Analysis III - Mitschrieb

bei PD. Dr. P. H. Lesky

Jan-Cornelius Molnar, Version: 19. Mai 2009 22:04

Inhaltsverzeichnis

1 **Grenzwerte** 3
1-A Grundlagen . . . 3
1-B Vertauschung von Grenzwerten . . . 10

2 **Funktionentheorie** 18
2-A Grundlangen . . . 18
2-B Holomorphie und Analytizität . . . 31
2-C Nullstellen . . . 51
2-D Analytische Fortsetzung . . . 64
2-E Integrale längs geschlossener Kurven . . . 70

3 **Einführung in Integrations und Maßtheorie** 84
3-A Falsche Erwartungen . . . 84
3-B Messbare Mengen . . . 86
3-C Maße . . . 90
3-D Messbare Funktionen . . . 94
3-E Lebesgue Integral . . . 99
3-F Konvergenzsätze und mehr . . . 104
3-G Riemann- und Lebesgueintegral . . . 111
3-H Produktmaße . . . 115
3-I $\mathcal{L}^p$-Räume . . . 126

4 **Volumen und Flächenintegrale, Vektoranalysis** 136
4-A Mannigfaltigkeiten . . . 136
4-B Der Inhalt von Mannigfaltigkeiten . . . 142
4-C Physikalische Integrale und Differentialformen . . . 146

4-D Rechnen mit Differentialformen 150
4-E Zerlegung der Eins 154
4-F Satz von Stokes 158
4-G Anwendungen 162
4-H Koordinateninvariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten 168

1 Grenzwerte

1-A Grundlagen

1.1 **Definition** *Eine Folge in einer Menge M ist eine Abbildung der Form*

$$a : \mathbb{N} \to M,$$

die man durch Aufzählen ihrer Funktionswerte als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ angibt. $\rtimes$

Bemerkung zur Notation Wir wollen eine Folge als Ganzes mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, um sie von dem n-ten Folgenglied a_n zu unterscheiden. $\multimap$

An einer Folge interessiert uns vor allem ihr asymptotisches Verhalten. Um dieses beschreiben zu können, benötigen wir einen Abstandsbegriff.

1.2 **Definition** *Sei M eine Menge, dann heißt eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ Metrik, falls sie den folgenden Eigenschaften genügt:*

(a) $\forall\, x, y \in M : d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(b) $\forall\, x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$.

(c) $\forall\, x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. $\rtimes$

Metriken sind ein allgemeineres Konzept als Normen, es gilt folgender Zusammenhang.

Satz *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann wird durch*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V,$$

eine Metrik induziert. $\rtimes$

» Die positive Definitheit sowie die Symmetrie sind klar. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen bedienen wir uns eines beliebten Tricks,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Womit alle Metrikeigenschaften nachgewiesen sind. «

1.3 **Bsp** (a) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.
Wie durch jede Norm, wird auch durch die Betragsnorm eine Metrik induziert.

(b) $M = \mathbb{C}^n$, $d(x,y) := \|x-y\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$.
Selbiges gilt für die p-Norm.

(c) Für eine Menge M ist die diskrete Metrik definiert als,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \quad ■$$

1.4 **Definition** *Sei (M,d) ein metrischer Raum, (a_n) eine Folge in M.*

(a) *(a_n) heißt konvergent gegen $a \in M$ bezüglich d, falls gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Schreibe $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder kurz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) *(a_n) heißt konvergent, falls ein solches a existiert.*

(c) *(a_n) heißt Cauchyfolge, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

(d) *(M,d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.* ⋊

Erst der folgende Satz erlaubt es uns überhaupt von einem Grenzwert zu sprechen.

Satz *Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.* ⋊

» Beweis siehe Skript Prof. Pöschel Seite 61f, man muss lediglich die Norm als Metrik interpretieren. «

Wir wissen bereits, dass nicht jeder metrische Raum volltändig ist und nur in vollständigen Räumen folgt aus der Cauchyeigenschaft die Konvergenz. Die Umkehrung gilt aber immer.

Satz *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.* ⋊

» Beweis siehe Skript Prof. Pöschel Seite 72. «

1.5 **Bsp** (a) Der $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder durch eine Norm induzierten Metrik vollständig.

(b) Der Raum $C([a,b],\mathbb{R})$ mit der Metrik

$$d(f,g) = ||f-g||_2 := \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

ist nicht vollständig.

» Um dies zu zeigen, genügt es eine Cauchyfolge in $C([a,b],\mathbb{R})$ zu finden, die nicht in $C([a,b],\mathbb{R})$ konvergiert. Dazu fixieren wir $a = 0$, $b = 2$ und betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

f_n ist Cauchy, denn

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||_2^2 &= \int_0^1 |x^n - x^m|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left| x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m} \right| \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+m+1} + \frac{1}{2m+1} \le \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} \\ &\le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \text{ für } n,m > \frac{2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die Grenzfunktion dieser Funktionenfolge ist nicht stetig und damit nicht in $C([a,b],\mathbb{R})$, denn angenommen $\exists\, f \in C([0,2],\mathbb{R}) : d(f,f_n) \to 0$, dann gilt

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \Rightarrow f(x) = 0 & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ \int_1^2 |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \Rightarrow f(x) = 1 & \text{für } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Dies impliziert

