ist A_1 kompakt und symmetrisch und hat den Eigenwert λ_2 mit $|\lambda_2| = \|A_1\| \leq \|A\|$, also hat A ebenfalls den Eigenwert λ_2.

Führe das Verfahren mit,

$$A_2 := A|_{\{x_1, x_2\}^\perp}$$

fort. Induktiv erhält man eine Folge von Eigenwerten (λ_j) mit $(\left|\lambda_j\right|)$ monoton fallend, wobei jeder Eigenwert nur endliche Vielfachheit hat.

Fall a) $\exists\, j \in \mathbb{N} : A_j = 0$, dann ist $\lambda_{j+1} = 0$ mit Eigenraum $\{x_1, \dots, x_j\}^\perp$ also Vielfachheit ∞.

Fall b) $\forall\ j \in \mathbb{N} : A_j \neq 0$ und daher ist $\lambda_{j+1} \neq 0$. Eigenwerte zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Führt man nun in jedem Eigenraum Gram-Schmidt durch, erhält man ein ONS (e_j) aus Eigenfunktionen mit $Ae_j = \lambda_j e_j$ und $(\left|\lambda_j\right|)$ monton fallend.

Angenommen $\neg(\lambda_j \to 0)$ dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\left|\lambda_j\right| \geq \varepsilon,\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, dann ist $\left(\frac{1}{\lambda_j} e_j\right)$ eine beschränkte Folge aber $\left(A\frac{1}{\lambda_j} e_j\right) = (e_j)$ enthält keine konvergente Teilfolge. ↯

Es gibt keine weiteren Eigenwerte als die soeben konstruierten, denn sei λ ein weiterer Eigenwert, dann gilt

$$\begin{aligned} &Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0 \\ &\forall\ j \in \mathbb{N} : \left\langle x, e_j \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|Ax\| = \left\|A_{\{e_1,\dots,e_j\}^\perp} x\right\| \leq \underbrace{\left\|A_{\{e_1,\dots,e_j\}^\perp}\right\|}_{\to 0} \|x\|,$$

also ist $\|Ax\| = 0$, d.h. $Ax = 0$ und damit ist $\lambda = 0$.

(iv) Sei (λ_j) vorgegeben und x_j Eigenelement zu λ_j. Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten sind bereits orthogonal, wendet man außerdem Gram-Schmidt in jedem Eigenraum an und normiert alle Eigenelemente, erhält man ein ONS (e_j) aus Eigenelementen.

Sei $x \in L$, $x_J := \sum\limits_{j=1}^{J} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j$,

$$\left\|x - x_J\right\|^2 = \underbrace{\|x\|^2 - \left\|x_J\right\|^2}_{\text{Pythagoras}} \leq \|x\|^2.$$

Nun ist $x - x_J \in \{e_1, \dots, e_J\}^\perp$ und

$$\left\|Ax - Ax_J\right\| = \left\|A(x - x_J)\right\| \leq \underbrace{\left\|A|^\perp_{\{e_1,\dots,e_J\}}\right\|}_{\to 0} \underbrace{\left\|x - x_j\right\|}_{\leq \|x\|}$$

Daraus folgt $\forall\ x \in L : Ax_J \to Ax$ mit,

$$Ax_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, Ae_j \right\rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle Ax, e_j \right\rangle e_j.$$

Daher gilt für alle $x \in L$,

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle Ax, e_j \right\rangle e_j,$$

$$\overset{1.10}{\Rightarrow} \quad \forall\ y \in \overline{\operatorname{im} A} : y = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle y, e_j \right\rangle e_j. \quad \text{«}$$

1-D Das Sturm-Liouville-Problem

1.31 **Bsp** Eine schwingende Saite kann durch die Differentialgleichung

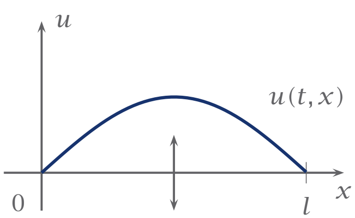
$$\rho(x)\partial_t^2 u(t,x) - \sigma(x)\partial_x^2 u(t,x) = 0,$$

charakterisiert werden, wobei $\rho(x) > 0$ die Massendichte und $\sigma(x) > 0$ die Federkonstante bezeichnen. Für die eingespannte Saite sind die Randbedingungen,

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Geben wir Anfangsbedingungen in der Form,

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), && \text{Auslenkung zur Zeit } t = 0,\\ &\partial_t u(t,x)\big|_{t=0} = u_1(x), && \text{Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit } t = 0, \end{aligned}$$



1 Schwingende Saite.

an, so besagt der Satz von Picard-Lindelöff, dass eine eindeutige Lösung existiert. Wir sind nun daran interessiert diese Lösung zu finden. Setzten wir

$$c(x) = \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\rho(x)}},$$

nimmt die Differentialgleichung die aus der Physik bekannte Form der Wellengleichung an,

$$\partial_t^2 u(t,x) - c^2 \partial_x^2 u(t,x) = 0. \tag{*}$$

Wir wollen nun beim Lösen "naiv" vorgehen und beginnen mit dem Separationsansatz

$$u(t,x) = v(t)w(x).$$

So erhalten wir

$$v''w - c^2 v w'' = 0,$$

wordurch sich für $v, w \neq 0$ ergibt,

$$\frac{v''}{v} = c^2 \frac{w''}{w} = \text{const} := \lambda.$$

Die Konstanz sieht man so ein, dass die linke Seite lediglich von t und die rechte lediglich von x abhängt. Wir erhalten dadurch zwei unabhängige Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &v'' + \lambda v = 0, && \text{mit } v(0), v'(0) \text{ vorgegeben,} \\ &c^2 w'' + \lambda w = 0, && \text{mit } w(0) = w(l) = 0. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $c(x) = c = \text{const}$ existieren Lösungen von w nur für

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_j &= \left(\frac{j\pi c}{l}\right)^2, \\ \Rightarrow w_j(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\sqrt{\lambda_j} x\right), \end{aligned}$$

und Lösungen von v, für

$$v_j(t) = v_j(0)\cos\left(\sqrt{\lambda_j}t\right) + v_j'(0)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Wir erhalten somit abzählbar viele Lösungen von (*),

$$u_j(t,x) = v_j(t)w_j(x).$$

Die allgemeine Lösung von (*) kann man durch eine Fourierreihe angeben,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x)v_j(x),\\
u(0,x) &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(0)v_j(0) \overset{!}{=} u_0 \sim v_j(0),\\
\partial_t u(0,x) &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x)v_j'(0) \overset{!}{=} u_1 \sim v_j'(0). \quad ■
\end{aligned}$$

Im Folgenden sei mit I stets das Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gemeint.

1.32 **Sturm-Liouville-Eigenwertproblem** *Gesucht sind* $u \in C^2([a,b] \to \mathbb{R})$, $u \neq 0$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit,*

$$\begin{aligned}
&(pu')' - qu + \lambda ru = 0, &(1.1)\\
&R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) = 0,\\
&R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) = 0,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&p \in C^2([a,b] \to \mathbb{R}),\ p > 0 \text{ auf } [a,b],\\
&q, r \in C^2([a,b] \to \mathbb{R}),\ r > 0,\\
&\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \wedge \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0,
\end{aligned}$$

λ *heißt Eigenwert und* u *zugehörige Eigenfunktion.* ⋊

1.33 *Bemerkung.* 1.) Spezialfälle mit besonderen Randbedindungen,

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 = 0, \qquad \text{(Dirichlet)}$$
$$u(a) = u(b) = 0,$$
$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 \wedge \alpha_2 = \frac{1}{p(a)} \wedge \beta_2 = \frac{1}{p(b)}, \qquad \text{(Neumann)}$$
$$u'(a) = u'(b) = 0.$$

2.) $R_1 u = 0$ was äquivalent ist mit,

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 p(a) \end{pmatrix}$$

3.) Jeder Eigenwert von (1.1) ist einfach.

» Angenommen u_1, u_2 sind Eigenfunktionen von (1.1) zum Eigenwert λ und $\{u_1, u_2\}$ ist linear unabhängig, dann ist $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem. Die Existenztheorie für Differentialgleichungen sagt, es existiert eine Lösung mit $u(a) = \alpha_1$ und $u'(a) = \frac{\alpha_2}{p(a)}$.

Da $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem ist, folgt

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

ist ebenfalls Lösung, die die Randbedingungen erfüllt mit

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,$$
$$R_1 u = c_1 R_1 u_1 + c_2 R_1 u_2 \overset{!}{=} 0. \lightning$$

Es kann also keine linear unabhängigen Eigenfunktionen zu einem Eigenwert geben. « ⊸

1.34 **Definition/Satz** *Sei $I := [a,b]$ und $\tilde{A}$ mit*

$$\tilde{A}u = -(pu')' + qu,$$

eine Abbildngsvorschrift. Sei $L := C(I \to \mathbb{R})$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2$,

$$D(A) = \left\{ u \in C^2(I \to \mathbb{R}) \,:\, R_1 u = R_2 u = 0 \right\}, \tag{1.2}$$
$$Au = \tilde{A}u, \qquad \text{für } u \in D(A).$$

Dann ist A symmetrisch. ⋊

» *Beweisskizze.* Partiell integrieren, geschickt Null ergänzen, zusammenfassen. «

1.35 *Achtung:* Falls λ EW von (1.1) und u Eigenfunktion, dann gilt $u \in D(A)$ und $Au = \lambda r u$. Nur im Fall $r = 1$ ist λ auch Eigenwert von A.

1.36 **Definition** *Eine Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion zum Operator A (oder zu (1.1)), falls*

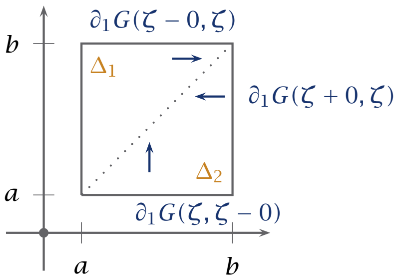
1.) $G \in C(I \times I \to \mathbb{R})$

2.) $\partial_1 G, \partial_1^2 G \in C(\Delta_j \to \mathbb{R})$ *und* $\partial_1 G, \partial_1^2 G$ *stetig fortsetzbar auf* $\overline{\Delta}_1$ *und* $\overline{\Delta}_2$

3.) Für festes $\zeta \in I$ *gilt,*

$$\tilde{A}G(\cdot, \zeta) = 0, \text{ auf } I \setminus \{\zeta\}, \text{ sowie } R_1(G(\cdot, \zeta)) = R_2(G(\cdot, \zeta)) = 0.$$

4.) Für $\zeta \in (a, b) : \partial_1 G(\zeta + 0, \zeta) - \partial_1 G(\zeta - 0, \zeta) = \frac{1}{p(\zeta)}$. ⋊



2 **Definitionsbereich der Greenschen Funktion.**

Die Greensche Funktion soll also auf die Dreiecke $\overline{\Delta}_1$ und $\overline{\Delta}_2$ zweimal stetig differenzierbar fortsetzbar sein, die homogene Differentialgleichung erfüllen und ihre erste partielle Ableitung soll auf der Diagonalen einen Sprung haben.

1.37 **Satz** *Sei G eine Greensche Funktion zu A und* $\varphi \in C(I \to \mathbb{R})$*. Dann sind äquivalent,* *(i)* $Au = \varphi$,

(ii) $u(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,.$ $\rtimes$

Existiert G, so erhalten wir einen Umkehroperator zu A und so für jedes φ mit $Au = \varphi$ sofort u.

» “(ii)⇒(i)”:

$$u(x) = \int_a^x G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= G(x,y)\varphi(x) - G(x,y)\varphi(x) \\
&\quad + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} G(x,x-0)\varphi(x-0) + \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x} G(x,x+0)\varphi(x+0) + \int_x^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\varphi(x)}{p(x)} + \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\varphi(x)}{p(x)} + \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Wir können damit $\tilde{A}u$ wie folgt auflösen,

$$\tilde{A}u = -pu'' - p'u' + qu = p\,\frac{\varphi(x)}{p} + \int_a^b \underbrace{\tilde{A}G(x,y)\varphi(y)}_{3.)\Rightarrow=0}\,\mathrm{d}y = \varphi(x).$$

Offensichtlich ist $u \in D(A)$, denn $u \in C^2(I \to \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} R_1 u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) \\ &= \int_a^b \underbrace{\left(\alpha_1 G(a,y) + \alpha_2 p(a) \partial_1 G(a,y)\right) \varphi(y) \,\mathrm{d}y}_{=R_1 G(\cdot,y)=0} = 0. \end{aligned}$$

"(i)⇒(ii)": Die Umkehrung zeigen wir später. «

1.38 **Satz** *(i) G ist symmetrisch, d.h. $G(x,y) = G(y,x)$.*

(ii) G ist eindeutig, d.h. zu gegebenen Operator A existiert höchstens eine Eigenfunktion. ⋊

» Seien G, H Greensche Funktionen zu A und $\varphi, \psi \in C(I \to \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} u(x) &:= \int_a^b G(x,y)\varphi(y) \,\mathrm{d}y, \\ v(x) &:= \int_a^b H(x,y)\psi(y) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Mit 1.37 folgt,

$$Au = \varphi, \text{ und } Av = \psi.$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Au, v \rangle - \langle Au, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle - \langle u, \psi \rangle \\ &= \int_a^b \varphi(x) \int_a^b H(x,y)\psi(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x - \int_a^b \int_a^b G(x,y)\varphi(y) \,\mathrm{d}y \,\psi(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wir können im ersten Term die Integrationsreihenfolge ändern und im zweiten die Variablen x und y vertauschen,

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_a^b \int_a^b \varphi(x) H(x,y)\psi(y) - G(y,x)\varphi(x)\psi(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \varphi(x) \underbrace{\int_a^b \underbrace{\left(H(x,y) - G(y,x)\right)}_{(*)} \psi(y) \,\mathrm{d}y}_{(**)} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da $\varphi \in C(I \to \mathbb{R})$ beliebig ist, kann man $\varphi = (**)$ setzten, dann verschwindet das Betragsquadrat, also ist (**) Null. $\psi \in C(I \to \mathbb{R})$ ist ebenfalls beliebig und daher ist ebenfalls $(H - G)$ Null, es gilt also $H(x,y) = G(y,x)$.

(i) Setze $H(x,y) = G(x,y)$, dann gilt $G(x,y) = G(y,x)$.

(ii) G ist symmetrisch es gilt daher $H(x,y) = G(y,x) = G(x,y)$. «

» *Beweis von 1.37.* “(i)⇒(ii)”: Sei $Au = \varphi$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b G(y,x)((-pu')' + qu)(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^x G(y,x)((-pu')' + qu)(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_x^b G(y,x)((-pu')' + qu)(y)\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{2x part.}}{=} \left[-G(y,x)p(y)u(y) + \partial_1 G(y,x)p(y)u(y)\right] \Big|_{y=a}^{x} \Big|_{y=x}^{b} \\
&\quad + \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}(p(y)\partial_1 G(y,x)) - q(y)G(y,x)\right)}_{:=\tilde{A}G(\cdot,x)=0} u(y)\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Wir wissen aus dem Beweis der Symmetrie von $G(x,y)$, dass der Term aufgrund der Randbedingung auf dem Rand verschwindet,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{[\ldots]_{y=a}^{b}}_{=0,\text{ wegen } R_j u = R_j G(\cdot,x)=0} + \underbrace{(-G(y,x)p(y))u(y)\Big|_{y=x}^{x}}_{=0,\text{ da stetig.}} \\
&+ \partial_1 G(x-0,x)p(x)u(x) - \partial_1 G(x+0,x)p(x)u(x) \\
&= -\left(-\frac{1}{p}\right) pu(x) = u(x). \quad «
\end{aligned}$$

1.39 **Konstruktion der Greenschen Funktion** *Folgende Aussagen sind äquivalent,*

(i) Zu A existiert eine Greensche Funktion.

(ii) $\lambda = 0$ *ist kein Eigenwert von* $A \Leftrightarrow \lambda = 0$ *ist kein Eigenwert von (1.1).* $\rtimes$

» "(i)⇒(ii)": Aus $Au = 0$ folgt, $u = \int G \cdot 0 \, \mathrm{d}y = 0$. $u = 0$ ist die eindeutige Lösung dieser Gleichung aber kein Eigenvektor und daher ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

"(ii)⇒(i)": Sei $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A und $u_1, u_2 \in C^2(I \to \mathbb{R})$ Lösungen von $\tilde{A}u = 0$ mit $u_1, u_2 \neq 0$ und $R_1 u_1 = 0$ und $R_2 u_2 = 0$. Die Existenz folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöff.