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

also kann f nicht stetig sein. « ■

1.6 **Definition/Satz** *Sei (a_n) eine Folge in (M,d).*

(a) *Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt (a_{n_k}) Teilfolge von (a_n).*

(b) *Sei $a \in M$ ein Häufungspunkt von (a_n), dann sind folgende Aussagen äquivalent*

a) Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k}) \to a$.

b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, m \ge N : d(a_m, a) < \varepsilon$. ⋊

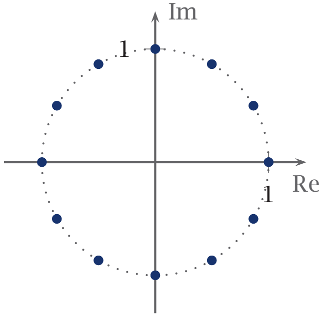
» Der Beweis ist eine leichte Übung. «

Definition *Die Menge der Häufungspunkte einer Folge (a_n) bezeichnen wir mit*

$$HP((a_n)) = \{a \in M : a \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}.$$ ⋊

1.7 **Bsp** (a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \Rightarrow HP((a_n)) = \{1/2, -1/2\}$.

(b) $a_n = 2e^{in\pi/6}$.



Die 12 Häufungspunkte liegen auf einem Kreis mit Radius 2 um den Ursprung und haben den Winkelabstand $\pi/6$.

(c) Für eine Abzählung (a_n) von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gilt $HP((a_n)) = \mathbb{R}$. ■

1.8 **Definition** *Sei (a_n) eine Folge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, dann sind limes superior und inferior wie folgt definiert.*

(a) *Ist (a_n) nach oben beschränkt und $\mathrm{HP}((a_n)) \neq \emptyset$, so ist*

$$\limsup a_n = \sup \mathrm{HP}((a_n)).$$

(b) *Ist (a_n) nach oben beschränkt und $\mathrm{HP}((a_n)) = \emptyset$, so ist $\limsup a_n = -\infty$.*

(c) *Ist (a_n) nach oben unbeschränkt, so ist $\limsup a_n = \infty$.*

Analoges gilt für den $\liminf a_n$. ⋊

1.9 **Bsp** (a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \Rightarrow \limsup a_n = 1/2,\ \liminf a_n = -1/2.$

(b) $a_n = n \Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \infty$.

(c) $a_n = \begin{cases} (1/2)^n & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 2^n & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$

$\liminf a_n = 0, \limsup a_n = \infty$. ■

1.10 **Satz** *Sei* (a_n) *reell, nach oben beschränkt und* $\operatorname{HP}((a_n)) \neq \emptyset$*, dann gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N_\varepsilon : a_n \leq \limsup a_n + \varepsilon. \quad \rtimes$$

» Angenommen, die Aussage gilt nicht, also

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq N : a_n > \limsup a_n + \varepsilon,$$

dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} > \limsup a_n + \varepsilon$. Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (a'_{n_k}) von (a_{n_k}) mit Grenzwert

$$a := \lim_{k\to\infty} a'_{n_k} \geq \limsup a_n + \varepsilon.$$

Dann ist aber $a \in \operatorname{HP}((a_n))$ und $a \geq \sup \operatorname{HP}((a_n)) + \varepsilon$, ein Widerspruch. «

1.11 **Satz** *Sei* (a_n) *Folge in* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*. Dann ist* (a_n) *konvergent genau dann, wenn* (a_n) *beschränkt ist und gilt* $\limsup a_n = \liminf a_n$*.* $\rtimes$

» "$\Rightarrow$": (a_n) ist konvergent, also beschränkt und es gilt $\operatorname{HP}((a_n)) = \{\lim a_n\}$. Daher ist $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.

"$\Leftarrow$": Sei $a := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Da (a_n) beschränkt ist, ist $\operatorname{HP}((a_n)) \neq \emptyset$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest, dann existieren nach 1.10 $N, N' \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$\forall\ n \geq N : a_n \leq \limsup a_n + \varepsilon,$$
$$\forall\ n \geq N' : a_n \geq \liminf a_n - \varepsilon.$$

Für alle $n \geq N_0 = \max\{N, N'\}$ gilt daher $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$, also $a_n \to a$. «

Funktionenfolgen spielen in vielen Gebieten der Analysis eine Rolle. Hier können ganz unterschiedliche Arten von Konvergenz auftreten. Die Konvergenz einer Funktionenfolge kann davon abhängen, welcher Punkt aus dem Definitionsbereich gerade betrachtet wird, weshalb man beispielsweise in Funktionenräumen ein allgemeineres Konzept als Metriken benötigt, um diese Konvergenz zu erfassen. Mithilfe der Konvergenz lässt sich auch oft feststellen, wie sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit aller Folgenglieder auf die Grenzfunktion vererben.

1.12 **Definition** *Sei D Menge, (M, d) metrischer Raum, (f_n) eine Folge von Abbildungen $f_n : D \to M$ und $f : D \to M$.*

(a) *(f_n) heißt punktweise konvergent auf D gegen f, falls*

$$\forall\ x \in D\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

(b) *(f_n) heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen f, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N, x \in D : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \quad \rtimes$$

Nicht überraschend ist folgender Zusammenhang.

1.13 **Satz** *Konvergiert eine Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, so konvergiert sie auch punktweise.* $\rtimes$

» Der Beweis sei als Übung überlassen. «

Im Folgenden wollen wir durch $f_n \twoheadrightarrow f$ ausdrücken, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

1.14 **Bsp** (a) $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \sin x$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = x$, denn

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{n} \left|\sin x\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(b) Auf $D = [0, 2]$ konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

lediglich punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Wie wir noch sehen werden, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig gewesen sein, da f nicht stetig ist. ■

1-B Vertauschung von Grenzwerten

1.15 **Bsp** (a) Für die Doppelfolge $(a_{np})_{n,p\in\mathbb{N}}$ mit $a_{np} = \dfrac{n}{n+p+1} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{p}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} a_{np} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
$$\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{np} = \lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{2}{p}\right) = 1.$$

Offensichtlich hängt der Grenzwert von der Reihenfolge ab, in der die Indizes nach Unendlich laufen. ■

1.16 **Satz** *Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to M$ so, dass gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_{np} = u(p) \quad \textit{für } p\in\mathbb{N},$$
$$\lim_{p\to\infty} a_{np} = v(n) \quad \textit{für } n\in\mathbb{N},$$

Gilt $a_{np} \rightrightarrows u(p)$ bzw. $a_{np} \rightrightarrows v(n)$, dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{p\to\infty} u(p)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} v(n)$ und stimmen überein. ⋊

» ObdA können wir annehmen $a_{np} \rightrightarrows u(p)$, dann gilt

$$d(u(p),u(q)) \le d(u(p),a_{np}) + d(a_{np},a_{nq}) + d(a_{nq},u(q)).$$

Für n_0 hinreichend groß folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von a_{np}

$$d(u(p),u(q)) < \frac{2\varepsilon}{3} + d(a_{n_0p},a_{n_0q}) < \varepsilon,$$

für $p,q > P_\varepsilon$. Somit ist $u(p)$ Cauchyfolge, also konvergent mit Grenzwert u.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $v(n)$ ebenfalls den Grenzwert u hat.

$$\begin{aligned} d(v(n),u) &\le d(v(n),a_{np}) + d(a_{np},u(p)) + d(u(p),u) \\ &< d(v(n),a_{np}) + \frac{\varepsilon}{3} + d(u(p),u), \end{aligned}$$

für $n > N_\varepsilon$. Wählt man nun $n_0 > N_\varepsilon$ beliebig aber fest, folgt daher

$$d(v(n_0), u) < \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{d(v(n_0), a_{n_0 p})}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } p > P_{\varepsilon, n_0}} + \underbrace{d(u(p), u)}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } p > P'_\varepsilon} < \varepsilon,$$

für $p > \max\{P_{\varepsilon,n_0}, P'_\varepsilon\}$.

Da $n_0 > N_\varepsilon$ beliebig war, gilt für alle $n > N_\varepsilon$ und $p > \max\{P_{\varepsilon,n_0}, P'_\varepsilon\}$, dass $d(v(n), u) < \varepsilon$. «

1.17 *Festlegung* Im Folgenden seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. ⊸

1.18 **Definition** *Sei $D \subseteq X$, dann heißt $x_0 \in X$ Häufungspunkt von D, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ y \in D : (y \neq x_0) \wedge (d(y, x_0) < \varepsilon),$$

oder äquivalent

$$\exists\ (x_n) \text{ in } D : (x_n \to x_0) \wedge (\ \forall\ n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0).$$

Die Menge aller Häufungspunkte von D bezeichnen wir mit D', den Abschluss von D mit $\overline{D} = D \cup D'$. ⋊

1.19 **Bsp** (a) Sei $D = \mathbb{N}$, dann ist $D' = \varnothing$ und $\overline{D} = \mathbb{N}$.

(b) Sei $D = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, dann ist $D' = \{0\}$ und $\overline{D} = D \cup \{0\}$.

(c) Sei $D = \mathbb{Q}$, dann ist $D' = \mathbb{R}$ und $\overline{D} = \mathbb{R}$.

Die Menge der Häufungspunkte kann also leer, "größer" oder "kleiner" als die Menge selbst sein. ■

1.20 **Definition** *Sei $D \subseteq X$, $f : D \to Y$*

(a) *f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in D : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Äquivalent lässt sich Stetigkeit mit einem Folgenkriterium definieren. f ist stetig in x_0, falls für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

(b) *f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt aus D stetig ist.*

(c) *Der Raum der stetigen Funktionen $f : D \to Y$ wird mit $C(D \to Y)$ bezeichnet.*

(d) *Sei $\xi \in D'$, dann schreiben wir $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \eta$ bzw. $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$, falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in D : d_X(x, \xi) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), \eta) < \varepsilon,$$

oder äquivalent dazu, falls für jede Folge (x_n) in D gilt

$$x_n \to \xi \Rightarrow f(x_n) \to \eta. \quad \rtimes$$

1.21 **Satz** *Sei Y vollständig, $D \subseteq X$, $f_n, f : D \to Y$. Gilt $f_n \twoheadrightarrow f$ auf D und sind alle f_n stetig auf D, so ist auch f stetig auf D.* $\rtimes$

» Sei $x_0 \in D$, (x_p) Folge in D mit $x_p \to x_0$. Setze $a_{np} := f_n(x_p)$. Dann gilt $a_{np} \twoheadrightarrow f(x_p)$ bezüglich p und $\lim\limits_{p \to \infty} a_{np} = f_n(x_0)$. Nun folgt mit 1.16