Angenommen $u_1 = cu_2$, dann gilt $R_1 u_1 = 0$ nach Voraussetzung und

$$\begin{aligned} &R_2 u_1 = cR_2 u_2 = 0, \\ \Rightarrow\ &Au_1 = 0, \Rightarrow\ u_1 = 0. \lightning \end{aligned}$$

Die Wronskideterminante ist gegeben durch

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)\right) = u_1 u_2'' - u_2 u_1'' \\ &= u_1 \frac{1}{p}\left(-p'u_2' + qu_2 - \lambda r u_2\right) - u_2 \frac{1}{p}\left(-p'u_1' + qu_1 - \lambda r u_1\right) \\ &= -\frac{1}{p}\left(u_1 u_2' p' - u_1' u_2 p'\right) = -\frac{p'}{p} W(x), \\ W'(x) &= -\frac{p'}{p} W(x). \end{aligned}$$

Dies ist eine spearierbare Differentialgleichung. Durch Nachrechnen erhält man $W(x) = \frac{c}{p(x)}$. $\{u_1, u_2\}$ ist linear unabhängig, also ist $W(x) \neq 0$ und daher $c \neq 0$. Setze

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{c} u_2(\xi) u_1(x), & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ -\frac{1}{c} u_2(x) u_1(\xi), & a \leq \xi \leq x \leq b. \end{cases}$$

Dann ist G eine Greensche Funktion, denn

1.) $G \in C(I \times I \to \mathbb{R})$ ist offensichtlich.

2.) $\partial_1 G, \partial_1^2 G$ ist stetig auf Δ_1, Δ_2 und stetig fortsetzbar auf $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2$.

3.) Sei $\xi \in I$ fest, dann gilt

$$x < \xi \Rightarrow G(\cdot,\xi) = -\frac{1}{c}u_2(\xi)u_1 \Rightarrow \tilde{A}G(\cdot,\xi) = 0,\ R_1G(\cdot,\xi) = 0,$$
$$x > \xi \Rightarrow G(\cdot,\xi) = -\frac{1}{c}u_1(\xi)u_2 \Rightarrow \tilde{A}G(\cdot,\xi) = 0,\ R_2G(\cdot,\xi) = 0.$$

4.) Für den Sprung an der Diagonlen erhält man,

$$\begin{aligned}\partial_1 G(\xi+0,\xi) - \partial_1 G(\xi-0,\xi) &= -\frac{1}{c}\left(u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_1'(\xi)u_2(\xi)\right)\\ &= -\frac{1}{p(x)}.\end{aligned}$$ «

1.40 **Lemma** $\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, u \in D(A) : \langle Au, u\rangle \geq -c\,\|u\|^2$. ⋊

» Übung. «

1.41 **Satz** *1.) Es gilt* $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda$ *ist EW von (1.1)*$\} > -\infty$.

2.) Falls $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ (Neumann) oder $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ (Dirichlet), so gilt

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ ist EW von (1.1)}\} \geq \frac{\min q(x)}{\max r(x)}.$$ ⋊

1.42 **Satz** *Sei $d \in \mathbb{R}$ kein Eigenwert von (1.1) und G' die Greensche Funktion von*

$$A' := A - dr.$$

und seien

$$\begin{aligned}&G(x,y) := \sqrt{r(x)}G'(x,y)\sqrt{r(y)},\\ &D(K) := C(I \to \mathbb{R}),\\ &K\varphi(x) := \int_I G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,,\end{aligned}$$

dann ist $\mu = 0$ kein Eigenwert von K und es sind äquivalent

(i) $\lambda\left(= \frac{1}{\mu} + d\right)$ *ist Eigenwert von (1.1) mit Eigenfunktion* $u\left(= \frac{1}{\sqrt{r}}v\right)$.

(ii) $\mu\left(=\frac{1}{\lambda-d}\right)$ *ist Eigenwert von* K *mit Eigenfunktion* $v=(\sqrt{r}u)$. ⋊

» G' existiert da das Sturm-Liouville nicht d als Eigenwert hat und daher das “verschobene"Problem

$$(pu')'-qu+\lambda ru-dru=0,$$

nicht $(\lambda-d)=0$ als Eigenwert besitzt.

Angenommen $K\varphi(x)=0$, dann gilt

$$\begin{aligned}0&=\int_I G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\underbrace{\sqrt{r(x)}}_{>0}\int_I G'(x,y)\sqrt{r(y)}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\\ \Leftrightarrow 0&=\int_I G'(x,y)\sqrt{r(y)}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Aus 1.37 folgt, $A0=\sqrt{r}\varphi$ und daher ist $\varphi=0$ also kann $\mu=0$ kein Eigenwert von K sein.

$$\begin{aligned}(i)&\Leftrightarrow Au=\lambda ru\Leftrightarrow(A-dr)u=(\lambda-d)ru\\ &\Leftrightarrow u(x)=\int_I G'(x,y)(\lambda-d)r(y)u(y)\,\mathrm{d}y\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{r(x)}u(x)}_{:=v(x)}=(\lambda-d)\int_I\sqrt{r(x)}G'(x,y)\sqrt{r(y)}\sqrt{r(y)}u(y)\,\mathrm{d}y\\ &\Leftrightarrow v(x)=\int_I G(x,y)v(y)\,\mathrm{d}y\Leftrightarrow v=(\lambda-d)Kv\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\lambda-d}}_{:=\mu}v=Kv\Leftrightarrow(ii)\quad «\end{aligned}$$

1.43 **Lemma** *1.)* K *ist symmetrisch und kompakt in* $L:=C(I\to\mathbb{R})$.

2.) $\operatorname{im}K=\{\sqrt{r}u\,:\,u\in D(A)\}$. ⋊

» 1.) Die Symmetrie folgt direkt aus $G(x,y)=G(y,x)$. Zur Kompaktheit siehe 1.25.

2.)

$$v \in \operatorname{im} K \Leftrightarrow \exists\, \varphi \in C(I \to \mathbb{R}) : v(x) = \int_I G(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow v(x) = \sqrt{r(x)} \int_I G'(x,y) \underbrace{\sqrt{r(y)}\varphi(y)}_{\in L(I\to\mathbb{R})} \,\mathrm{d}y\,.$$

In 1.37 haben wir gesehen, dass $\int_I G'(x,y) \underbrace{\sqrt{r(y)}\varphi(y)}_{\in L(I\to\mathbb{R})} \,\mathrm{d}y \in D(A)$. «

1.44 **Satz von Sturm-Liouville** *(1.1) besitzt abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_j, j \in \mathbb{N}$. Es gilt*

1.) $\lambda_j \to +\infty$ für $j \to \infty$.

2.) Jeder Eigenwert hat Vielfachheit 1.

3.) Die Eigenfunktionen (u_j) können so normiert werden, dass die $(\sqrt{r}u_j)$ ein ONS bilden. Dieses ist vollständig in $\mathcal{L}^2(I)$. ⋊

» "2.)": Siehe 1.33.

"1.)": λ ist Eigenwert von (1.1) ist äquivalent zu $\mu = \frac{1}{\lambda - d}$ ist Eigenwert von K. K ist symmetrisch und kompakt besitzt daher abzählbar viele Eigenwerte μ_j und $\mu_j \to 0$.

"3.)": Da Eigenwerte von (1.1) einfach sind, sind auch die Eigenwerte von K einfach. Da K symmetrisch, sind die Eigenfunktionen (v_j) orthogonal. Normiert man diese, bilden sie ein ONS. Da $r > 0$ bilden auch die $v_j = \sqrt{r}u_j$ ein ONS. Der Hauptsatz sagt nun, dass dieses ONS vollständig in $\overline{\operatorname{im} K}$ ist. Satz 1.37 besagt,

$$\overline{\operatorname{im} K} = \overline{\{\sqrt{r}u \;:\; u \in D(A)\}}$$

Der Abschluss hängt nun vom umgebenden Raum ab,

$$\overline{\operatorname{im} K}^{C(I\to\mathbb{R})} = C(I \to \mathbb{R}),$$
$$\overline{\operatorname{im} K}^{\mathcal{L}^2(I\to\mathbb{R})} = \mathcal{L}^2(I \to \mathbb{R}). \quad «$$

1.45 **Bessere Konvergenz** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $G \in C(K \times K \to \mathbb{R})$, $L := C(K \to \mathbb{C})$, $G(x,y) = G(y,x)$,*

$$Bf(x) := \int_K G(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y\,, \quad y \in D(B) := L,$$

(e_j) Folge der orthonormierten Eigenfunktionen mit zugehörigen Eigenwerten λ_j. Dann konvergiert für $f \in \operatorname{im} B$ die Fourierreihe

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, e_j \right\rangle e_j,$$

gleichmäßig und absolut in K. ⋊

» 1.) $e_j \in C(K \to \mathbb{C})$, denn

$$\lambda_j e_j(x) = \int_K G(x,y) e_j(y) \,\mathrm{d}y\,,$$

ist stetig in x und daher ist e_j stetig.

2.) Sei $f = Bg$ und $g \in L$, dann ist

$$\left\langle f, e_j \right\rangle = \left\langle Bg, e_j \right\rangle = \left\langle g, Be_j \right\rangle = \lambda_j \left\langle g, e_j \right\rangle$$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{j=N}^{M+N} \left| \left\langle f, e_j \right\rangle e_j(x) \right| \right|^2 &= \left| \sum_{j=N}^{M+N} \left| \lambda_j \left\langle g, e_j \right\rangle e_j(x) \right| \right|^2 \\ &\leq \underbrace{\sum_{j=N}^{N+M} \left| \left\langle g, e_j \right\rangle \right|^2}_{\leq \varepsilon \text{ für } N > N_\varepsilon \text{ Bessel}} \underbrace{\sum_{j=N}^{M+N} \left| \lambda_j e_j(x) \right|^2}_{\leq cs.u.}\end{aligned}$$

Betrachte zur Abschätzung des 2. Faktors,

$$\lambda_j e_j(x) = B e_j(x) = \int_K G(x,y) e_j(y) \,\mathrm{d}y = \left\langle G(x,\cdot), e_j \right\rangle,$$

$$\sum_{j=N}^{M+N} \left| \lambda_j e_j(x) \right|^2 = \sum_{j=N}^{M+N} \left| \left\langle G(x,\cdot), e_j \right\rangle \right|^2 \leq \left\| G(x,\cdot) \right\|_{\mathcal{L}^2(K)} < \infty. \quad «$$

■ Lösung der Wellengleichung

Wir wollen nun die entwickelte Theorie dazu verwenden, das Motivationsproblem der schwingenden Saite zu Beginn des Kapitels zu lösen. Betrachte dazu das Rand- und Anfangswertproblem,

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(t,x) - c(x)^2 \partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad t \geq 0, x \in I, \\
&\partial_x u(t,a) = \partial_x u(t,b) = 0, \\
&u(0,x) = g_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = 0, \qquad t \geq 0, x \in I.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Randbedingungen entsprechen also einer Saite mit freien Enden. g_0 gibt ihre Anfangsauslenkung an.

Zur Lösung betrachten wir folgendes Sturm-Liouville Problem

$$\begin{aligned}
&u''(x) + \lambda \frac{1}{c^2(x)} u(x) = 0, \\
&u'(a) = u'(b)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Obwohl dieses Problem nicht mehr zeitabhängig ist, werden wir sehen, dass wir damit (1.3) lösen können.

Wenden wir den Satz von Sturm-Liouville auf (1.4) an, so erhalten wir als Lösungen die Eigenfunktionen (u_j) mit Eigenwerten (λ_j) und $\lambda_j \to \infty$. Die $(\frac{1}{c} u_j)$ bilden ein VONS von $\mathcal{L}^2(I)$, wir können also g_0 entwickeln zu,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} g_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle \frac{1}{c} u_j \\
\Leftrightarrow g_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j.
\end{aligned}$$

Wir wissen von die Fourierreihe jedoch nur, dass sie bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergiert, über die punktweise Konvergenz können wir noch keine Aussage machen.

Proposition *Die Reihe*

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x), \tag{1.5}$$

konvergiert unter möglichen Zusatzvoraussetzungen punktweise für $t \geq 0$ und $x \in I$ und löst (1.3). $\rtimes$

Im Folgenden wollen wir die Aussage beweisen und die Zusatzvoraussetzungen, die wir an das Problem stellen müssen, erarbeiten. Wir werden daher in einigen Fällen annehmen, dass Eigenschaften erfüllt sind, über die wir noch nichts aussagen können.

» *Beweis der Propostion.* 1.) *Anfangsbedinung.*

$$u(0,x) = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x) \stackrel{!}{=} g_0(x),$$

falls die Reihe punktweise für jedes $x \in I$ konvergiert.

$$\partial_t u(t,x)\Big|_{t=0} \stackrel{!}{=} -\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x)\Big|_{t=0} = 0,$$

falls die Reihe mit ∂_t vertauscht.

2.) *Randbedingungen.*

$$u(t,a) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle \underbrace{u_j(a)}_{=0} = 0,$$

da u_j Lösung von (1.4) ist. $u(t,b)$ analog.

3.) *Differentialgleichung.* Falls ∂_t^2 und ∂_x^2 mit der Reihe vertauschen, gilt

$$\partial_t^2 u(t,x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x),$$

$$\partial_x^2 u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j''(x).$$

u_j'' erfüllt die Gleichung (1.4) und daher gilt

$$\partial_x^2 u(t,x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle \frac{\lambda_j}{c^2(x)} u_j(x).$$

Damit ist $\partial_t^2 u(t,x) - c(x)^2 \partial_x^2 u(t,x) = 0$ und u löst (1.3).

4.) *Konvergenzfragen*. Wir betrachten zunächst die Vertauschung der Reihe mit ∂_t^2. Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda_j \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{\lambda_j}{c} u_j \right\rangle = -\left\langle \frac{1}{c} g_0, c u_j'' \right\rangle = -\left\langle g_0, u_j'' \right\rangle \\ &= \left\langle g_0, A u_j \right\rangle = -\left\langle g_0'', u_j \right\rangle,\end{aligned}$$

falls $g_0 \in D(A)$. Somit gilt,

$$\left| \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \lambda_j \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x) \right| \leq 1 \left| \left\langle g_0'', u_j \right\rangle u_j(x) \right|.$$

$$\Rightarrow \sum \left| \left\langle g_0'', u_j \right\rangle u_j(x) \right| = c(x) \sum \left| \left\langle c g_0'', \underbrace{\frac{1}{c} u_j}_{=e_j} \right\rangle \underbrace{\frac{1}{c} u_j}_{=e_j} \right|$$

ist eine Majorante, wobei e_j das ONS aus Eigenfunktionen zu K ist[3]. Mit 1.45 folgt, dass

$$\sum \left\langle c g_0'', e_j \right\rangle e_j(x)$$

gleichmäßig bezüglich $x \in I$ konvergiert, falls $c g_0'' \in \operatorname{im} K$. Nun ist

$$\operatorname{im} K = \{\sqrt{r} u : u \in D(A)\},$$

wobei $\sqrt{r} = \frac{1}{c}$, also muss $g_0 \in D(A)$ vorausgesetzt werden. Mit dem Weierstraß-Kriterium folgt daher, dass die Reihe,

$$\underbrace{-\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x),}_{(*)}$$

gleichmäßig bezüglich $x \in I$ konvergiert. Die gefundene Majorante hängt aber nicht mehr von t ab, also konvergiert (*) auch gleichmäßig für $t \geq 0$. Wir haben bereits gezeigt, dass die Reihe

$$\underbrace{-\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j(x)}_{(**)}$$

[3] Siehe Beweis zu Satz von Sturm Liouville

für $t = 0$ konvergiert. Mit dem Satz aus der Analysis folgt somit, dass man ∂_t und (**) vertauschen kann und (**) ebenfalls gleichmäßig konvergiert. Nun konvergiert auch (1.5) absolut und gleichmäßig bezüglich $x \in I$ und $t \geq 0$, da sich (1.5) und (*) nur durch den Faktor λ_j unterscheiden und $\lambda_j \to \infty$, also ist (*) eine Majorante von (1.5). ∂_t^2 lässt sich somit mit (1.5) vertauschen.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j''(x)$$

konvergiert ebenfalls gleichmäßig (siehe (*)), da u_j die Differentialgleichung efüllt. Setze

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) \left\langle \frac{1}{c} g_0, \frac{1}{c} u_j \right\rangle u_j'(x),}_{(***)}$$

dann konvergiert (***) aufgrund der Randbedingung für $x = a$ und $x = b$, wir können also wieder den Satz aus der Analysis anwenden und erhalten, dass (***) absolut und gleichmäßig konvergiert. Wir können somit ∂_x^2 und (1.5) vertauschen. «

Der folgende Satz fasst die Voraussetzungen an (1.5) zusammen.

1.46 **Satz** *Seien*

$$D(A) := \left\{ u \in C^2(I \to \mathbb{R}) \, : \, u'(a) = u'(b) = 0 \right\},$$

g_0 und $c^2 g_0'' \in D(A)$, dann besitzt (1.3) eine Lösung gegeben durch (1.5). ⋊

1.47 **Offene Fragen** *1.) Ist die Lösung von (1.3) eindeutig?*

2.) Wie verhält es sich mit anderen Randbedingungen?

3.) Können die Voraussetzungen weiter abgeschwächt werden? ⋊

» 1.) Ja, man kann dies zeigen.

2.) Für unseren Beweis war es maßgeblich, dass $u'(a) = 0$. Der Beweis klappt jedoch auch für andere Randbedingungen, man muss in diesem Fall u' durch u und u'' interpolieren.