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{p \to \infty} f_n(x_p)}_{f_n(x_0)} = \lim_{p \to \infty} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x_p)}_{f(x_p)},$$

also gilt $f(x_0) = \lim\limits_{p \to \infty} f(x_p)$ und f ist stetig. «

Ein analoges Ergebnis erhalten wir für Häufungspunkte:

1.22 **Satz** *Sei Y vollständig, $D \subseteq X$, $\xi \in D'$ und $f_n, f : D \to Y$. Gilt $f_n \twoheadrightarrow f$ auf D und gilt für $n \in \mathbb{N} : f_n(x) \to a(n)$ für $x \to \xi$, dann existiert $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ und es gilt*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{n \to \infty} a(n). \quad \rtimes$$

» Sei (x_p) Folge in D, $x_p \to \xi$. Setze $a_{np} := f_n(x_p)$, dann folgt

$$a_{np} \twoheadrightarrow f(x_p), \quad n \to \infty,$$
$$a_{np} \to a(n), \quad p \to \infty.$$

Mit 1.16 erhalten wir,

$$\lim_{n,p\to\infty} a_{np} = \lim_{p,n\to\infty} a_{np},$$
$$\lim_{p\to\infty} f(x_p) = \lim_{n\to\infty} a(n).$$

Da (x_p) beliebig war, folgt $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a(n)$. «

1.23 *Bemerkung.* Die selben Sätze gelten für Reihen, man muss sie nur als Folge von Partialsummen lesen.
Sei z.B. $f_n(x) \in C(D \to Y)$, Y Bannachraum und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$[1] gleichmäßig konvergent auf D, dann folgt auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in C(D \to Y)$. ⊸

1.24 **Bsp** Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx),$$

gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, also $f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$.

»

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(nx) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon,$$

für $N \geq N_\varepsilon$, also konvergiert die Reihe gleichmäßig. «

Die wenigsten Funktionenfolgen sind auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. Hier ist die Beschränktheit des Sinus ausschlaggebend. ■

1.25 **Satz** *Sei* $(Y, \|\cdot\|)$ *Banachraum,* $f_n \in C([a,b] \to Y)$, $f_n \twoheadrightarrow f$ *auf* $[a,b]$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad ⋊$$

[1] Achtung: Mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kann sowohl Reihe selbst, als auch ihr Grenzwert gemeint sein.

» Mit 1.21 folgt, dass $f \in C([a,b],Y)$, also gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right\| = \left\| \int_a^b f(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \right\| \\
&\leq \int_a^b \|f(x) - f_n(x)\|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_a^b \mathrm{d}x = \varepsilon(b-a),
\end{aligned}$$

für $n > N_\varepsilon$. «

1.26 **Satz** *Sei $f_n \in C^1([a,b] \to Y)$, $(Y, \|\cdot\|)$ Bannachraum. Existieren $x_0 \in [a,b]$ und $\varphi \in C([a,b] \to Y)$ so, dass $(f_n(x_0))$ konvergent ist und gilt $f_n' \twoheadrightarrow \varphi$ auf $[a,b]$, dann folgt:*

(a) *f_n konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.*

(b) *Sei $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Dann ist $f \in C^1([a,b] \to Y)$ und $f' = \varphi$ also $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.* ⋊

» f_n' ist stetig, also gilt nach dem Hauptsatz $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f_m(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f_n'(t) - f_m'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0) - f_m(x_0) \right\| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f_n'(t) - f_m'(t)\|\,\mathrm{d}t \right| + \|f_n(x_0) - f_m(x_0)\| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f_n'(t) - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - f_m'(t)\|\,\mathrm{d}t \right| + \varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon\,|x - x_0| + \varepsilon \leq 2\varepsilon\,|b-a| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

für $n \geq N_\varepsilon$ und unabhängig von x. Somit ist (f_n) Cauchyfolge also konvergent. Da die obige Abschätzung auch für $m \to \infty$ gilt, ist (f_n) sogar gleichmäßig konvergent, es gilt also $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ unabhängig von x.

Es ist $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$ und alle Summanden konvergieren. Durch Grenzübergang erhalten wir nach 1.25

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

und damit folgt $f' = \varphi \in C([a,b] \to Y)$. «

1.27 **Definition/Satz** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und*

$$R := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \limsup a_n = 0, \\ 0, & \text{falls } \limsup a_n = \infty, \\ \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

(i) $f(z)$ konvergiert absolut, falls $|z - z_0| < R$,

(ii) $f(z)$ divergiert, falls $|z - z_0| > R$,

(iii) $f(z)$ konvergiert gleichmäßig auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R'\}$ für jedes $R' \in (0, R)$,

(iv) $f(z)$ ist stetig auf $\{z : |z - z_0| < R\}$.

R nennt man den Konvergenzradius der Potenzreihe. ⋊

» Sei $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \in (0, \infty)$

(i) Mit Satz 1.10 folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} &= \sqrt[n]{|a_n|}\,|z - z_0| \le \Big(\underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{=1/R} + \varepsilon\Big) \underbrace{|z - z_0|}_{<R} \\ &= \underbrace{\frac{|z - z_0|}{R}}_{<1} + \varepsilon\,|z - z_0| < 1, \end{aligned}$$

für $n > N_\varepsilon$, wenn ε hinreichend klein. Also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut.