3.) Ja, näheres sagt der Satz von Merces. «

1.48 *Bemerkung.* Die Funktionen $\cos\left(\sqrt{\lambda_j}t\right) u_j(x)$ sind die Eigenfunktionen des Systems. Die Lösungsstruktur (1.5) ist sehr allgemein und ergibt sich auch bei viel allgemeineren Problemen. ⊸

1-E Sinus-Cosinus-Reihen

Sei $L := \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ und

$$e_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & j = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{j+1}{2}x\right), & \frac{j-1}{2} \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{j}{2}x\right), & \frac{j}{2} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die (e_j) bilden ein ONS in L. Man kann mit Hilfe des Sturm-Liouville-Problems zeigen, dass dieses ONS vollständig in L ist, d.h.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, \qquad \forall\ x \in L.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Parsevallsche Gleichung für jedes $x \in L$ gilt,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 = \|x\|^2, \qquad \forall\ x \in L.$$

Die für unseren Fall übliche Notation für Fourier-Koeffizienten der Fourierentwicklung von f ist

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(jt)\, \mathrm{d}t, \qquad j \in \mathbb{N},$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(jt)\, \mathrm{d}t, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Die n-te Partialsumme der Fourierreihe ist gegeben durch

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \Big(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)\Big)$$
$$s(x) = \lim_{j\to\infty} s_n(x).$$

Die Vollständigkeit besagt nun, dass $||s_n - f|| \to 0$. Im Folgenden wollen wir zusätzlich die punktweise Konvergenz $s_n(x) \to f(x)$ betrachten. Für $f \in C^2$ haben wir bereits gesehen, dass die Reihe auch punktweise konvergiert.

1.49 *Beobachtungen.* 1.) Ist f auf $\mathbb{R}$ definiert und 2π-periodisch, so können die Integrale beliebig verschoben werden,

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(jt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+c}^{\pi+c} f(t)\cos(jt)\,\mathrm{d}t\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.) a_j, b_j und damit s ändern sich nicht, wenn f auf einer Nullmenge abgeändert wird.

3.) Zur Definition von a_j, b_j zu f reicht $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]) \supsetneq \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$.

1.50 **Lemma** *Falls $f \in C^1([-\pi,\pi] \to \mathbb{C})$, dann gilt*

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad (*)$$
$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0. \quad \rtimes$$

» Wir zeigen die Behauptung nur für den Sinus, sie folgt für den Cosinus analog.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\underbrace{f(t)}_{|\cdot|\le C_f}\underbrace{\cos(\omega t)}_{\le 1} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\omega}\underbrace{f'(t)}_{|\cdot|\le C_{f'}}\underbrace{\cos(\omega t)}_{\le 1}\,\mathrm{d}t \to 0 \quad «$$

1.51 **Lemma von Riemann** *Falls $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ gilt ebenfalls (*).* $\rtimes$

» Sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, $\varepsilon > 0$ fest. $C^1([-\pi,\pi])$ liegt dicht in $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, d.h.

$$\exists\, f_\varepsilon \in C^1([-\pi,\pi]) : \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Es gilt nun unabhängig für $\omega > 0$,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f_\varepsilon(t)) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, \mathrm{d}t = \|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Aus 1.50 folgt,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon,$$

für $\omega > \omega_\varepsilon$. Insgesamt ergibt sich,

$$\begin{aligned}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_\varepsilon)(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &< 2\varepsilon,\end{aligned}$$

für $\omega > \omega_\varepsilon$. «

1.52 **Lemma** *Für $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, 2π-periodisch fortgesetzt gilt,*

$$s_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \underbrace{\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{(**)},$$

wobei (**) stetig ergänzbar bei $t = 0$. ⋊

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

1.53 **Krierium von Dini** *Es sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, 2π-periodisch fortgesetzt, $x \in [-\pi,\pi]$ und*

$$\exists\, \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, \mathrm{d}t < \infty.$$

Dann gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. ⋊

» Wegen $f \in \mathcal{L}^1$ und der Integrationsbedingung gilt

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi]).$$

Mit 1.52 folgt

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t$$

Nun ist $g \in \mathcal{L}^1$ und $\dfrac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ ist stetig fortsetzbar, also ist auch das Produkt in $\mathcal{L}^1$ und damit ist der ganze Integrand $\mathcal{L}^1$ und das Integral verschwindet nach dem Lemma von Riemann. «

» *Beweis von 1.52.*

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(jt) \cos(jx) + f(t) \sin(jt) \sin(jx) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(e^{ij(x-t)} + e^{ij(t-x)} \right) \mathrm{d}t \right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)}}_{=: D_n(x-t)} f(t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nun gilt für D_n,

$$\begin{aligned}
2\pi D_n(\xi) &= \sum_{j=-n}^{n} e^{ij\xi} \overset{j \mapsto j+n}{=} e^{-in\xi} \sum_{j=0}^{2n} e^{ij\xi} = e^{-in\xi} \left(\frac{1 - e^{i(2n+1)\xi}}{1 - e^{i\xi}} \right) \\
&= \underbrace{e^{-in\xi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\xi}}{e^{i\frac{1}{2}\xi}}}_{=1} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\xi} - e^{i(n+\frac{1}{2})\xi}}{e^{-i\frac{1}{2}\xi} - e^{i\frac{1}{2}\xi}} = \frac{-2i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right)}{-2i \sin\left(\frac{1}{2}\xi\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\xi\right)}
\end{aligned}$$

$D_n(\xi)$ nennt man den Dirichlet-Kern. Für die Partialsumme gilt daher

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Für den Spezialfall $f = 1$ konstant, sind alle $a_j, b_j = 0$ außer $\frac{a_0}{2}$, d.h.

$$s_n(x) = 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\, \mathrm{d}t \; = 1.$$

Nun ist D_n 2π-periodisch, d.h. $D_n(\xi + 2\pi) = D_n(\xi)$, also gilt auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\, \mathrm{d}\xi \; = 1. \tag{*}$$

f ist ebenfalls 2π-periodisch, wir können also das Integral verschieben,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, \mathrm{d}t \; = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t) D_n(x-t)\, \mathrm{d}t \\ &\overset{\xi = t-x}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x) \underbrace{D_n(-\xi)}_{= D_n(\xi)}\, \mathrm{d}\xi \quad \text{«} \end{aligned}$$

1.54 **Satz** *Das Kriterium von Dini ist erfüllt, falls $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, 2π-periodisch fortgesetzt, hölderstetig in x ist, d.h.*

$$\exists\, \delta > 0\; \exists\, \alpha > 0\; \exists\, c > 0\; \forall\, t \in [-\delta, \delta] : \left| f(x-t) - f(x) \right| \le c\, |t|^{\alpha}\,.$$

und

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \mathrm{d}t \; \le c \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha - 1}\, \mathrm{d}t \; = 2c \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} < \infty. \quad \rtimes$$

1.55 **Erweitertes Kriterium von Dini** *Sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$, 2π-periodisch fortgesetzt und $x \in [-\pi,\pi]$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art, d.h.*

$$\int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| \mathrm{d}t \; < \infty,$$

$$\int_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right| \mathrm{d}t \; < \infty,$$

so konvergiert die Fourierreihe in x und es gilt,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]. \quad \rtimes$$

Bsp

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -\pi, 0, \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad \blacksquare$$

» Der Dirichletkern ist symmetrisch, $D(\xi) = D(-\xi)$ und es gilt,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} = \frac{1}{2} = \int_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2}.$$

Wir können somit schreiben,

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \int_0^{\pi} f(x+0) D_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{-\pi}^{0} f(x-0) D_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Satz 1.52 besagt nun,

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

es folgt somit,

$$\begin{aligned} &s_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] \\ &= \int_0^{\pi} \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} \left[f(x+t) - f(x-0)\right] D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{1.53}{\to} 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$ «

1.56 **Lipschitzkriterium** *Sei $f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, 2π-periodisch fortgesetzt und*

$$\exists\ \alpha > 0, c > 0 : \ \forall\ x, x' \in \mathbb{R} : \left| f(x) - f(x') \right| \leq c \left| x - x' \right|^{\alpha}.$$

Dann konvergiert (s_n) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f. $\rtimes$

» Sei $x \in [-\pi, \pi]$, und $\varepsilon > 0$.

1.) Aus 1.52 folgt

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| f(x+t) - f(x) \right| \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq \frac{c}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha - 1} \frac{|t|}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \mathrm{d}t.$$

$\dfrac{|t|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|}$ kann stetig in Null fortgesetzt werden und hat daher ein Maximum d auf $[-\delta, \delta]$. Es gilt

$$\leq \frac{cd}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha-1} \mathrm{d}t = \frac{2cd}{2\pi} \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}.$$

Und daher ist

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| f(x+t) - f(x) \right| |D_n(t)| \mathrm{d}t < \varepsilon,$$

für $0 < \delta < \delta_\varepsilon$.

2.) Wähle nun $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ fest. f ist stetig auf $[-\delta, \delta]$, das Intervall ist kompakt, also ist f dort gleichmäßig stetig, die 2π-periodische Fortsetzung ist somit gleichmäßig stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wähle nun eine Zerlegung des Intervalls,

$$-\pi = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = -\delta < \delta < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_{2m+1} = \pi,$$

so dass

$$\left| f(x + \tau_j) - f(x+t) \right| < \varepsilon,$$

für $\tau_j \le t \le \tau_{j+1}$, $j \neq m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| f(x+\tau_j) - f(x+t) \right| |D_n(t)| \, \mathrm{d}t \\
&+ \sum_{j=m}^{2m+1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| f(x+\tau_j) - f(x+t) \right| |D_n(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon \frac{1}{\left| \sin \frac{\delta}{2} \right|}
\end{aligned}$$

3.) Definiere für festes x die Treppenfunktion

$$g_x(t) = f(x+\tau_j), \quad \text{für } \tau_j \le t < \tau_{j+1}.$$

Dann erhalten wir,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{[-\pi,-\delta]}^{[\delta,\pi]} \left(g_x(t) - f(x)\right) D_n(t) \, \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \Big(f(x+\tau_j) - f(x) \Big) D_n(t) + \sum_{j=m}^{2m-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \ldots \right| \\
&\le 2 \max_{\mathbb{R}} |f| \left[\sum_{j=1}^{m-1} \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} D_n(t) \, \mathrm{d}t \right| + \sum_{j=m}^{2m-1} \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} D_n(t) \, \mathrm{d}t \right| \right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

Der Dirichletkern ist unabhängig von x und es gilt,

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} D_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \underbrace{\frac{1}{2\pi \sin \frac{t}{2}}}_{\in \mathbb{C}^\infty} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t \right) \, \mathrm{d}t \to 0$$

nach dem Lemma von Riemann. Damit ist $|*| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ und

$$\left| s_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon,$$

für $n > N_\varepsilon$ und unabhängig von x. «

1.57 *Bemerkung.* Wenn $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ und 2π-periodisch, dann gilt

$$\left| f(x) - f(x') \right| \overset{\text{MWS}}{\leq} \left| f'(xi) \right| \left| x - x' \right| \leq \max_{\mathbb{R}} \left| f' \right| \left| x - x' \right|,$$

und damit ist die Lipschitz-Bedingung erfüllt. ⊸

1.58 **Komplexe Darstellung**

$$s_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left\langle f, e_j \right\rangle e_j(x),$$

mit

$$e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ijx}.$$

Die (e_j) bilden ein vollständiges ONS von $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. ⋊

» Aus dem Beweis von 1.52 wissen wir,

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)} f(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{j=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ijt}}{\sqrt{2\pi}} f(t) \frac{e^{ijx}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}t\,.$$

Anders angeschaut erhalten wir so

$$e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ijx},$$

$$s_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left\langle f, e_j \right\rangle e_j(x).$$

(e_j) ist ein ONS in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, denn

$$\left\langle e_j, e_k \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(j-k)x}}{i(j-k)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = 0, & j \neq k. \end{cases}$$

$C_0^1((-\pi,\pi) \to \mathbb{C})$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, wähle nun zu $f \in \mathcal{L}^2$ ein $\tilde{f} \in C_0^1$ mit $\left\| f - \tilde{f} \right\|_2 < \varepsilon$. Setzt man $\tilde{f}$ 2π-periodisch fort, erhält man $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$. Sei $\tilde{s}_n$ die Fouriersumme zu $\tilde{f}$, dann gilt,

$$\left| \tilde{s}_n - \tilde{f} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

für $N > N_\varepsilon$ und daher ist,

$$\left\|\tilde{s}_n - \tilde{f}\right\|^2 = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \left|\tilde{s}_n(x) - \tilde{f}(x)\right| \,\mathrm{d}x \le \varepsilon^2.$$

Damit gilt,

$$\|f - s_n\| \le \underbrace{\left\|f - \tilde{f}\right\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left\|\tilde{f} - \tilde{s}_n\right\|}_{\le\varepsilon, n>N_\varepsilon} + \|\tilde{s}_n - s_n\|\,.$$

Der letzte Summand ist die Fouriersumme von $\tilde{f} - f$, da die Fouriersumme linear in f ist. Die Besselungleichung besagt nun, dass

$$\|\tilde{s}_n - s_n\| \le \left\|\tilde{f} - f\right\| < \varepsilon,$$

somit ist

$$\|f - f_n\| < 3\varepsilon, \quad \text{für } n > N_\varepsilon.$$

Also ist das ONS (e_j) vollständig. «

Wir haben also drei Konvergenzmöglichkeiten.

(a) Ist $f \in \mathcal{L}^2$, so konvergiert $s_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_2$.

(b) Erfüllt f das Dinikriterium in x, so konvergiert $s_n(x) \to f(x)$ punktweise.

(c) Erfüllt f das Lipschitzkriterium, so konvergiert $s_n \twoheadrightarrow f$ glm. bezüglich x.

1.59 **Andere Intervalle** *Sei f 2π-periodisch und erfülle das Lipschitzkriterium, so ist auch*

$$g(x) = f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)$$

2π-periodisch und erfüllt ebenfalls das Lipschitzkriterium. ⋊

» Sei s_n die Fouriersumme von g,

$$f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) := g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) e^{ijx} \,\mathrm{d}t\,.$$

Substituiere $s = \frac{Lt}{\pi}$, so ist $\mathrm{d}t = \frac{\pi}{L}\,\mathrm{d}s$,

$$f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-ij\frac{\pi s}{L}} f(s) e^{ijx}\,\mathrm{d}s\,.$$

Setzen wir nun $y = \frac{Lx}{\pi}$,

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-ij\frac{\pi s}{L}} f(s)\,\mathrm{d}s\, e^{ij\frac{\pi y}{L}}\,.$$

Es gelten nun dieselben Sätze mit $f_j(y) := e^{ij\frac{\pi}{L}y}$ anstelle von e_j. (f_j) ist ein VONS in $\mathcal{L}^2([-L,L])$. «

1.60 **Bsp** Löse die Differentialgleichung,

$$ay''(x) + by'(x) + y(x) = f(x), \quad -L \le x \le L,$$

mit

$$y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L), \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Entwickle f, y, y' und y'' und rechne formal, d.h. man geht davon aus, dass die Objekte die Voraussetzungen für alle verwendeten Operationen erfüllen und prüft erst abschließend welche Bedingungen gestellt werden müssen.

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x),$$

$$y(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle y, f_j \right\rangle f_j(x),$$

$$y'(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle y, f_j \right\rangle f_j'(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle y, f_j \right\rangle \frac{ij\pi}{L} f_j(x),$$

$$y'(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle y, f_j \right\rangle f_j''(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle y, f_j \right\rangle \frac{i^2 j^2 \pi^2}{L^2} f_j(x).$$

Wir gehen hier davon aus, dass Ableitung und Reihe vertauschbar sind. Setze nun die Entwicklung in die Differentialgleichung ein,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{j^2\pi^2}{L^2} a + \frac{ij\pi}{L} b + 1 \right) \left\langle y, f_j \right\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x).$$

Wir wissen bereits, dass wenn die Fourierreihen in jedem x übereinstimmen, die Koeffizienten gleich sind. Es gilt daher,

$$\left\langle y, f_j \right\rangle = \underbrace{\frac{1}{-a\frac{j^2\pi^2}{L^2} + b\frac{ij\pi}{L} + 1}}_{:=\alpha_j} \left\langle f, f_j \right\rangle,$$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_j \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x).$$

Wir wollen nun die Voraussetzungen an f erarbeiten. Sei $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ 2π-periodisch, dann konvergiert die Fouriersumme von f gleichmäßig. Durch partielle Integration erhält man, $\left\langle f, f_j \right\rangle \leq \frac{c}{j}$. Die Reihe

$$y(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x),$$

konvergiert gleichmäßig, denn

$$\left| \alpha_j \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x) \right| \leq \frac{c}{j^3},$$

Weierstrass Kriterium. Die Reihe

$$y'(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{ij\pi}{L} \alpha_j \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x),$$

konvergiert gleichmäßig, denn

$$\left| \frac{ij\pi}{L} \alpha_j \left\langle f, f_j \right\rangle f_j(x) \right| \leq \frac{c}{j^2}.$$

Nun ist

$$y'' = \frac{1}{a} (f - by' - y)$$

und die rechte Seite konvergiert gleichmäßig, also konvergiert auch y'' gleichmäßig.

Somit sind alle Voraussetzungen zur Vertauschung von Ableitung und Reihe erfüllt und $y \in C^2$ erfüllt die Differentialgleichung.

$$y(x) = \int_{-L}^{L} \underbrace{\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e^{ij(x-t)} \right)}_{:=G(x,t)} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

$G(x,t)$ ist die Greensche Funktion zum Operator,

$$Lu := au'' + bu' + u.$$

Die Greensche Funktion ist im Komplexen nicht mehr symmetrisch sondern hermitesch. ■

2 Fouriertransformation

2-A Grundlagen

2.1 **Definition** *Für $f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ und $j, k \in \mathbb{N}_0$ sei*

$$||f||_{j,k} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^j f^{(k)}(x) \right| .$$

Für $k \geq 1$ ist $||f||_{j,k}$ eine Seminorm. Der Schwartzraum[4] über $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$S(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) : \ \forall\ j, k \in \mathbb{N}_0 : ||f||_{j,k} < \infty \right\} . \qquad \rtimes$$

2.2 *Bemerkung.* Mit

$$d(f, g) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+k}} \frac{||f - g||_{j,k}}{1 - ||f - g||_{j,k}}$$

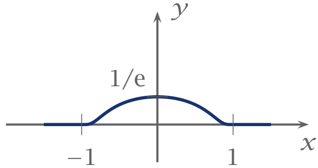
wird $S(\mathbb{R})$ zu einem vollständigen metrischen Raum. $\multimap$

2.3 **Bsp** 1.) $f_1(x) = x^j e^{-x^2} \in S(\mathbb{R}),\ \forall\ j \in \mathbb{N}_0$.

2.) $f_2(x) = \frac{1}{(1+x^2)^j} \notin S(\mathbb{R}),\ \forall\ j \in \mathbb{N}_0$.

3.) Betrachten wir die Funktion,

$$f_3(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} .$$



3 Graph der Funktion f_3.

[4] Laurent Schwartz (* 5. März 1915 in Paris; † 4. Juli 2002 ebenda)

Offensichtlich ist $f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ und $\operatorname{supp} f = [-1, 1]$. Damit haben auch alle Ableitungen kompakten Träger und es gilt $f \in S(\mathbb{R})$. ■

2.4 **Eigenschaften** *1.) $S(\mathbb{R})$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra ohne Einselement.*

2.) Seien $f \in S(\mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{N}_0$ und

$$g(x) = x^j f^{(k)}(x),$$

so ist auch $g \in S(\mathbb{R})$. ⋊

» Der Beweis ist eine leichte Übung. «

2.5 **Definition** *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt*

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

der Träger bzw. Support von f.

$$C_0^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) : \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt}\}.$$

Offensichtlich ist $C_0^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \subseteq S(\mathbb{R})$. ⋊

2.6 **Fouriertransformation** *Für $f \in S(\mathbb{R})$ heißt*

$$\mathcal{F} f(x) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x$$

die Fouriertransformierte von f. ⋊

2.7 **Bsp** Wir wollen die Fouriertransformation der Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

berechnen,

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x.$$

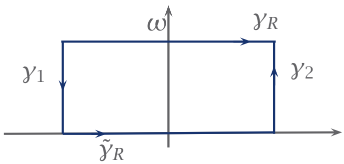
Quadratische Ergänzung ergibt,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i\omega x-\omega^2)} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-i\omega)^2)}\,\mathrm{d}x}_{:=\sqrt{2\pi}\text{ (s.u.)}} \\ &= \sqrt{2\pi} f(\omega).\end{aligned}$$

f ist also Eigenfunktion der Fouriertransformation mit Eigenwert 1.

Wir wollen das $\sqrt{2\pi}$ nun Integral explizit berechnen. Dazu bedienen wir uns der Funktionentheorie, denn $f(z)$ ist ganze Funktion. Es gilt somit

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$



4 Konstruktion der geschlossenen Kurve

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \sup_{z\in \operatorname{im}\gamma_1} |f(z)|\, L(\gamma_1) = \sup_{0\le t\le\omega} \left| e^{-\frac{(it-R)^2}{2}} \right| \omega \\ &= \sup_{0\le t\le\omega} \left| e^{\frac{-R^2+2iRt+t^2}{2}} \right| \omega = e^{-\frac{R^2}{2}} e^{\frac{\omega^2}{2}} \omega \xrightarrow{R\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \to 0, \quad \text{für } R\to\infty,$$

somit gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}. \quad ■$$

2-B Eigenschaften der Fouriertransformation

2.8 **Satz** *Für $f \in S(\mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{N}_0$ gelten,*

$$\widehat{f^{(j)}}(\omega) = (i\omega)^j \hat{f}(\omega)$$
$$g(x) = x^k f(x) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = i^k \hat{f}^{(k)}(\omega)$$
$$g(x) = x^k f^{(j)}(x) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = i^{k+j} x^j \hat{f}^{(k)}(\omega). \quad ⋊$$

» 1.) Sei $j = 1$.

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{part.int.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x \right] \\ &= i\omega \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Rest folgt mit Induktion über j.

2.) Sei $k = 1$.

$$g(x) = x f(x)$$
$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x.$$

Der abgeleitete Integrand konvergiert gleichmäßig, wir können also Ableitung und Integral vertauschen,

$$\hat{g}(x) = i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x = i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \hat{f}(\omega).$$

Wir sehen also insbesondere, dass $\hat{f}$ differenzierbar ist. Rest folgt mit Induktion über k. «

2.9 **Satz** *$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ ist eine lineare Abbildung von $S(\mathbb{R})$ nach $S(\mathbb{R})$.* ⋊

» Die Linearität folgt direkt aus der Linearität des Integrals. Sei nun $f \in S(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\omega)\right| &= \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\end{aligned}$$

Setze $g(x) = x^k f^{(j)}(x)$, so ist $g \in S(\mathbb{R})$ und $\hat{g}(\omega) = i^j \omega^j \hat{f}^{(k)}(\omega)$, wobei

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left|\omega^j \hat{f}^{(k)}(\omega)\right| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)| < \infty,$$

also ist $f \in S(\mathbb{R})$. «

2.10 *Bemerkung.* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ ist stetig. ⊸

2.11 **Satz** *$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ ist bijektiv mit,*

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{+i\omega x}\,\mathrm{d}\omega\,. \quad ⋊$$

» 1.) Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\operatorname{supp} f \subseteq \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Dann kann f $\frac{2}{\varepsilon}$-periodisch fortgesetzt werden. Die Fortsetzung ist $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$. Entwickeln wir f in $\left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ in seine Fourierreihe,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t)e^{ij\frac{\pi}{\frac{1}{\varepsilon}}(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t)e^{-ij\pi\varepsilon t}\,\mathrm{d}t\, e^{ij\pi\varepsilon x}\end{aligned}$$

Da f kompakten Träger $\subseteq \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ hat, können wir übergehen zu,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ij\pi\varepsilon t} \, \mathrm{d}t}_{=\sqrt{2\pi}\hat{f}(j\pi\varepsilon)} \, e^{ij\pi\varepsilon x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi\varepsilon \hat{f}(j\pi\varepsilon) e^{ij\pi\varepsilon x}.
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck kann man als Riemannsumme mit Schrittweite $\pi\varepsilon$ interpretieren. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir so,

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega \, .
$$

2.) Sei $f \in S(\mathbb{R})$ und ψ_R eine Abschneidefunktion mit folgenden Eigenschaften,

- $\psi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
- $\psi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| \geq R+2, \\ \in [0,1], & \text{sonst} \end{cases}$
- $\left|\psi_R'\right|, \left|\psi_R''\right| \leq c$ unabhängig von R.

Wir werden im Anschluss an diesen Beweis zeigen, dass so eine Funktion überhaupt existiert.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ sei

$$
g_R := \psi_R \cdot f.
$$

Offensichtlich ist $g_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir können nun die Ergebnisse aus 1.) verwenden. Für $|x| \leq R$ gilt,

$$
\begin{aligned}
f(x) = g_R(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_R(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega \, , \\
\hat{g}_R(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_R(x) f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Sei nun ω fest, dann gilt

$$e^{-i\omega x}\psi_R(x)f(x) \to e^{-i\omega x}f(x).$$

Da außerdem $f \in S(\mathbb{R})$ gilt weitherin,

$$\left|\psi_R(x)f(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \leq \frac{c}{1+x^2}.$$

Wir können somit den Satz über majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\psi_R(x)f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für ω fest konvergiert also $\hat{g}_R(\omega) \to \hat{f}(\omega)$ für $R \to \infty$. Wir wollen nun noch einmal die Fouriertransformation ausführen und die majorisierte Konvergenz verwenden. Dazu benötigen wir eine weitere Majorante,

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}_R(\omega)\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi_R(x)f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\overset{\text{2x par.int.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{1}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_R(x)f(x))''e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right|. \qquad (*)\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt,

$$\begin{aligned}&|\psi_R|, \left|\psi_R'\right|, \left|\psi_R''\right| \leq c, \\ &|f|, |f'|, |f''| \leq \frac{c}{1+x^2},\end{aligned}$$

und damit ist

$$(*) \leq \left|\frac{d}{1+\omega^2}\right|.$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt,

$$f(x) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}_R(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Auf im $\mathcal{F}$ gilt also,

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

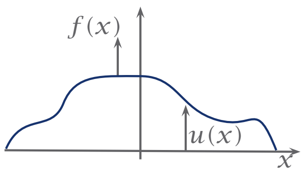
3.) Wir erhalten das gleiche Ergebnis, wenn wir $e^{-i\omega x}$ und $e^{i\omega x}$ vertauschen,

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+i\omega x}\, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x = \mathcal{F}\check{f}.$$

Ist also $f \in \operatorname{im}\mathcal{F}$, so ist auch $f = \widehat{\left(\check{f}\right)} \in \operatorname{im}\mathcal{F}$ und $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. «

2.12 **Bsp** Durchbiegung einer unendlich langen Schiene.



5 **Schiene mit Kraft $f(x)$ und Durchbiegung $u(x)$.**

Beschreibe $u(x)$ die Durchbiegung einer Schiene hervorgerufen durch die Kraft $f(x)$. $u(x)$ erfüllt folgende Differentialgleichung,

$$u^{(4)}(x) + \alpha^4 u(x) = f(x).$$

Nehmen wir an, $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und wenden die Fouriertransformation auf die Differentialgleichung an,

$$i^4 \omega^4 \hat{u}(\omega) + \alpha^4 \hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Für die Fouriertransformierte der Lösung gilt somit,

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + \alpha^4} \hat{f}(\omega).$$

Die Lösung ist gegeben durch,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega^4 + \alpha^4} e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega\,.$$

Wir wollen nun unsere Annhame überprüfen.

$$f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{\hat{f}}{\cdot^4 + \alpha^4} \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in S(\mathbb{R}).$$

Es muss also lediglich gefordert werden, dass $f \in S(\mathbb{R})$.

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung, der Lösungsraum ist also 4 Dimensional, unsere Lösung ist somit nicht eindeutig. Man kann jedoch zeigen, dass man so die einzige Lösung erhält, die "schnell abklingt" ($\in S(\mathbb{R})$). So lange wir also Schienen mit endlicher Ausdehnung betrachten ist diese Lösung die einzige. ■

2.13 **Abschneidefunktion** *Es existiert eine Abschneidefunktion ψ_R für $R > 0$ mit den in 2.11 geforderten Eigenschaften,*

(i) $\psi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $$\psi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| \geq R+2, \\ \in [0,1], & \textit{sonst} \end{cases}$$

(iii) $|\psi_R'|, |\psi_R''| \leq c$ *unabhängig von* R. ⋊

» Sei dazu,

$$j(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases},$$

$$c = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}}.$$

j hat offensichtlich die Eigenschaften,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} j(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} j(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$\operatorname{supp} j = [-1,1],$$

$$j \in C_0^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}),$$

$$j(x) \geq 0.$$

Setze nun,

$$\psi_R(x) := \int_{-\infty}^{\infty} j(x-y)\chi_{[-R-1,R+1]}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-R-1}^{R+1} j(x-y)\,\mathrm{d}y\,,$$

so folgt unmittelbar

$$\psi_R \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}).$$

Für $|x| \le R$ gilt,

$$\psi_R(x) = \int_{x-1}^{x+1} j(x-y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Für $|x| \ge R+2$ gilt,

$$\psi_R(x) = \int_{-R-1}^{R+1} 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

j ist positiv, also ist auch ψ_R positiv und

$$\psi_R(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} j(x-y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

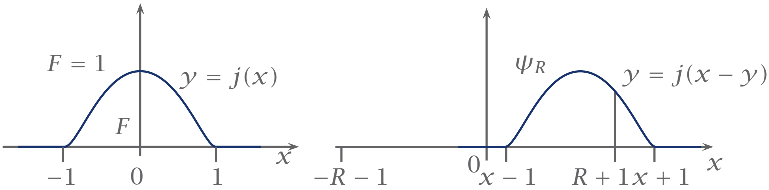
Außerdem gilt,

$$\begin{aligned} \left|\psi_R^{(k)}\right| &\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} j^{(k)}(x-y)\,\mathrm{d}y \right| \overset{z=x-y}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} j^{(k)}(z)\,\mathrm{d}z \right| \\ &= \int_{-1}^{1} \left| j^{(k)}(z) \right| \,\mathrm{d}z \le 2 \max_{|z|\le 1} \left| j^{(k)}(z) \right| \end{aligned}$$

und die rechte Seite ist unabhängig von R. «

2.14 **Plancherel Gleichung** *Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt,*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\,. \quad \rtimes$$



6 **Verschiebung.**

» 1.) Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wie in 2.11 sei

$$\operatorname{supp} f \subseteq \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Mithilfe der Parsevall-Gleichung in $\mathcal{L}^2\left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ und dem VONS

$$e_j(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{ij\pi\varepsilon x},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{L}^2\left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \left\langle f, e_j \right\rangle \right|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t) \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{ij\pi\varepsilon t} \, \mathrm{d}t \right|^2 \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} 2\pi \left| \hat{f}(j\pi\varepsilon) \right|^2
\end{aligned}$$

Dies können wir wieder als Riemann-Summe interpretieren. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir so,

$$\ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega .$$

2.) Verwende nun die Abschneidefunktion ψ_R und zeige für $f \in S(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\|\psi_R f\| \to \|f\|, \\
&\left\|\widehat{\psi_R f}\right\| \to \left\|\hat{f}\right\|.
\end{aligned}$$ «

2.15 **Korollar** *Für $f, g \in S(\mathbb{R})$ gilt,*

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}. \quad \rtimes$$

» Wir führen das Skalarprodukt mittels folgender Identität auf seine erzeugte Norm zurück,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 - i\,\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2\right). \quad «$$

Die Fouriertransformation ist also eine bijektive in beide Richtungen stetige Abbildung, die Norm und Skalarprodukt erhält.

Wir wollen die Fouriertransformation von Produkten von Funktionen betrachten. Dazu benötigen wir noch den Begriff der Faltung.

2.17 **Definition** *Für $f, g \in S(\mathbb{R})$ ist*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

die Faltung von f mit g. $\rtimes$

Bsp $\psi_R = j * \chi_{[-R-1,R+1]}$. ■

2.18 **Satz** *Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$. Dann gilt,*

1.) $f * g \in S(\mathbb{R})$.

2.) $\widehat{f \cdot g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}$,
$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\,\hat{f} \cdot \hat{g}$.

3.) Die Faltung ist kommutativ und assoziativ,

$$f * g = g * f, \qquad f * (g * h) = (f * g) * h. \quad \rtimes$$

» "2.)":

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f \cdot g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \left\langle g, \overline{e^{-i\cdot\omega} f} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\langle \hat{g}, \widehat{\overline{e^{-i\cdot\omega} f}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega') \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-ix\omega} f(x)} e^{-ix\omega'}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\omega'$$

Nun ist

$$\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-ix\omega} f(x)} e^{-ix\omega'} \,\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(\omega-\omega')} \,\mathrm{d}x = \hat{f}(\omega-\omega').$$

Wir erhalten so,

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f\cdot g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega')\hat{f}(\omega-\omega')\,\mathrm{d}\omega' = \hat{f} * \hat{g}.$$

Analog folgt, $\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\cdot\hat{g}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g \Rightarrow \hat{f}\cdot\hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f * g}$.

"1.)":

$$\begin{aligned} f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\overset{2.9}{\Rightarrow} \hat{f},\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}\cdot\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ &\overset{2.9}{\Rightarrow} f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\cdot\hat{g}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

"3.)":

$$\begin{aligned} f * g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\hat{g}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}\hat{f}\right) = g * f \\ (f * g) * h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f * g}\cdot\hat{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}\cdot\hat{g}\cdot\hat{h}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\cdot\widehat{g * h\cdot}\right) = f * (g * h)\,. \quad \text{«} \end{aligned}$$

2-C Dichte Mengen

2.19 **Satz** *Sei* $1 \le p < \infty$. *Dann ist* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *dicht in* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. ⋊

Wir benötigen für diesen Beweis noch etwas Vorbereitung.