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$ und (a_{n_k}) Teilfolge mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\left|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}\right| &= \left(\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|}\,|z-z_0|\right)^{n_k} \\
&> \left|\left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} - \varepsilon\right)|z-z_0|\right|^{n_k} \\
&= \left|\frac{|z-z_0|}{R} - \varepsilon\,|z-z_0|\right|^{n_k} > 1,
\end{aligned}$$

für ε hinreichend klein. Damit divergiert die Potenzreihe.

(iii) Aus (i) folgt $\sum |a_n|\, R'^n$ ist konvergent. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| \leq R'$ folgt damit für $N > N_\varepsilon$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|\, R'^n < \varepsilon.$$

(iv) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R$, und $R' \in (|z-z_0|, R)$ beliebig aber fest, dann folgt aus 1.21 die Stetigkeit von f auf

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| \leq R'\},$$

also insbesondere in z. «

1.28 **Satz** *Sei (a_n) reelle Folge, R wie in 1.27. Dann ist die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

für $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}. \quad \rtimes$$

» Da f für $|x| < R$ gleichmäßig konvergiert, kann man Summation und Differentiation vertauschen. Der Konvergenzradius der Ableitung stimmt mit dem von $f(x)$ überein, denn

$$\limsup \sqrt[n]{n(n-1)\dots(n-k+1)a_n} = \limsup \sqrt[n]{a_n},$$

da $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{n-1} \to 1$, usw.

Daraus folgt für $0 < R' < R$ gleichmäßige Konvergenz für jede Ableitung im Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$. «

2 Funktionentheorie

Die Funktionentheorie befasst sich mit komplexwertigen Funktionen komplexer Variablen,

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z).$$

Hier kommt es zu überraschenden Ergebnissen, denn man kann $\mathbb{C}$ zwar mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren und die mehrdimensionale Analysis für Abbildungen,

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \tilde{f}(x, y)$$

anwenden, da $\mathbb{C}$ jedoch ein Körper ist, haben wir viel mehr Struktur zur Verfügung. So existiert für komplexe Funktionen ein neuer Differenzierbarkeitsbegriff, die komplexe Differenzierbarkeit. Funktionen, die komplex differenzierbar sind, haben zahlreiche angenehmene Eigenschaften. Beispielsweise ist eine Funktion, die einmal komplex differenzierbar ist, auch unendlich oft komplex differenzierbar und sogar analytisch, also in eine Potenzreihe entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dies ist im Allgemeinen nicht einmal für reelle C^∞ Funktionen der Fall.

2-A Grundlangen

2.1 **Definition** *Die komplexen Zahlen bestehen aus der Menge*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

mit den Verknüpfungen

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad \rtimes$$

2.2 *Bemerkung.* (a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ lässt sich dieser jedoch nicht mehr anordnen, weshalb wir nicht mehr auf Eigenschaften wie Monotonie oder Trichotomie zurückgreifen können.

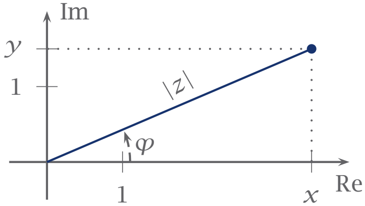
(b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, d.h. es gilt insbesondere

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$
$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

$\mathbb{R}$ kann also mit der Menge $\{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}$ identifiziert werden. In Zukunft schreiben wir $(a, 0) := a$.

(c) Setze $i := (0, 1)$ dann folgt $i^2 = (-1, 0) = -1$. Damit kann man $(a_1, a_2) = (a_1, 0) + i(a_2, 0)$ als $a_1 + ia_2$ schreiben.
Der Realteil einer komplexen Zahl ist definiert als $\mathrm{Re}(a_1, a_2) := a_1$. Analog dazu ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}(a_1, a_2) := a_2$ definiert. Beide sind reell.

(d) Gauß'sche Zahlenebene



⊸

$\mathbb{C}$ lässt sich zwar nicht anordnen, dennoch können wir einen Abstand definieren, sogar mehr, einen Absolutbetrag.

2.3 **Definition** (a) *Die Abbildung* $\overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$ *heißt komplexe Konjugation.*

(b) $|z| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ *heißt der Betrag von* $z = a_1 + ia_2$.

(c) *Für $z \neq 0$, lässt sich ein Argument definieren als $\arg(z) = \varphi$. Dabei ist φ eindeutig durch die Vereinbarung*

$$-\pi \leq \varphi < \pi, \quad \cos\varphi = \frac{a_1}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{a_2}{|z|}.$$

(d) *Die Darstellung $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r = |z|, \varphi = \arg(z)$ heißt Polardarstellung von z.* ⋊

Der Absolutbetrag von z ist eine Norm und induziert dadurch ebenfalls eine Metrik, wie der folgende Satz zeigt.

2.4 **Satz** *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(b) $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$.

(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. ⋊

» Folgt durch direktes Rechnen. «

Somit ist $(\mathbb{C}, +, \cdot, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper.

2.5 **Korollar** $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad (z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ *ist eine Metrik auf* $\mathbb{C}$. ⋊

Damit steht uns auf $\mathbb{C}$ ein Konvergenz- und ein Stetigkeitsbegriff zur Verfügung, die wir nun genauer untersuchen wollen.

2.6 **Satz** *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in \mathbb{C}$, dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in z_0, und falls $g(z_0) \neq 0$ ist auch f/g stetig in z_0.* ⋊

» Analog zum Beweis in $\mathbb{R}$. «

Wie wir im letzten Semester gesehen haben, sind die Funktionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ reell analytisch, ihre Taylorreihen konvergieren und stimmen mit den Funktionen überein. Mithilfe dieser Reihen, kann man nun e^x, $\sin x$ und $\cos x$ auch auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

2.7 Definition *Die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus sind auf $\mathbb{C}$ definiert als*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ob diese Reihen für irgendein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ konvergieren, ist dadurch noch nicht klar. Die Konvergenzkriterien für Potenzreihen geben aber Aufschluss.

2.8 Korollar (a) *e^z konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ und ist dort ebenfalls $\mathbb{C}$ stetig.*

(b) *$\sin z$ und $\cos z$ konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und sind dort ebenfalls stetig.*

(c) *Es gilt die Identität, $e^z e^w = e^{z+w}$.* $\rtimes$

» (a) Setzt man $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so ergibt sich

$$R := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty.$$

Nach Satz 1.27 ist damit $z \mapsto e^z$ stetig auf $\mathbb{C}$.

(b) Man kann die Potenzreihe von $\sin z$ schreiben als

$$\sin z = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z^2)^n$$

und dann die Folge betrachten

$$R := \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (2n+3)(2n+2) = \infty.$$

Also ist die Reihe konvergent für alle z^2 und damit auch für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) Mit Hilfe des Cauchyprodukts folgt,

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \overset{\text{CP}}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} \frac{z^l}{l!}\frac{w^{m-l}}{(m-l)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{l=0}^{m} \frac{z^l}{l!}\frac{w^{m-l}}{(m-l)!} m! = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} z^l w^{m-l}}_{\text{Binomischer Lehrsatz}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z+w)^m = e^{z+w}. \quad «
\end{aligned}$$

2.9 *Bemerkung.* Die Taylorreihen von $\sin z$, $\cos z$ und e^z stimmen für $z \in \mathbb{R}$ mit den hier betrachteten Funktionen überein. ⊸

2.10 **Korollar** (a) *$e^{iz} = \cos z + i \sin z$.*

(b) *Für die Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$ mit $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, gilt*

$$\begin{aligned}
z^n &= r^n e^{in\varphi}, \\
z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \quad \rtimes
\end{aligned}$$

Hier ist $\varphi_1 \pm \varphi_2$ so zu verstehen, dass das Ergebnis wieder aus $[-\pi, \pi)$ ist. $\rtimes$

» (a) Da e^z auf $\mathbb{C}$ absolut konvergent ist, erlaubt der Umordnungssatz die Aufspaltung in Summanden für gerade und ungerade Indizes,

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{k=0, n=2k}^{\infty} i^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0, n=2k+1}^{\infty} i^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z.
\end{aligned}$$

(b) Folgt durch direktes Rechnen. «

2.11 **Definition** (a) *Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma \in C^k([a,b] \to \mathbb{C})$ mit $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$, dann heißt γ eine C^k-Kurve von z_1 nach z_2.*

(b) *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma \in C^1([a,b] \to O)$, dann heißt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f \circ \gamma(t)\ \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

Integral über f längs γ. ⋊

2.12 *Bemerkungen* 1.) Die rechte Seite kann als Summe reeller Integrale verstanden werden

$$\int_a^b \mathrm{Re}\,(f \circ \gamma(t)\ \dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t\ + i \int_a^b \mathrm{Im}\,(f \circ \gamma(t)\ \dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t\,.$$

2.) Ist $\tilde\gamma$ eine andere Kurve mit folgenden Eigenschaften

a) $\tilde\gamma(s) = \gamma \circ \varphi(s)$, für $\tilde a \le s \le \tilde b$,

b) $\varphi \in C^1([\tilde a, \tilde b] \to [a,b])$ bijektiv,

c) $\varphi(\tilde a) = a,\ \varphi(\tilde b) = b$,

dann folgt aus der Substitutionsregel für relle Integrale mit $t = \varphi(s)$

$$\int_a^b f \circ \gamma(t)\ \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)=\tilde a}^{\varphi^{-1}(b)=\tilde b} f \circ \gamma \circ \varphi(s)\ \dot\gamma \circ \varphi(s)\ \dot\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} f \circ \tilde\gamma(s)\ \dot{\tilde\gamma}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

3.) Ist $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma(a+b-t)$, so gilt

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_a^b f \circ \gamma(a+b-t)\ \dot\gamma(a+b-t)\,\mathrm{d}t$$

Setze $s = a + b - t \Rightarrow \mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$, dann folgt

$$\ldots = \int_b^a f \circ \gamma(s)\dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f \circ \gamma(s)\dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

4.) Jede Kurve kann so parametrisiert werden, dass $a = 0,\ b = 1$.

5.) Ist γ stückweise C^1-Kurve und eine Teilung von $[a,b]$ gegeben mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, dann gilt

$$\gamma_j := \gamma\big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1([t_{j-1},t_j] \to \mathbb{C}),$$
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \quad \multimap$$

Bemerkung. Bei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ kann man die Differentiation des Real- und des Imaginärteils getrennt betrachten.

$$\dot\gamma(t) = (\operatorname{Re}\gamma(t))' + i\,(\operatorname{Im}\gamma(t))'\,. \quad \multimap$$

Vereinbarung Von nun an sei O stets eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen.

$$f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C},$$

bezeichnet, dass f von einer offenen Menge der komplexen Zahlen in die komplexen Zahlen abbildet.