2.20 **Definition** *Sei* $j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *mit*

1.) $j(x) \ge 0$,

2.) $j(x) = 0$ *für* $|x| \ge 1$,

3.) $\int_{\mathbb{R}} j(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(vgl 2.13 $j(x) = ce^{-\frac{1}{1-x^2}}$). Setze für $\varepsilon > 0$,

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{cases} j_\varepsilon(x) \geq 0, & \\ j_\varepsilon(x) = 0, & \text{für } |x| \geq \varepsilon, \\ j_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}), & \\ \int_\mathbb{R} j_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \int_\mathbb{R} j(y)\,\mathrm{d}y = 1. & \end{cases}$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ setze

$$J_\varepsilon f := j_\varepsilon * f = \int_\mathbb{R} j_\varepsilon(\cdot - y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

$J_\varepsilon f$ heißt Glättungsoperator oder Mollifier. ⋊

2.21 **Bsp** $f(x) = \chi_{[-1,1]}$.

$$\begin{aligned} J_\varepsilon f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-y)\chi_{[-1,1]}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq 1-\varepsilon \vee x \geq 1+\varepsilon, \\ 1 & -1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \\ \in [0,1], & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.22 **Satz** *Sei $1 \leq p < \infty$, $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Dann gilt*

1.) $j_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$.

2.) $\operatorname{supp} u$ *beschränkt* $\Rightarrow j_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

3.) $j_\varepsilon * u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $||j_\varepsilon * u||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}$.

4.) $||j_\varepsilon * u - u||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} \to 0$ *für* $\varepsilon \downarrow 0$. ⋊

» 1.) Übung.

2.) $\operatorname{supp} u \subseteq [-A, A] \Rightarrow \operatorname{supp} j_\varepsilon * u \subseteq [-A-\varepsilon, A+\varepsilon]$.

3.) Zeige die Hilfsungleichung,

$$|j_\varepsilon * u(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

Für $p = 1$ folgt die Behauptung sofort. Sei nun $p > 1$ und

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann gilt,

$$\begin{aligned}
|j_\varepsilon * u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-y)^{1/q}\left(j_\varepsilon(x-y)^{1/p}u(y)\right)\mathrm{d}y \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}}_{=1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |j_\varepsilon * u(x)|^p\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{j_\varepsilon(x-y)}_{\geq 0}\underbrace{|u(y)|^p}_{\geq 0}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini I}}{=} \int_{\mathbb{R}}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\right)}_{=1}|u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

4.) a) Für $u = \chi_{(a,b)}$ ist

$$j_e * u(x) = \begin{cases} 1, & a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon, \\ 0, & x \leq a-\varepsilon \wedge x \geq b+\varepsilon, \\ \in [0,1], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $I = [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$, so erhalten wir,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow ||u - j_\varepsilon * u||_p^p &= \int_I \underbrace{|u(x) - j_\varepsilon * u(x)|^p}_{\leq 2^p}\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2^p 4\varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

b) Für $u = \chi_O$ mit $O \subseteq \mathbb{R}$ offen, gilt

$$O = \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b_j).$$

Setze $u_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \chi_{(a_j,b_j)} \Rightarrow 0 \le u_j(x) \le u(x),\ u_j(x) \uparrow u(x).$

$$\Rightarrow 0 \le (u(x) - u_j(x))^p \le u(x)^p, \qquad (u(x) - u_j(x))^p \to 0.$$

Mit majorisierter Konvergenz folgt,

$$\left\|u - u_j\right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left|u(x) - u_j(x)\right|^p \,\mathrm{d}x \to 0.$$

$$\begin{aligned} \|u - j_\varepsilon * u\|_p &\le \left\|u - u_j\right\|_p + \left\|u_j - j_\varepsilon * u_j\right\|_p + \left\|j_\varepsilon * (u_j - u)\right\|_p \\ &\le \underbrace{2\left\|u - u_j\right\|_p}_{<\delta \text{ für } j>J_\delta} + \underbrace{\left\|u_j - j_\varepsilon * u_j\right\|_p}_{\text{endl. Summe } <\delta,\ \varepsilon<\varepsilon_{\delta,j}} \\ &\to 0, \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

c) Sei $u = \chi_B$ mit $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel-Menge. Zu $\delta > 0$ existiert O offen in $\mathbb{R}$ mit $B \subseteq O$ und $\mu(O \setminus B) < \delta$.

$$\Rightarrow \|\chi_B - j_\varepsilon * \chi_B\|_p \le 2 \underbrace{\|\chi_B - \chi_O\|_p}_{2\mu(O\setminus B)\,<\,2\delta^{1/p}} + \underbrace{\|\chi_O - j_\varepsilon * \chi_O\|}_{\to 0,\ \varepsilon\downarrow 0}.$$

d) Sei $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Ohne Einschränkung ist $u(x) \ge 0$, denn u ist messbar und daher $u(x) = u_+(x) + u_-(x)$. Es existiert nun eine Folge (s_n) von einfachen Funktionen mit,

$$0 \le s_n(x) \le u(x), \quad s_n(x) \uparrow u(x).$$

Mit monotoner Konvergenz folgt,

$$\begin{aligned} &\|u - s_n\|_p \to 0. \\ \Rightarrow &\|u - j_\varepsilon * u\|_p \le 2\|u - s_n\|_p + \|s_n - j_\varepsilon * s_n\|_p \to 0. \quad \text{«} \end{aligned}$$

» *Beweis von Satz 2.19.* Sei $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Zu zeigen ist,

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ \varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \|\varphi_\delta - u\|_p < \delta.$$

Sei zunächst,

$$u_j := \chi_{[-j,j]} u = \begin{cases} u(x), & |x| \le j, \\ 0, & |x| > j. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt dann,

$$\left| u(x) - u_j(x) \right|^p \to 0, \quad \text{für } j \to \infty,$$
$$\left| u(x) - u_j(x) \right|^p \le |u(x)|^p, \quad \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Wir können also majorisierte Konvergenz auf $\left| u - u_j \right|^p$ anwenden und erhalten,

$$\left\| u_j - u \right\|_p \to 0.$$

Sei nun $\delta > 0$. Wähle $j \in \mathbb{N}$ fest mit $\left\| u - u_j \right\| < \frac{\delta}{2}$. Nun ist $\operatorname{supp} u_j = [-j, j]$ also beschränkt. Mit 2.22 folgt daher,

$$j_\varepsilon * u \in C^\infty,$$
$$\left\| j_\varepsilon * u_j - u_j \right\|_p \to 0, \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0.$$

Wähle $\varepsilon > 0$ fest mit $\left\| j_\varepsilon * u_j - u_j \right\|_p < \frac{\delta}{2}$, dann gilt

$$\varphi_\delta := j_\varepsilon * u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Wir erhalten,

$$\|u - \varphi_\delta\|_p \le \left\| u - u_j \right\|_p + \left\| u_j - \varphi_\delta \right\| < \delta. \quad «$$

2-D Fortsetzung der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist eine lineare invertierbare Abbildung. Die Plancharell Gleichung besagt außerdem, dass sie die $\mathcal{L}^2$-Norm erhält,

$$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 .$$

$D(F) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Dies wollen wir nun ausnutzen, um die Fouriertransformation auf ganz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ fortzusetzten. Dazu benötigen wir zunächst ein Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

2.23 **Fortsetzungssatz** *Sei $(L, \|\cdot\|_L)$ ein normierter Raum, $(B, \|\cdot\|_B)$ Banachraum,*

$$T : D(T) \to B, \qquad D(T) \subseteq L,$$

linear und beschränkt und $D(T)$ dicht in L. Dann besitzt T genau eine Fortsetzung $\tilde{T} : L \to B$. Diese ist beschränkt und linear. Außerdem gilt

$$\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|. \quad \rtimes$$

» 1.) *Konstruktion von $\tilde{T}$.*

Sei $x_0 \in L$, (x_n) Folge in $D(T)$ mit $x_n \to x_0$. Setze

$$\tilde{T}x_0 := \lim_{n\to\infty} Tx_n .$$

a) $D(T)$ liegt dicht in L, also existiert (x_n).

b) (Tx_n) konvergiert.

$$\|Tx_n - Tx_m\|_B \le \|T\| \, \|x_n - x_m\|_L < \|T\| \, \varepsilon,$$

für $n, m > N_\varepsilon$. (x_n) ist konvergent und daher Cauchyfolge, also ist (Tx_n) konvergent.

c) Die Definition von $\tilde{T}x_0$ ist unabhängig von der Folge (x_n), denn seien $x_n \to x_0$ und $x_n' \to x_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\left\|x_n - x_n'\right\|_L \le \|x_n - x_0\|_L + \left\|x_0 - x_n'\right\|_L \to 0 \\ \Rightarrow &\left\|Tx_n - Tx_n'\right\|_B \le \|T\| \left\|x_n - x_n'\right\|_L \to 0. \end{aligned}$$

a)-c) $\Rightarrow \tilde{T}x_0$ ist definiert für beliebige $x_0 \in L$.

2.) *$\tilde{T}$ besitzt die geforderten Eigenschaften.*

a) $\tilde{T}$ ist linear.

$$\begin{aligned}\tilde{T}(ax+by) &= \lim_{n\to\infty} T(ax_n+by_n) = \lim_{n\to\infty} aTx_n + \lim_{n\to\infty} bTy_n \\ &= a\tilde{T}x + b\tilde{T}y.\end{aligned}$$

b) $\tilde{T}$ ist Fortsetzung von T. Für $x \in D(T)$ gilt aufgrund der Stetigkeit von T,

$$\tilde{T}x = Tx, \qquad \text{wähle z.B. } x_n = x.$$

c) $\tilde{T}$ ist beschränkt.

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{T}x\right\|_B &= \left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\|_B = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_B \le \lim_{n\to\infty} \|T\|\,\|x_n\|_L \\ &= \|T\|\,\|x\|_L\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\left\|\tilde{T}\right\| \le \|T\|$. Insbesondere ist $\tilde{T}$ beschränkt.

d) $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$.

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in L}} \frac{\left\|\tilde{T}x\right\|_B}{\|x\|_L} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in D(T)}} \frac{\left\|\tilde{T}x\right\|_B}{\|x\|_L} = \|T\|\,.$$

3.) *$\tilde{T}$ ist eindeutig.* $\tilde{T}$ ist beschränkt also stetig, sei $x_0 \in L$, (x_n) in $D(T)$ mit $x_n \to x_0$, dann gilt

$$\tilde{T}x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}x_n \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Es gibt also nur eine Möglichkeit, T fortzusetzen. Also ist $\tilde{T}$ eindeutig. «

2.24 **Satz** *Die Fouriertransformation*

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}),\ f \mapsto \hat{f}$$

besitzt eine eindeutige lineare beschränkte Fortsetzung,

$$F : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Die Fortsetzung ist unitär, d.h. bijektiv und Skalarprodukt-erhaltend, und es gilt $\|\mathcal{F}\| = \|F\|$*. Die dazu inverse Abbildung* F^{-1} *ist die Fortsetzung der ursprünglichen inversen Abbildung* $f \mapsto \check{f}$*.* ⋊

» Wir führen den Beweis in drei Schritten.

1. Schritt $L = B = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $T = \mathcal{F}$, $D(T) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mit 2.23 folgt, es existiert eine eindeutige lineare beschränkte Fortsetzung F der Fouriertransformation auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mit $\|F\| = \|\mathcal{F}\| = 1$.

   Analog folgt, es existiert eine eindeutige lineare beschränkte Fortsetzung G der Umkehrtransformation mit $\|G\| = \|\mathcal{F}^{-1}\| = 1$.

2. Schritt *Zeige* $G = F^{-1}$. Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $(f_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\| \to 0$.

$$(G \circ F)(f) = G(Ff) = G\left(\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\hat{f}_n\right)^{\vee} = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

   Also ist $G \circ F = \mathrm{id}$. Analog folgt $F \circ G = \mathrm{id}$.

3. Schritt $\|Ff\|_2 = \|f\|_2$.

$$\|f\|_2 = \|G(Ff)\|_2 \le \|Ff\|_2 \le \|f\|_2 .$$

   Mit Polarisation folgt,

$$\langle Ff, Fg \rangle = \langle f, g \rangle . \quad «$$

2.25 *Achtung.* Für $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

im Allgemeinen nicht. Abhilfe leistet

$$Ff = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x,$$

wobei es sich hier lediglich um $\mathcal{L}^2$-Konvergenz handelt. ⊸

2.26 **Satz** *Für $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ gilt,*

$$\left\| Ff - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \right\|_2 \to 0. \quad ⋊$$

» 1.) Setze $f_R := \chi_{[-R,R]} f$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\|f - f_R\|_2 \to 0, \quad \text{für } R \to \infty, \\ \Rightarrow &\|Ff - Ff_R\|_2 \to 0. \end{aligned}$$

2.) Wähle nun R fest. Zeige

$$Ff_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f_R(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x =: \hat{f}_R(\omega).$$

Setze $f_n = j_{1/n} * f_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) $\left\| \hat{f}_n - Ff_R \right\|_2 = \|f_n - f_R\|_2 \to 0.$

b)

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_n(\omega) - \hat{f}_R(\omega) \right| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R-1/n}^{R+1/n} |f_n(x) - f_R(x)| \left| e^{-i\omega x} \right| \, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f_R\|_2 \sqrt{2R + \frac{2}{n}} \to 0, \end{aligned}$$

gleichmäßig bezüglich ω.

c) $\forall \; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \left\langle Ff_R - \hat{f}_R, \varphi \right\rangle_2 = 0$, denn

$$\begin{aligned} &\langle Ff_R, \varphi \rangle_2 = \lim_{n\to\infty} \left\langle \hat{f}_n, \varphi \right\rangle, \\ &\left\langle \hat{f}_R, \varphi \right\rangle_2 = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \hat{f}_R(\omega) \overline{\varphi(\omega)} \, \mathrm{d}\omega = \lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{supp}\varphi} \hat{f}_n(\omega) \overline{\varphi(\omega)} \, \mathrm{d}\omega, \\ \Rightarrow &\langle Ff_r, \varphi \rangle = \langle f_R, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

d) Da $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ existiert eine Folge (φ_j) in C_0^∞ mit

$$\left\| \varphi_j - Ff_R \right\|_2 \to 0.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle Ff_R - \hat{f}_R, \varphi_j \right\rangle \to \left\langle Ff_R - \hat{f}_R, Ff_R - \hat{f}_R \right\rangle \\ \Rightarrow &\left\| Ff_r - \hat{f}_R \right\|_2 \to 0 \\ \Rightarrow &Ff_R = \hat{f}_R. \quad «\end{aligned}$$

2.27 **Bsp** Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

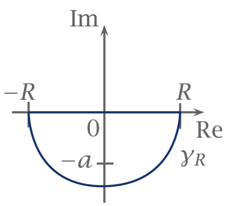
f ist stetig also messbar und $|f|^2$ fällt wie x^2, also ist $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Wir können die Fouriertransformation

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-i\omega x} \, dx$$

berechnen, indem wir den Residuensatz verwenden. Setze

$$g(z) = \frac{z e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} = \frac{z e^{i\omega z}}{(z + ia)(z - ia)}.$$

Wir müssen eine Fallunterscheidung für ω machen. Für $\omega > 0$



$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} g(z) \, dz &= 2\pi \nu(\gamma, -ia) \operatorname{Res}(g, -ia) = -2\pi i \frac{-iae^{-i\omega(-ia)}}{-ia - ia} \\ &= -\pi i e^{-\omega a}.\end{aligned}$$

Zeige nun, dass das Integral über den Kreisbogen verschwindet,

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-i\omega x} \, dx = -\pi i e^{-\omega a}.$$

Verfahre analog für $\omega < 0$,

$$Ff(\omega) = -\pi i e^{-|\omega| a}. \quad \blacksquare$$

2.28 **Korollar** *Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt*

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 . \quad \rtimes$$

» Für $\omega \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-i\omega x}\right| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 .$$

Die rechte Seite hängt nicht mehr von ω ab, also gilt auch,

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 . \quad «$$

Nun stellt sich die Frage, ob $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ die optimale Konstante ist.

2.29 **Satz** *Für $F : (S(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (S(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto \hat{f}$, gilt $\|F\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.* $\rtimes$

» Sei $f_n = j_{1/n}$, so gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} j_{1/n}(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \overset{y=-x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} j_{1/n}(-y) e^{i\omega y} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} j_{1/n} * e^{i\omega \cdot}(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{i\omega 0}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

Nun ist $\|f_n\|_1 = 1$, somit folgt

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} j_{1/n} * e^{i\omega \cdot}(0) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Daher ist auch

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad «$$

2.30 **Satz** *Die Fouriertransformation besitzt genau eine lineare beschränkte Fortsetzung*

$$F : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to C_B(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \,:\, \sup_{\mathbb{R}} |f| < \infty \right\},$$

und es gilt $\|F\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. ⋊

» Fortsetzungssatz $L = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $B = (C_B(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $T = \mathcal{F}$, $D(T) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. «

2.31 **Satz** (a) *Für* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *gilt,*

$$Ff(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

(b) $\operatorname{im} F \subseteq \{ f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \,:\, f(x) \to 0, x \to \pm\infty \}$.