2.13 **Bsp** Sei $\gamma : [a,b] \to O, f \in C(O \to \mathbb{C})$, so dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\circ\gamma(t)\ \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(a) $\gamma(t) = (1+i)t$ für $0 \le t \le 2$, und $f(z) = z^3$.

$$\int_\gamma z^3\,\mathrm{d}z = \int_0^2 ((1+i)t)^3(1+i)\,\mathrm{d}t = (1+i)^4\int_0^2 t^3\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{(1+i)^4}{4}t^4\big|_0^2 = (1+i)^4 4.$$

(b) $\gamma(t) = e^{it}$ für $0 \le t \le 2\pi$, und $f(z) = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$$\int_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i. \quad ■$$

Bemerkung. Die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \int_\gamma |f(z)|\ \mathrm{d}z\,,$$

ist im Allgemeinen falsch, sie gilt ja nicht einmal im reellen Fall, wenn $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, mit $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ streng monoton fallend. ⊸

2.14 **Satz** *Sei $\gamma \in C^1([a,b] \to O)$, $f \in C(O \to C)$, dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \int_a^b |f \circ \gamma(t)|\ |\dot{\gamma}(t)|\ \mathrm{d}t \le \max_{z \in \operatorname{im}\gamma} |f(z)| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\ \mathrm{d}t\,. \quad ⋊$$

» Für reelle Zahlen gilt $|r| = (\operatorname{sign} r) \cdot r$, wir multiplizieren die Zahl mit ihrem Vorzeichen. Für komplexe Zahlen können wir nicht nur zwischen $\pm$ unterscheiden, sondern zwischen jeder Richtung in der komplexe Zahlenebene. Den Betrag einer komplexen Zahl erhalten wir, indem wir die Zahl auf die reelle Achse drehen, ohne ihren Abstand zur 0 zu verändern:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| = e^{i\varphi} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

wobei wir $\varphi = -\arg \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ setzen.

Mit der Monotonie des reellen Integrals und dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= e^{i\varphi} \int_a^b f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi} f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)\right)}_{\le |f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)|}\ \mathrm{d}t + i \int_a^b \underbrace{\operatorname{Im}\left(e^{i\varphi} f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)\right)}_{=0}\ \mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b |f \circ \gamma(t)|\ |\dot{\gamma}(t)| \le \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\ \mathrm{d}t\,. \quad « \end{aligned}$$

2.15 **Definition** *Sei $\gamma \in C^1([a,b] \to O)$, dann ist die Länge von γ definiert als*

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t \,. \quad \rtimes$$

Damit kann man Satz 2.14 auch so formulieren

Satz *Sei $\gamma \in C^1([a,b] \to O)$, $f \in C(O \to \mathbb{C})$, dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \, L(\gamma). \quad \rtimes$$

2.16 **Bsp** Sei $\gamma(t) = e^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, dann gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left| \gamma\dot{(t)} \right| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left| ie^{it} \right| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(a)

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right| \leq \max_{|z|=1} \left| \frac{1}{z} \right| L(\gamma) = 2\pi.$$

(b)

$$\left| \int_\gamma z \, \mathrm{d}z \right| \leq \max_{|z|=1} |z| \; L(\gamma) = 2\pi.$$

Wir wissen aber bereits, dass $\int_\gamma z \, \mathrm{d}z = 0$. Die Abschätzung ist also oft sehr ungenau. ■

In der Funktionentheorie ist es oft geschickt, die Funktionen zu verschieben, zu dehnen oder zu stauchen. Dazu benötigen wir den Begriff der Homotopie.

2.17 **Definition** *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^k([0,1] \to O)$ ($k \geq 0$). Dann heißen γ_1, γ_2 C^k-homotop in O, falls es eine Abbildung $\phi \in C^k([0,1] \times [0,1] \to O)$ gibt mit $\phi(\cdot,0) = \gamma_1$ und $\phi(\cdot,1) = \gamma_2$, die einer der folgenden Eigenschaften genügt:*

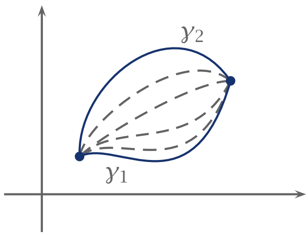
(a) *$\phi(0,s) = \phi(0,0)$, $\phi(1,s) = \phi(1,0)$ für $s \in [0,1]$, d.h. die "Zwischenkurven" $t \mapsto \phi(t,s)$ für festes s haben alle den selben Anfangs und Endpunkt $\phi(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\phi(1,s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.*

(b) *$\phi(0,s) = \phi(1,s)$ für alle $s \in [0,1]$, d.h. alle Kurven sind geschlossen.*

Homotop sein ist eine Äquivalenzrelation und wir schreiben $\gamma_1 \sim \gamma_2$. ϕ heißt Homotopie zwischen γ_1 und γ_2. Ein geschlossener Weg γ heißt C^k-nullhomotop, falls γ C^k-homotop zu einem konstanten Weg ist. $\rtimes$