» 1.) Sei (f_n) Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $||f_n - f||_1 \to 0$.

a) $\forall\ \omega \in \mathbb{R} : \hat{f}_n(\omega) \to Ff(\omega)$, denn

$$\left|\left|\hat{f}_n - Ff\right|\right|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f_n - f||_1 \to 0.$$

b) $\forall\ \omega \in \mathbb{R} : \hat{f}_n(\omega) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x$, denn

$$\begin{aligned} &\left| \hat{f}_n(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| \left| e^{-i\omega x} \right| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f_n - f||_1 . \end{aligned}$$

2.) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, dann

$$\begin{aligned} &\exists\ \varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : ||f - \varphi_\varepsilon||_1 < \varepsilon, \\ \Rightarrow\ &|Ff(\omega) - \hat{\varphi}_\varepsilon(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f - \varphi_\varepsilon||_1 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Wegen $\hat{\varphi}_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$ existiert ein $M_\varepsilon > 0$, sodass für $|\omega| > M_\varepsilon$ folgt,

$$|\varphi_\varepsilon(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für ω mit $|\omega| > M_\varepsilon$ gilt somit,

$$\Rightarrow \left|Ff(\omega)\right| \leq \left|Ff(\omega) - \hat{\varphi}(\omega)\right| + |\hat{\varphi}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow Ff(\omega) \to 0, \quad \text{für } \omega \to \pm\infty. \quad \text{«}$$

2.32 **Satz** *Sei* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ *und*

$$\exists\ \delta > 0 \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty. \quad \textit{Dini Bedingung}$$

Dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ff(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega\,. \quad \rtimes$$

» Wir zeigen nur $f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} Ff(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega\,.$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} Ff(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega y} \, \mathrm{d}y \, e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega \\
&\overset{\text{Fubini II}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-R}^{R} e^{i\omega(x-y)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin(R(y-x))}{y-x} \, \mathrm{d}y \\
&\overset{t=y-x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin Rt}{t} \, \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Rt}{t} \, \mathrm{d}t = \pi, \quad \text{für } R > 0.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin Rt}{t} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t+x) - f(x)) \frac{\sin Rt}{t} \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon,$$

für $R > R_\varepsilon$. Wegen

$$\left| \int_{|t|\geq M} f(t+x) \frac{\sin Rt}{t} \,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{M} \|f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{für } M > M_\varepsilon.$$

$$\left| \int_{|t|\geq M} f(x) \frac{\sin Rt}{t} \,\mathrm{d}t \right| = |f(x)| \left| \int_{|t|\geq M} \frac{\sin Rt}{t} \,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{für } M > M_\varepsilon,$$

da $\int_0^\infty \frac{\sin Rt}{t} \,\mathrm{d}t$ konvergiert.

$$\int_{|t|\leq M} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin Rt \,\mathrm{d}t \to 0, \quad \text{für } R \to \infty.$$

Siehe 1.51 «

2.33 **Satz** *1.) Falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $x \mapsto x^j f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, dann gilt*

$$\begin{aligned} &Ff \in C^j(\mathbb{R} \to \mathbb{C}), \\ &Ff^{(k)}(\omega) \to 0, && \textit{für } |\omega| \to \infty, \quad k = 0, 1, \ldots, j. \end{aligned}$$

2.) Falls $f \in C^{j-1}(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ und $f^{(j)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und

$$f^{(k)}(x) \to 0, \qquad \textit{für } |x| \to \infty, \quad k = 0, 1, \ldots, j,$$

dann gilt

$$Ff^{(k)}(\omega) = i\omega^k Ff(\omega), \qquad k = 0, 1, \ldots, j,$$

insbesondere gilt $\omega^j Ff(\omega) \to 0$ für $\omega \to \pm\infty$. ⋊

» 1.) Sei $j = 1$. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{Ff(\omega + h) - Ff(\omega)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ix(\omega+h)} - e^{i\omega x}}{h} \,\mathrm{d}x.$$

Der Integrand konvergiert punktweise gegen $-ixe^{-ix\omega}$. Es gilt

$$\left| f(x) \frac{e^{-ix(\omega+h)} - e^{-i\omega x}}{h} \right| \overset{\text{MWS}}{=} \left| f(x)(-ix)e^{-ix\vartheta} \right| = |xf(x)| .$$

$xf(x) \in \mathcal{L}^1$, wir können also majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten,

$$\ldots \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x = F((-ix)f(x)).$$

Mit 2.30 und 2.31 folgt

$$(Ff)'(\omega) = F(\mathcal{L}^1\text{-Funktion}) \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}).$$

2.) Sei $j = 1$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}(Ff')(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part.int.}}{=} \underbrace{f(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x \\
&= i\omega Ff(\omega)\sqrt{2\pi}. \quad \text{«}
\end{aligned}$$

2-E Fouriertransformation im $\mathbb{R}^n$

Wir haben bisher alle Sätze und Beweise in $\mathbb{R}$ geführt, man kann sie jedoch problemlos auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Erinnerung. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, dann

$$\partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ ist dann

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Da diese Schreibweise sehr aufwändig ist, wollen wir eine Abkürzung einführen.

2.34 **Definition** *$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex. Setze*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und α, β vergleichbar gilt,

$$\alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \le \beta_1, \ldots, \alpha_n \le .\beta_n.$$

Die Multiindize-Potenz ist definiert als,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Ableitung hat nun die Form,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}}.$$

Der Multiindize-Binominalkoeffizient ist

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Bsp Im $\mathbb{R}^3$ sei $\alpha = (0,1,4)$, dann ist

$$D^\alpha f = \frac{\partial^5}{\partial^1 x_1 \partial^4 x_3}. \quad \blacksquare$$

2.35 **Anwendung**

$$|\alpha| + |\beta|$$
$$(\lambda x)^\alpha = \lambda^{|\alpha|} x^\alpha$$
$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f, \qquad f \in C^{|\alpha+\beta|}.$$

Leibniz Regel

$$D^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(D^{\alpha-\beta} f\right) \left(D^\beta g\right). \quad \rtimes$$

2.36 **Definition** *Der Schwarzraum im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch,*

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : \ \forall\, x \in \mathbb{N}_0^n \ \forall\, f \in \mathbb{N} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^j \, |D^\alpha f(x)| < \infty \right\}.$$

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x} \, \mathrm{d}x. \quad \rtimes$$

2.37 **Satz** *1.) $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung,*

$$\mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n), \ f \mapsto \check{f},$$
$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\omega \cdot x} \, \mathrm{d}\omega \,.$$

2.)

$$\widehat{D^\alpha f}(\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) = i^{|\alpha|} \omega^\alpha \hat{f}(\omega),$$
$$\widehat{x^\alpha f} = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}.$$

3.) Mit $f * g(x) \int_{\mathbb{R}}^n f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y$ folgt,

$$\widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f} * \hat{g},$$
$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad \rtimes$$

2.38 **Bsp** Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Löse die inhomogene Laplace Gleichung,

$$-\Delta u + u = f, \qquad u \in S(\mathbb{R}^n).$$

Wenden wir die Fouriertransforamtion auf die Diffrentialgleichung an,

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^n i^2 \omega_j^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f} \\
\Leftrightarrow & \left(|\omega|^2 + 1 \right) \hat{u} = \hat{f}, \\
\Rightarrow & \hat{u} = \frac{1}{|\omega|^2 + 1} \\
\Rightarrow & u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\omega|^2 + 1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Man kann zeigen, dass höchstens eine Lösung $u \in S(\mathbb{R}^n)$ existiert. ■

2.39 **Fortsetzung** *1.)* $F : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *ist unitär, d.h.*

$$\langle Ff, Fg \rangle = \langle f, g \rangle \,.$$

Es gilt

$$Ff = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{|x|\le R} f(x) e^{-ix\cdot} \, \mathrm{d}x.$$

2.) $F : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : f(x) \to 0$ *für* $|x| \to \infty \}$ *und es gilt,*

$$\|F\|_\infty := \max_{\omega\in\mathbb{R}^n} |Ff(\omega)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1 \,. \quad \rtimes$$

2-F Interpolation

Wir wollen jetzt die Frage stellen, ob man die Fouriertransformation noch weiter fortsetzen kann (z.B. auf $\mathcal{L}^p$)? Um den Fortsetzungssatz anwenden zu können, benötigen wir, dass F beschränkt ist. Für $\mathcal{L}^p$ und $1 < p < 2$ können wir dies aus Satz 2.39 gewinnen. Dazu kann man den $\mathcal{L}^p$ aus $\mathcal{L}^1$ und $\mathcal{L}^2$ interpolieren.

Die Interpolation von Banachräumen ist sehr wichtiges Konzept für das Lösen von partiellen Differentialgleichungen. Man definiert dazu banachwertige Funktionen, die von komplexen Parametern abhängen. Sie ist stark mit der Funktionentheorie verknüpft.

2.40 **Interpolation von Banachräumen**

$$\begin{aligned} B_0 &= L^q(\mathbb{R}^n), && 1 \le 1 \le \infty, \\ B_1 &= L^p(\mathbb{R}^n), && 1 \le p \le \infty, \\ \Rightarrow B_t &= L^{r_t}(\mathbb{R}^n), && \frac{1}{r_t} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{q}, \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ dicht in } L^{r_t}(\mathbb{R}^n). \quad \rtimes \end{aligned}$$

Bsp Setze $q = 2$, $p = 1$, dann ist

$$\frac{1}{r_t} = \frac{t}{1} + \frac{1-t}{2} = \frac{1+t}{2} \Leftrightarrow r_t = \frac{2}{1+t}.$$

Im Fall $q = 2$, $p = \infty$, ist

$$\frac{1}{r_t} = \frac{t}{\infty} + \frac{1-t}{2} = \frac{1-t}{2} \Leftrightarrow r_t = \frac{2}{1-t}. \quad \blacksquare$$

2.41 **Satz von Riesz-Thorin** *Sei $T : \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$ linear und beschränkt,*

$$\|T\|_{q,\tilde{q}} = M_0,$$

und $T : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ linear und beschränkt,

$$\|T\|_{p,\tilde{p}} = M_1,$$

dann ist T von $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q \supseteq S(\mathbb{R})$ auf B_t eindeutig fortsetzbar,

$$T : B_t \to \tilde{B}_t$$

ist linear und beschränkt und

$$\|T\|_{B_t \to \tilde{B}_t} \le M_0^{1-t} M_1^t. \quad \rtimes$$

Anwendung.

$$F : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n), \quad \|T\|_{2,2} = 1$$
$$F : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|T\|_{1,\infty} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$$
$$\Rightarrow F : B_t \to \tilde{B}_t,$$

mit

$$B_t = \mathcal{L}^{r_t}(\mathbb{R}^n), r_t = \frac{2}{1+t}$$
$$\tilde{B}_t = \mathcal{L}^{\tilde{r}_t}(\mathbb{R}^n), \tilde{r}_t = \frac{2}{1-t},$$
$$\left\|B_t \to \tilde{B}_t\right\| \le 1^{1-t} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^t.$$

Beachte.

$$\frac{1}{r_t} + \frac{1}{\tilde{r}_t} = \frac{1+t}{2} + \frac{1-t}{2} = 1, \quad 1 \le r_t \le 2,$$
$$p = r_t \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{1+t}{2} \Leftrightarrow t = 2p - 1$$

Es gilt somit

$$\Rightarrow F : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\|F\|_{\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^q} \le \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^{2p-1} = \frac{1}{(2\pi)n(p-1/2)}. \quad \multimap$$

2.42 **Satz von Hausdorff-Young** *Sei* $1 \le p \le 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Die Fouriertransformation besitzt eine eindeutige lineare beschränkte Fortsetzung*

$$F : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$$

und es gilt $\|F\| \le \dfrac{1}{(2\pi)^{n(1/p-1/2)}}$. ⋊

3 Distributionen

Betrachte die Funktion

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{|x|},\\
\nabla f &= -\frac{x}{|x|^3}\\
\Delta f &= 0.
\end{aligned}
$$

Aus der Physik wissen wir jedoch, dass

$$-\Delta \frac{1}{|x|} = 4\pi\delta_0,$$

die Dirac-Delta-Funktion ist, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta_0(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Die Delta-Funktion weißt also jeder stetigen Funktion eine Zahl zu.

Im Folgenden wollen wir das Notwendige erarbeiten, um die Funktion zu beschreiben.

Arbeitsgebiet. Erweitere den Raum $C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ zu einem linearen topologischen Raum $D'(\mathbb{R}^n)$ mit dem Ziel,

(i) $D_j : C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) \to C^0(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})\varphi \mapsto \partial_{x_j}\varphi$ ist eine stetige Abbildung,

(ii) Setze D_j auf $D'(\mathbb{R}^n)$ fort.

(iii) Zeige $f : x \mapsto \frac{1}{|x|}$ und $\delta_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$ und,

$$-\Delta f = 4\pi\delta_0.$$

3-A Konstruktion des Raums

3.1 **Notation** *Der Träger einer Funktion φ ist definiert als,*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger ist

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) \,:\, \operatorname{supp}\varphi \text{ ist kompakt}\}\,.$$

Für die Ableitung schreiben wir,

$$\nabla^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}. \quad \rtimes$$

3.2 **Definition** *Seien $\varphi_j, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt (φ_j) D-konvergent gegen φ, falls gilt*

(i) $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt, so dass* $\forall\, j \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$,

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *gilt* $\nabla^\alpha \varphi_j(x) \to \nabla^\alpha \varphi(x)$ *gleichmäßig bezüglich* $x \in \mathbb{R}^n$.

Schreibe $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$. Der lineare Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ versehen mit diesen Konvergenzeigenschaften heißt Raum der Testfunktionen $D(\mathbb{R}^n)$. $\rtimes$

3.3 **Satz** *$D(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig.* $\rtimes$

» Sei (φ_j) Cauchyfolge in $D(\mathbb{R}^n)$, d.h.

(i) $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $\forall\, j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$,

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\, J_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, j,k > J_\varepsilon\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

$$\left|\nabla^\alpha \varphi_j(x) - \nabla^\alpha \varphi_k(x)\right| < \varepsilon.$$

D.h. $(\nabla^\alpha \varphi_j(x))$ ist Cauchy in $\mathbb{C}$, also existiert

$$\psi_\alpha(x) = \lim_{j\to\infty} \nabla^\alpha \varphi_j(x) \in \mathbb{C}.$$

Da $\nabla^\alpha \varphi_j$ stetig und die Konvergenz bezüglich x gleichmäßig ist, its ψ_α stetig, mehr noch, alle Ableitungen konvergieren gleichmäßig, d.h. $\nabla^\alpha \psi_0 = \psi_\alpha$.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ und daher ist auch $\operatorname{supp}\psi_\alpha \subseteq K$. Somit folgt $\varphi_j \xrightarrow{D} \psi_0$. «

D ist ein Beispiel für einen vollständigen aber nicht metrisierbaren Raum.

3.4 **Definition** *Eine Schwartzsche Distribution ist eine lineare stetige Abbildung*

$$T : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

d.h.

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi),$$

$$\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi \Rightarrow T(\varphi_j) \to T(\varphi).$$

Durch $(T + S)(\varphi) = T(\varphi) + S(\varphi)$ *und* $(\alpha T)(\varphi) = \alpha(T(\varphi))$ *wird*

$$\{T : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : T \textit{ ist linear und stetig}\}$$

zu einem linearen Raum $D'(\mathbb{R}^n)$ *mit dem Konvergenzbegriff*

$$T_n \to T \Leftrightarrow \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : T_n(\varphi) \to T(\varphi). \quad \rtimes$$

3.5 **Bsp** a) Diracsche δ-Distribution δ_{x_0} mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest,

$$\delta_{x_0}\varphi = \varphi(x_0).$$

Sie ist offenbar linear, denn

$$\delta_{x_0}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\varphi(x_0) + \beta\psi(x_0) = \alpha\delta_{x_0}(\varphi) + \beta\delta_{x_0}(\psi),$$

und stetig denn sei (φ_j) Folge in D mit $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$, so gilt

$$\delta_{x_0}(\varphi_j) = \varphi_j(x_0) \to \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi).$$

b) Betrachte den Raum der lokalen $\mathcal{L}^1$-Funktionen,

$$\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \ \forall\ K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt} : u \in \mathcal{L}^1(K)\right\}.$$

Beachte, dass $u \in \mathcal{L}^p(K) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^1(K)$.

Zu $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$ setze

$$T_u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Die Linearität der Abbildung folgt direkt aus der Linearität des Integrals, zur Stetigkeit betrachte eine Folge (φ_j) in D mit $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$ und

$$\left|T_u(\varphi_j) - T_u(\varphi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u| \left|\varphi_j - \varphi\right| \,\mathrm{d}\mu = \int_K |u| \left|\varphi_j - \varphi\right| \,\mathrm{d}\mu$$
$$\leq \underbrace{\left\|\varphi_j - \varphi\right\|_\infty}_{\to 0} \underbrace{\int_K |u| \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty} \to 0. \quad ■$$

3.6 **Satz** *$D'(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig.* ⋊

» Siehe Walter. «

3-B Einbettung der klassischen Funktionen

3.7 **Satz** *Die Abbildung $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto T_u \in D'(\mathbb{R}^n)$ ist linear, injektiv und stetig.* ⋊

» *Linearität.*

$$T_{\alpha u+\beta v}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha u + \beta v)\,\varphi \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^n} v\varphi \,\mathrm{d}\mu$$
$$= \alpha T_u(\varphi) + \beta T_v(\varphi).$$

Injektivität. Zeige $T_u = T_v \Leftrightarrow u = v$.

"$\Leftarrow$": Offensichtlich.

"$\Rightarrow$": Sei $T_u = T_v$, so ist dies aufgrund der Linearität äquivalent mit $T_{u-v} = 0$. Wir müssen also lediglich zeigen, dass der Kern der Abbildung trivial ist.

Sei $T_w(\varphi) = 0$, für alle $\varphi \in C_0^\infty$.

1) *Abschneiden.* Sei $\psi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq R$, dann ist

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty 0 = T_w(\psi_R\varphi) = T_{\psi_R w}(\varphi),$$

und $\psi_R w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

2) *Approximieren.* Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $j_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow 0 = T_{\psi_R w}(j_\varepsilon)(x - \cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_R(y)w(y)j_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y$$
$$= (j_\varepsilon * (\psi_R w))(x).$$

Da $\psi_r w \in \mathcal{L}^1$ folgt mit 2.22,

$$\begin{aligned}
&\|\psi_R w - j_\varepsilon(\psi_R w)\|_1 \to 0, \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0,\\
\Rightarrow &\psi_R w = 0, \ \mu\text{-f.ü.}\\
\Rightarrow &w = 0 \ \mu\text{-f.ü. in } \{x : |x| <\} R.
\end{aligned}$$

3) *Zusammenfassen.*

$$\begin{aligned}
\mu\{x \in \mathbb{R}^n : w(x) \neq= 0\} &= \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq j \wedge w(x) \neq 0\}\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq j \wedge w(x) \neq 0\} = 0. \quad «
\end{aligned}$$

3.8 **Definition** *Identifiziere u und Tu, dadurch ist $\mathcal{L}^1_{loc} \subseteq D'(\mathbb{R}^n)$.* ⋊

3.9 **Bsp** 1.) $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$ ist eine singuläre Distribution.

2.) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit $k \leq n-1$, so ist

$$T\varphi := \int_S \varphi \, \mathrm{d}V^{(k)}$$

eine singuläre Distribution.

3.) Sei $n = 1$ und

$$T\varphi := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{CH}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\right),$$

der Cauchysche Hauptwert. So ist T eine singuläre Distribution. ■

3.10 **Satz** *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $D'(\mathbb{R}^n)$.* ⋊

» Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi_k \in C_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq k \\ 0 & |x| \geq k+1 \\ \in [0,1] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze nun

$$t_k(x) := \psi_k(x) T\left(j_{1/k}(x-\cdot)\right) = T\left(\psi_k(x) j_{1/k}(x-\cdot)\right).$$

Dann gilt

1.) $t_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.) $t_k \to T$ in $D'(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\forall\ \varphi \in C_0^\infty$ gilt

$$T_{t_k}\varphi \to T\varphi.$$

a) $\operatorname{supp} t_k \subseteq \operatorname{supp} \psi_k \subseteq K_{k+1}(0)$, also hat t_k kompakten Träger. Zur Differenzierbarkeit von t_k betrachte

$$\begin{aligned}&\frac{T\left(j_{1/k}(x+he_j-\cdot)\right) - T\left(j_{1/k}(x-\cdot)\right)}{h} \\ &\quad = T\left(\frac{j_{1/k}(x+he_j-\cdot) - j_{1/k}(x-\cdot)}{h}\right) \\ &\quad \overset{\text{z.Z.}}{\longrightarrow} T\left(\partial_{x_j} j_{1/k}(x-\cdot)\right).\end{aligned}$$

Da T stetig ist, genügt es zu zeigen,

$$\frac{j_{1/k}(x+he_j-\cdot) - j_{1/k}(x-\cdot)}{h} \longrightarrow \partial_{x_j} j_{1/k}(x-\cdot).$$

Dann folgt

$$\nabla^\alpha t_k(x) = T\left(\nabla^\alpha j_{1/k}(x-\cdot)\right),$$

insbesondere ist $t_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Zur Konvergenz von T_{t_k} betrachte

$$\begin{aligned}T_{t_k}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T\left(j_{1/k}(x-\cdot)\right)\psi_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T\left(j_{1/k}(x-\cdot)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{für } k \text{ groß.}\end{aligned}$$

interpretiere dies als Riemannsumme und verwende die Stetigkeit von T,

$$= T\Bigg(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} j_{1/k}(x - \cdot)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow{D} \varphi(\cdot)} \Bigg) \to T(\varphi). \quad «$$

3-C Differentiation

3.11 **Lemma** *Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$T_{\nabla^\alpha u}(\varphi) = (-1)^\alpha T_u(\nabla^\alpha \varphi). \quad \rtimes$$

» Sei $\alpha = e_j$,

$$T_{\partial_{x_j} u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} u)\varphi\,\mathrm{d}x$$

nun ist $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]^n$, es gilt also

$$\begin{aligned}
&= \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{[-R,R]} (\partial_{x_j} u)\varphi\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_{j+1}\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{[-R,R]^{n-1}} \Bigg[\underbrace{u\varphi\Big|_{-R}^{R}}_{=0} - \int_{-R}^{R} u\partial_{x_j}\varphi\,\mathrm{d}x_j \Bigg] \mathrm{d}x_{j+1}\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= -T_u(\partial_{x_j}\varphi). \quad «
\end{aligned}$$

3.12 **Satz** *Die Abbildung*

$$\nabla^\alpha : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist stetig bezüglich der Topologie auf $D'(\mathbb{R}^n)$. $\rtimes$

» Zu zeigen ist,

$$u_j \xrightarrow{D} u \Rightarrow \nabla^\alpha u_j \to \nabla^\alpha u.$$

Sei also (u_j) Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u_j \overset{D}{\to} u$, d.h. $T_{u_j} \to Tu$.

$$\Rightarrow T_{\nabla^\alpha u_j}(\varphi) \overset{3.11}{=} (-1)^{|\alpha|} T_{u_j}(\underbrace{\nabla^\alpha \varphi}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)})$$

D.h. $\nabla^\alpha u_j \to \nabla^\alpha u$ in $D'(\mathbb{R}^n)$. «

3.13 **Satz** *Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist die Abbildung ∇^α eindeutig fortsetzbar zu einer stetigen Abbildung*

$$\mathrm{D}^\alpha : D'(\mathbb{R}^n) \to D'(\mathbb{R}^n).$$

Für $\varphi \in D'(\mathbb{R}^n)$ gilt,

$$\mathrm{D}^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi). \tag{*}$$

D^α *heißt Distributionenableitung oder schwache Ableitung.* ⋊

» *Wohldefiniertheit.* Durch (*) wird eine Abbildung $\mathrm{D}^\alpha T \in D'(\mathbb{R}^n)$ definiert. *Linearität.* Seien $\varphi, \psi \in D(\mathbb{R}^n)$ und $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^\alpha T(a\varphi + b\psi) &= (-1)^{|\alpha|} T(a\nabla^\alpha \varphi + b\nabla^\alpha \psi) \\ &= a(-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) + b(-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \psi) \\ &= a\mathrm{D}^\alpha T(\varphi) + b\mathrm{D}^\alpha(\psi) \end{aligned}$$

Stetigkeit. Sei $\varphi_n \overset{D}{\to} \varphi$, dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $\nabla^\alpha \varphi_n \overset{D}{\to} \nabla^\alpha \varphi$ und daher,

$$\mathrm{D}^\alpha(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi_n) \overset{T \text{ stet.}}{\to} (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) = \mathrm{D}^\alpha T(\varphi).$$

Eindeutigkeit. Aufgrund der Stetigkeit ist die Fortsetzung eindeutig. «

3.14 *Bemerkungen.* 1.) Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar.

2.) Es gilt der Satz von H.A. Schwarz[5].

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}^\beta T) = \mathrm{D}^\beta(\mathrm{D}^\alpha T) = \mathrm{D}^{\alpha+\beta} T.$$

[5]Hermann Amandus Schwarz (* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien; † 30. November 1921 in Berlin)

» Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}^\beta T)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(\mathrm{D}^\beta T)(\nabla^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}T(\nabla^\beta(\nabla^\alpha\varphi))\\ &= (-1^{|\alpha+\beta|}T(\nabla^{\alpha+\beta}\varphi) = \mathrm{D}^{\alpha+\beta}T(\varphi).\end{aligned}$$ « ⊸

3.15 **Bsp** 1.) Setze $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0\\ 0, & x \le 0\end{cases}$, dann gilt für die Distributionenableitung,

$$\mathrm{D}f = h, \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0\\ 0, & x < 0\end{cases}$$

h ist die Heavisidefunktion. Der Wert an der Stelle $x = 0$ ist ohne Bedeutung da f eine reguläre Distribution ist, d.h. $h \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$.

»

$$\begin{aligned}\mathrm{D}T_f(\varphi) &= -T_f(\varphi' = -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-x\varphi(x)\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= T_h(\varphi).\end{aligned}$$ «

Für die zweite Ableitung ergibt sich, $\mathrm{D}^2 f = \mathrm{D}h = \delta_0$.

» $\mathrm{D}T_h(\varphi) = -T_h(\varphi') = -\int_0^\infty 1\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \delta_0(\varphi)$. «

Die k-te Ableitung ist $\mathrm{D}^k f = (-1)^k\varphi^{(k-2)}(0)$ für $k \ge 2$.

2.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in C^1((-\infty, x_0))$ und $f \in C^1((x_0, \infty))$ und $f(x_0+0)$ sowie $f(x_0 - 0)$ existieren. Dann gilt

$$\mathrm{D}f = f' + (f(x_0+0) - f(x_0-0))\,\delta_{x_0}.$$

f' bezeichnet hier die klassische Ableitung von f. Der Wert bei x_0 spielt wieder keine Rolle.

Wir erkennen das folgende Schema,

Knick	$\xrightarrow{\text{Ableitung}}$	Sprung,
Endlicher Sprung	$\xrightarrow{\text{Ableitung}}$	δ-Distribution.

3.) $D^\alpha \delta_0(\varphi) = (-1)^\alpha \delta_0(\nabla^\alpha \varphi$.

4.) Setze $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

a) f ist stetig für $x \neq 0$ und es gilt,

$$\int_{K_1(0)} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \int\limits_{r=0}^{1} \frac{1}{r} r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi < \infty.$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$ und daher die Distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$.

b)

$$\begin{aligned}(\Delta f)(\varphi) &= \Delta T_f(\varphi) = \partial_{x_1}^2 T_f(\varphi) + \ldots + \partial_{x_3}^2 T_f(\varphi) \\ &= (-1)^2 T_f(\partial_{x_1}^2 \varphi + \ldots + \partial_{x_3}^2 \varphi) = T_f(\Delta\varphi) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Wähle R so, dass $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_R(0)$ und verwende $\Delta\frac{1}{|x|} = 0$,

$$\begin{aligned}\ldots &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<R} \frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x) - \Delta\frac{1}{|x|}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Green}}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{|x|=\varepsilon,R} \frac{1}{|x|} n_0(x)\nabla\varphi(x) - n_0(x)\nabla\frac{1}{|x|}\varphi(x)\,\mathrm{d}V^{(2)}\end{aligned}$$

Da $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_R(0)$, verschwindet der Ausdruck auf $|x| = R$,

$$\ldots = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|} n_0(x)\nabla\varphi(x) - n_0(x)\nabla\frac{1}{|x|}\varphi(x)\,\mathrm{d}V^{(2)}$$

Nun ist $n_0(x) = -\frac{x}{|x|}$ für $|x| = \varepsilon$. Für den ersten Summanden ergibt sich,

$$\begin{aligned}&\left| \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|} n_0(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}V^{(2)} \right| \le \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{|x|\,|\nabla\varphi|}{|x|^2}\,\mathrm{d}V^{(2)} \\ &\le \|\nabla\varphi\| \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}V^{(2)} = \|\nabla\varphi\| \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon} \to 0.\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden verwende $\nabla \frac{1}{|x|} = -\frac{x}{|x|^3}$,

$$
\begin{aligned}
&- \int\limits_{|x|=\varepsilon} n_0(x) \nabla \frac{1}{|x|} \varphi(x) \, \mathrm{d}V^{(2)} = - \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|} \frac{x}{|x|^3} \varphi(x) \, \mathrm{d}V^{(2)} \\
&- \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}V^{(2)} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[\underbrace{\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) - \varphi(0) \, \mathrm{d}V^{(2)}}_{\to 0} + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(0) \, \mathrm{d}V^{(2)} \right] \\
&\to -4\pi\varphi(0)
\end{aligned}
$$

Somit ist $\Delta T_f(\varphi) = -4\pi\varphi(0) = -4\pi\delta_0(\varphi)$, d.h. $-\Delta f = 4\pi\delta_0$. ■

3.16 **Satz** *Sei* (T_j) *Folge in* $D'(\mathbb{R}^n)$*.*

(i) Sei $T_j \to T$*, so gilt*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \mathrm{D}^\alpha T_j \to \mathrm{D}^\alpha T.$$

(ii) Sei $\sum_j T_j = T$*, so gilt*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \mathrm{D}^\alpha \sum_j T_j \to \mathrm{D}^\alpha T. \quad \rtimes$$

» "(i)": $T_j \to T$ heißt,

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : T_j(\varphi) \to T(\varphi).$$

Sei also $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\mathrm{D}^\alpha T_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_j(\nabla^\alpha \varphi) =\to (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) = \mathrm{D}^\alpha T(\varphi).$$

"(ii)": Folgt aus (i) mit

$$\mathrm{D}^\alpha \sum_j T_j = \mathrm{D}^\alpha \lim_{J\to\infty} \sum_{j=1}^J T_j \overset{(i)}{=} \lim_{J\to\infty} \mathrm{D}^\alpha \sum_{j=1}^J T_j = \mathrm{D}^\alpha T. \quad «$$

3.17 **Bsp** 1.) Betrachte

$$f_j(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^j, & x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \overset{\text{punktw.}}{\to} f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

a) $f_j \to f$ in $D'(\mathbb{R})$.

$$T_{f_j}(\varphi) = \int_1^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^j \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

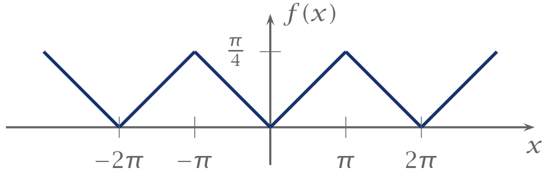
Nun gilt

$$\left| \int_0^1 x^j \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \|\varphi\|_\infty \int_0^1 x^j\,\mathrm{d}x = \frac{\|\varphi\|_\infty}{j+1} \to 0.$$

b) $\mathrm{D}f_j \to \mathrm{D}f = \delta_1$.

$$(\mathrm{D}f_j)(\varphi) = -T_{f_j}(\varphi') = -\underbrace{\int_0^1 x^j \varphi'(x)\,\mathrm{d}x}_{\to 0} + \underbrace{\int_1^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x}_{=\varphi(1)} \to \delta_1(\varphi).$$

2.) Betrachte $f(x) = \frac{\pi}{4}|x|$ für $-\pi \le \pi$, 2π-periodisch fortgesetzt.



7 **Graph der Funktion f.**

Die Fourierreihe von f ist gegeben durch,

$$g_n(x) = \frac{\pi^2}{8} - \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{x} + \frac{\cos 5x}{x} + \dots\right).$$

f ist hölderstetig, d.h. $g_n \twoheadrightarrow f$ glm.

$$
\begin{aligned}
T_{g_n}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{glm. konv.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_f(\varphi).
\end{aligned}
$$

D.h. $g_n \to f$ in $D'(\mathbb{R})$. Mit dem erweiterten Dini Kriterium folgt,

$$
\mathrm{D}g = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Mit dem soeben gezeigten gilt,

$$
\mathrm{D}g = \mathrm{D}f = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0. \end{cases}
$$

Für die zweite Ableitung gilt,

$$
\mathrm{D}^2 g = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots
$$

offensichtlich haben wir keine Konvergenz im Definitionsbereich. Im Distributionensinn lässt sich die Ableitung jedoch darstellen,

$$
\mathrm{D}^2 g = \mathrm{D}^2 f = \frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \delta_{j\pi}. \quad \blacksquare
$$

■ Multiplikation von Distributionen

3.18 **Definition/Satz** *Sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$*

1.) Für $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ ist $a \cdot T$ definiert durch,

$$
a \cdot T(\varphi) := T(a\varphi).
$$

2.) Für $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt $aT_u = T_{au}$, d.h. auf der Menge der regulären Distributionen ist die Multiplikation wohlbekannt.

3.) *Die Abbildung $T \mapsto a \cdot T$ ist stetig, d.h. die Definition in **??** ist die stetige Fortsetzung der Multiplikation.*

» 1.) Zu zeigen ist, dass $a \cdot T$ wieder eine Distribution ist.

Linearität. Ist offensichtlich.

Stetigkeit. Sei $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi$, dann ist auch $a\varphi_j \overset{D}{\to} a\varphi$ und daher,

$$aT(\varphi_J) = T(a\varphi_j) \overset{T \text{ stet.}}{=} T(a\varphi) = aT(\varphi).$$

2.) $a \cdot T_u(\varphi) = T_u(a\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)a(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_{ua}(\varphi)$.

3.) Sei $T_j \to T$ in $D'(\mathbb{R}^n)$, so gilt,

$$a \cdot T_j(\varphi) = T_j(a\varphi) \to T(a\varphi) = a \cdot T(\varphi). \quad «$$

3.19 **Leibnitzregel** $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha(a \cdot T) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\nabla^{\alpha-\beta} a\right) \mathrm{D}^\beta T.$ ⋊

» Zu $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ sei $(\varphi_j) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_j \to T$. Mit 3.18 folgt, $a\varphi_j \to aT$. Aufgrund der Stetigkeit der Distributionenableitung gilt nun,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}^\alpha(a\varphi_j) \to \mathrm{D}^\alpha(a\varphi)\\
\Rightarrow &\sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\nabla^{\alpha-\beta} a\right) \nabla^\beta \varphi_j \to \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\nabla^{\beta-\alpha} a\right) \mathrm{D}^\beta \varphi. \quad «
\end{aligned}$$

3-D Lokales Verhalten

3.20 **Definition** *1.) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei,*

$$C_0^\infty(M) := \left\{\varphi \in C^\infty(M \to C) : \operatorname{supp}\varphi \textit{ kompakt und } \operatorname{supp}\varphi \subseteq M\right\}.$$

2.) Für $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C_0^\infty(O)$ sei

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in O, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.) Seien $T,S \in D'(\mathbb{R}^n)$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $T = S$ in O, falls,

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(O) : T(\tilde{\varphi}) = S(\tilde{\varphi}). \quad \rtimes$$

3.21 **Bsp** 1.) Seien $u,v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $u = v$ -f.ü. in O. Für $\varphi \in C_0^\infty(O)$ gilt dann,

$$T_u(\tilde{\varphi}) - T_v(\tilde{\varphi}) = T_{u-v}(\tilde{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u-v)\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}\mu = \int_O (u-v)\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}\mu.$$

D.h. $T_u = T_v$ in O.

2.) Sei $O := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist $\delta_0 = 0$ in O, d.h.

$$\varphi \in C_0^\infty(O) \Rightarrow \delta_0(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = 0. \quad \blacksquare$$

3.22 **Ableitung ist lokale Opperation** *Wenn $T = S$ in O, dann gilt*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \mathrm{D}^\alpha T = \mathrm{D}^\alpha S \text{ in } O. \quad \rtimes$$

» Offensichtlich ist $\nabla^\alpha \tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla^\alpha \varphi}$ und daher,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\alpha T(\tilde{\varphi}) &= (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \tilde{\varphi}) = (-1)^{|\alpha|} T\left(\widetilde{\nabla^\alpha \varphi}\right) = (-1)^{|\alpha|} S\left(\widetilde{\nabla^\alpha \varphi}\right) \\ &= \mathrm{D}^\alpha S(\tilde{\varphi}). \quad «\end{aligned}$$

3.23 **Satz** *Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $G := \bigcup \{O \in \mathbb{R}^n \text{ offen} : T = 0 \text{ in } O\}$. Dann ist T offen und $T = 0$ in G.* $\rtimes$

» Die Offenheit von G ist klar. Sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Da der Träger von φ kompakt ist existiert eine endliche Überdeckung von $\operatorname{supp}\varphi$,

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} O_j, \quad T = 0 \text{ in } O_j.$$

Verwende nun eine Zerlegung der Eins: $\exists\ \psi_j \in C_0^\infty(O_j) : \sum_{j=1}^{J} \psi_j = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi$.

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{J} \tilde{\varphi}\psi_j \Rightarrow T\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{J} T\left(\widetilde{\varphi\psi_j}\right) = 0. \quad «$$

3.24 **Definition** *Für $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\operatorname{supp} T := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{O \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ offen} : T = 0 \textit{ in } O\}$$

der Träger von T. $x \in \operatorname{supp} T$ heißt wesentlicher Punkt von T. Falls $\operatorname{supp} T$ kompakt, heißt T finit. ⋊

3.25 **Bsp** 1.) $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$.

2.) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \operatorname{supp} T_\varphi = \operatorname{supp} \varphi$.

3.) Sei $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} T_u &= \mathbb{R}^n \setminus \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} : u = 0 \ \mu\text{-f.ü. auf } O\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, U(x) : u = 0 \ \mu\text{-f.ü. in } U(x)\}.\end{aligned}$$ ■

3.26 **Satz** *Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gilt*

$$\exists\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, c > 0\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \Rightarrow |T(\varphi)| \le c \max_{|\alpha| \le k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_\infty .$$ ⋊

» Angenommen die Aussage wäre falsch, d.h.

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ \forall\ c > 0\ \exists\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \wedge |T(\varphi)| > c \max_{|\alpha| \le k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_\infty .$$

Wähle $c = k$, dann gibt es ein $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq K$ und

$$|T(\varphi_k)| > k \max_{|\alpha| = k} \|\nabla^\alpha \varphi_k\|_\infty .$$

Setze $\psi_k = \frac{1}{k \max \|\nabla^\alpha \varphi_k\|_\infty} \varphi_k$, dann ist $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_k \subseteq K$ und

$$\max_{|\alpha| \le k} \|\nabla^\alpha \psi_k\|_\infty = \frac{1}{k} \to 0.$$

Insbesondere geht für festes α, $\nabla^\alpha \psi_k \twoheadrightarrow 0$ glm. auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $\psi_k \xrightarrow{D} 0$ und daher $T(\psi_k) \to 0$. Aber $T(\psi_k) > 1$. ↯ «

3.27 **Korollar** *Ist T finit, so gilt 3.26 ohne die Einschränkung $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$.* ⋊

» Wähle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp} T$. Dann ist

$$T(\varphi) = T(\psi\varphi) + T(\underbrace{(1-\psi)\varphi}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} T)}) = T(\psi\varphi).$$

Wende nun 3.26 an mit $K = \operatorname{supp}\psi$, $\operatorname{supp}\varphi\psi \subseteq \operatorname{supp}\psi = K$, dann folgt

$$|T(\varphi)| \leq c \max_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha(\psi\varphi)\|_\infty \leq c \max_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_\infty . \quad «$$

3.28 **Definition** *$T \in D'(\mathbb{R}^n)$ heißt von endlicher Ordnung, falls 3.26 ohne die Einschränkung $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ gilt. Das kleinstmögliche $k \in \mathbb{N}$ heißt Ordnung von T.* ⋊

3.29 **Bsp** 1.) $\left|\delta_{x_0}(\varphi)\right| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_\infty$. D.h. die Ordnung ist 0.

2.) Sei $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$|T_u(\varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|\,|\varphi| \,\mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u| \,\mathrm{d}\mu = \|\varphi\|_\infty \|u\|_1 .$$

3.) In $\mathbb{R}$ ist für

$$T = \sum_{j=0}^{J} c_j D^j \delta_0,$$

die Ordnung J, falls $c_J \neq 0$.

4.) Betrachte $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = x$. Setze $\varphi_k = j_1(\cdot - k)$, dann folgt

$$|T_u(\varphi_k)| = \left| \int_{\mathbb{R}} j_1(x-k)x \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{k-1}^{k+1} j_1(x-k)x \,\mathrm{d}x \right| > k-1 \to \infty.$$

Das heißt,

$$\|\nabla^\alpha \varphi_k\|_\infty = \left\|\nabla^\alpha j_1(\cdot - k)\right\|_\infty = \left\|\nabla^\alpha j_1\right\|_\infty = \text{const},$$

unabhängig von k. D.h. die Ordnung von T_u ist ∞. ■

3.30 *Bemerkung.* Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ und $O \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und ein $u \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ mit $T = D^\alpha u$. ⊸

3-E Faltung

Erinnerung. Die Faltung von zwei Funktionen f, g ist definiert als,

$$f * g := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Sind $f, g \in \mathcal{L}^1$ folgt mit Fubini, dass $f * g \in \mathcal{L}^1$. Ist aber $f = g = 1$, so ist $f * g$ nicht mehr definiert.

Abhilfe. Definiere $f * g$ nur für solche f, g für die bei festem z,

$$\begin{aligned}
&\left\{(z,y) \in \mathbb{R}^{2n} : f(z-y) \neq 0 \wedge g(y) \neq 0\right\} \text{beschränkt} \\
\Leftrightarrow &\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : f(x) \neq 0 \wedge g(y) \neq 0 \wedge x = z-y\right\} \text{beschränkt} \\
\Leftrightarrow &\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x = z-y\right\} \text{beschränkt} \quad \multimap
\end{aligned}$$

3.31 **Definition** $(T,S) \in D'(\mathbb{R}^n)^2$ *erfüllt die Streifenbedingung, falls*

$$\forall\ a > 0 : \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S \cap \sigma_a \text{ beschränkt,}$$

wobei $\sigma_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x+y| \leq a\}$. ⋊

3.32 **Bsp** $\operatorname{supp} T$ beschränkt $\Rightarrow (T,S)$ erfüllt die Streifenbedingung.

3.33 *Bemerkung.* Seien $f, g, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\begin{aligned}
T(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(z+y)g(y)\mathrm{d}(z,y)
\end{aligned}$$

Wähle R so, dass $\operatorname{supp}\varphi \in K_R(0)$. Dann ist der Integrand höchstens für $|z+y| < R$ von Null verschieden und $f(z)g(y) \neq 0$ höchstens in $\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$. ⊸

3.34 **Definition** $(T,S) \in D'(\mathbb{R}^n)^2$ *erfülle die Streifenbedingung, dann ist* $T * S$ *definiert durch,*

$$(T * S)(\varphi) := T_x\left(S_y(\varphi(x+y))\right) = \left(T_x \times S_y\right)(\varphi(x+y)),$$

für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ⋊

Probleme. Was ist $T \times S$? $\tilde{\varphi} : (x, y) \mapsto \varphi(x+y)$ hat stets unbeschränkten Träger.

3.35 **Lemma** *Sei $S \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$. Setze*

$$\psi(x) := S(\varphi(x, \cdot)), \qquad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

(i) $\nabla^\alpha \psi(x) = S\left(\nabla^\alpha \varphi(x, \cdot)\right)$.

(ii) $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\varphi_j \xrightarrow{D} 0 \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{D} 0$.

» (i) Es genügt die Behauptung für die erste partielle Ableitung zu zeigen,

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x + he_j) - \psi(x)}{h} &= S\left(\frac{\varphi(x + he_j, \cdot) - \varphi(x, \cdot)}{h}\right) \\ &\overset{S \text{ stetig}}{\rightarrow} S(\partial_{x_j}\varphi(x, \cdot)). \\ \Rightarrow \partial_{x_j}\psi(x) &= S\left(\partial_{x_j}\varphi(x, \cdot)\right) = S\left(\nabla^{e_j, 0}\varphi(x, \cdot)\right) \end{aligned}$$

(ii) Mit (i) folgt, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]^{n+m}$, dann ist $\varphi(x, \cdot) = 0$ für $\left|x_j\right| > R$ unabhängig von $\cdot$ und daher ist auch $\psi(x) = S(\varphi(x, \cdot)) = 0$ außerhalb von $[-R, R]^n$.

(iii) $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq [-R, R]^{n+m}$ daher ist $\operatorname{supp}\psi_j \subseteq [-R, R]^n$. Mit 3.36 folgt,

$$S(\xi) \le c \max_{|\beta| \le k} \left\|\nabla^\beta \xi\right\|_\infty,$$

für $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\xi \subseteq [-R, R]^m$. Setze $\xi_j := \nabla^{(\alpha,0)}\varphi_j(x, \cdot)$, so folgt,

$$\begin{aligned} \left|\nabla^\alpha \varphi_j(x)\right| &= \left|S(\nabla^{(\alpha,0)}\varphi_j(x, \cdot))\right| \le c \max_{|\beta| \le k} \left\|\nabla^{(\alpha,\beta)}\varphi_j(x, \cdot)\right\|_\infty \\ &\rightarrow 0 \text{ glm. bezgl. } x. \quad « \end{aligned}$$

3.36 **Definition/Satz** *Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $S \in D'(\mathbb{R}^m)$. Dann ist das direkte Produkt definiert als,*

$$(T \times S)(\varphi) := T_x(S_y(\varphi)), \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Es gelten,

(i) $T \times S \in D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(ii) Für $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ gilt,

$$T_u \times T_v = T_{u(x)\cdot v(y)}.$$

(iii) Seien $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, so gilt

$$T(\varphi_1)S(\varphi_2).$$

(iv) $\operatorname{supp} T \times S = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$. ⋊

» "(i)": $T \times S$ ist nach 3.35 definiert. Die Lineartität ist offensichtlich. Zum Nachweis der Stetigkeit sei $\varphi_j \xrightarrow{D} 0$, so folgt mit 3.35, dass $\psi_j(x) := S_y(\varphi(x,\cdot) \xrightarrow{D} 0$ und damit,

$$T \times S(\varphi_j) = T(\psi_j) \to 0.$$

$T \times S$ ist linear, d.h. Stetigkeit in 0 impliziert die Stetigkeit überall.

"(ii), (iii)": Übung.

"(iv)":

(a) Sei $(x,y) \in \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$ und $U(x,y)$ Umgebung im $\mathbb{R}^{n+m}$, dann gilt

$$\exists\, U_1(x), U_2(y) : U_1(x) \times U_2(y) \subseteq U(x,y).$$

Nun gilt,

$$x \in \operatorname{supp} T \Rightarrow \ \exists\, \varphi_1 \in C_0^\infty(U_1(x)) : T(\varphi_1) \neq 0,$$
$$y \in \operatorname{supp} S \Rightarrow \ \exists\, \varphi_2 \in C_0^\infty(U_2(y)) : S(\varphi_2) \neq 0.$$

Setze $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, dann gilt,

$$\varphi \in C_0^\infty(U(x,y)) \wedge T \times S(\varphi) = T(\varphi_1)S(\varphi_2) \neq 0$$
$$\Rightarrow (x,y) \in \operatorname{supp} T \times S.$$

(b) Sei $(x, y) \notin \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$. Ohne Einschränkung sei $x \notin \operatorname{supp} T$, dann gilt

$$\exists\, U(x) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen } : \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(U(x)) : T\varphi = 0.$$

$U(x) \times \mathbb{R}^m$ ist Umgebung von (x, y) und $T = 0$ auf $U(x) \times \mathbb{R}^m$, denn für $\phi \in C_0^\infty(U(x) \times \mathbb{R}^m)$ gilt

$$T \times S(\phi) = T_x(\underbrace{S_y(\phi(x, y))}_{\in C_0^\infty(U(x))}) = 0.$$

Also ist $(x, y) \notin \operatorname{supp} T \times S$. «

3.37 **Fortsetzung der Distributionen** *(i) Zu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen sei,*

$$C_M^\infty := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to C) \ : \ \operatorname{supp} \varphi \cap M \ \textit{beschränkt}\}.$$

C_M^∞ ist ein linearer Raum und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq C_M^\infty$.

Ist M kompakt so ist $C_M^\infty = C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$. Ist $M = \mathbb{R}^n$, so ist $C_M^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $M := \operatorname{supp} T$. Zu $\varphi \in C_M^\infty$ wähle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ auf $K = \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$. Setze

$$T\varphi = T(\psi\varphi).$$

Diese Definition ist unabhängig vom gewählten ψ, denn sei $\tilde{\psi}$ ebenfalls $= 1$ auf K, so gilt

$$T(\psi\varphi) - T(\tilde{\psi}\varphi) = T((\psi - \tilde{\psi})\varphi) = 0.$$

(iii) Eigenschaften.

(a) $T : C_M^\infty \to \mathbb{C}$ ist linear.

(b) Die Ableitungsdefinition gilt weiterhin,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^\alpha T(\varphi) := \mathrm{D}^\alpha T(\psi\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} T(\underbrace{\nabla^\alpha \psi\varphi}_{=\psi\nabla^\alpha\varphi \ \textit{in}\ K}) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

(c) $T_j \to T$ in $D'(\mathbb{R}^n)$ und $\exists\ K$ kompakt mit $\operatorname{supp} T_j \subseteq K$, so gilt,

$$\forall\ \varphi \in C_K^\infty : T_j(\varphi) \to T.$$

(d) $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset \Rightarrow T(\varphi) = 0.$ $\rtimes$

3.38 **Satz** *Falls* $(T, S) \in D'(\mathbb{R}^n)^2$ *die Streifenbedingung erfüllt, dann ist* $T * S \in D'(\mathbb{R}^n)$. $\rtimes$

» $T * S(\varphi) = (T_x \times S_y)(\varphi(x+y))$

1.) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K_R(0)$, $\tilde{\varphi} := \varphi(x+y)$, so ist $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subseteq \sigma_R$ und daher,

$$\operatorname{supp} T \times S \cap \operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subseteq \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S \cap \sigma_R \text{ beschränkt.}$$

D.h. $\tilde{\varphi} \in C^\infty_{\operatorname{supp} T\times S} \Rightarrow T * S(\tilde{\varphi})$ ist definiert.

2.) $T * S$ ist offensichtlich linear.

3.) Sei $\varphi_j \xrightarrow{D} 0$, dann

$$\exists\ R > 0 :\ \forall\ j \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K_R(0).$$

Also ist $\operatorname{supp} T \times S \cap \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K := \operatorname{supp} T \times S \cap \sigma_R$.

Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi = 1$ auf K und $\tilde{\varphi}_j(x,y) = \varphi_j(x+y)$, dann gilt

$$T * S(\varphi_j) = T \times S(\tilde{\varphi}_j) = T \times S(\underbrace{\psi\tilde{\phi}_j}_{\xrightarrow{D} 0}) \to 0,$$

denn $\operatorname{supp} \psi\tilde{\varphi}_j \subseteq \operatorname{supp} \psi$ und $\nabla^\alpha(\psi\varphi_j)(x,y) \twoheadrightarrow 0$ glm. «