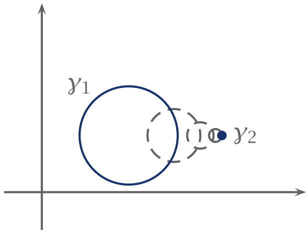
2.18 **Bsp** (a) Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in C([0,1] \to \mathbb{C})$, mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, dann ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$:

$$\phi(t,s) := (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t),$$
$$\phi(0,s) = (1-s)\gamma_1(0) + s\gamma_2(0) = \gamma_1(0) = \phi(0,0),$$
$$\phi(1,s) = (1-s)\gamma_1(1) + s\gamma_2(1) = \gamma_2(1) = \phi(1,0).$$

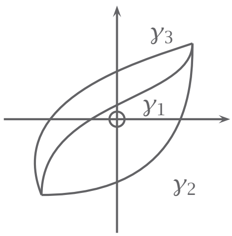


(b) Ist γ_1 geschlossen und befinden sich im Einschluss von γ_1 keine "Löcher", so ist γ_1 nullhomotop. Setze $\gamma_2(t) := z_0$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest und wähle ϕ wie in (a), dann gilt

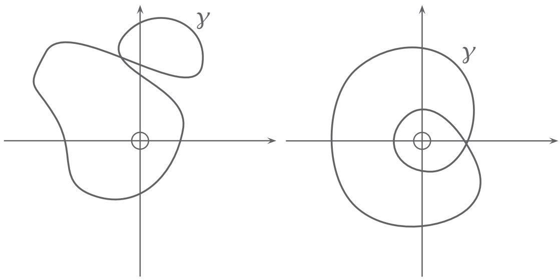
$$\phi \in C^1, \phi(\cdot,0) = \gamma_1, \phi(\cdot,1) = \gamma_2,$$
$$\phi(0,s) = (1-s)\gamma_1(0) + s\gamma_2(0) = (1-s)\gamma_1(1) + sz_0 = \phi(1,s).$$



(c) $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \nsim \gamma_2, \gamma_2 \nsim \gamma_3$.



(d) γ umläuft 0 einmal bzw. zweimal.



■

2.19 **Definition und Satz** *Sei $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(b) *$f'(z) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.*

(c) *Es existiert eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

$f'(z_0)$ heißt Ableitung von f in z_0. Ist f für jedes $z \in O$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf O. ⋊

2.20 **Satz** *Seien $f, g : O \to \mathbb{C}$ in z_0 differenzierbar, dann gilt in z_0.*

(a) *f, g sind stetig,*

(b) $(f + g)' = f' + g'$,

(c) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,

(d) *falls $g(z_0) \neq 0$ ist* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

(e) $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$. ⋊

» Die Beweise funktionieren analog zum reellen Fall. «

2.21 **Korollar** *Sei $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar.*

(a) *Ist $f(z)$ konstant, folgt $f'(z) = 0$.*

(b) *Sei $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$, dann ist $f'(z) = kz^{k-1}$.*

(c) *Polynome und gebrochenrationale Funktionen sind differenzierbar.* ⋊

2.22 **Satz** *Sei $F : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar in O, $\gamma \in C^1([a, b] \to O)$. Ist $F' = f$, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a).$$ ⋊

» Dies kann auf den Hauptsatz für reelle Funktionen zurückgeführt werden

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f\circ\gamma(t)\;\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \left[(\operatorname{Re} F\circ\gamma)'(t) + i(\operatorname{Im} F\circ\gamma)'(t)\right]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (\operatorname{Im} F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Wendet man nun den Hauptsatz an, ergibt sich

$$\begin{aligned}\ldots &= \operatorname{Re} F\circ\gamma(b) - \operatorname{Re} F\circ\gamma(a) + i\operatorname{Im} F\circ\gamma(b) - i\operatorname{Im} F\circ\gamma(a)\\ &= F\circ\gamma(b) - F\circ\gamma(a).\end{aligned}$$ «

2.23 **Korollar** (a) *Besitzt f eine Stammfunktion und ist γ geschlossen, dann gilt* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(b) *Die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-1}$ besitzt keine Stammfunktion.* ⋊

» (a) γ ist geschlossen, also ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ und damit gilt,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\circ\gamma(b) - F\circ\gamma(a) = 0.$$

(b) Die Kurve $\gamma : t \mapsto e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ ist geschlossen aber wir haben bereits gesehen, dass

$$\int_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0.$$

Die Funktion $\ln z$ mit $(\ln z)' = z^{-1}$ ist lediglich eine lokale Stammfunktion. Sie ist auf $\mathbb{C}$ nicht mehr eindeutig sondern besitzt verschiedene Zweige, die $2\pi i$ auseinanderliegen. «

2-B Holomorphie und Analytizität

2.24 *Vereinbarung* Zu $f : O \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$
\begin{aligned}
\tilde{O} &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in O \right\}, \\
(u, v) : \tilde{O} \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \\
&:= (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy)),
\end{aligned}
$$

wir interpretieren f also als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. ⊸

2.25 **Satz** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$, dann ist äquivalent:*

(i) f ist differenzierbar in O.

(ii) f ist stetig in O und für je zwei C^1 Kurven in O gilt

$$
\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.
$$

(iii) f ist stetig in O und für jede C^1-nullhomotope Kurve γ in O gilt,

$$
\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.
$$

(iv) Für jedes $z_0 \in O$ existiert ein $R > 0$ und eine Potenzreihe, so dass gilt

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,
$$

für $|z - z_0| < R$.

(v) f ist beliebig oft differenzierbar in O.

(vi) Die Abbildung (u, v) ist $C^1(\tilde{O} \to \mathbb{R}^2)$ und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

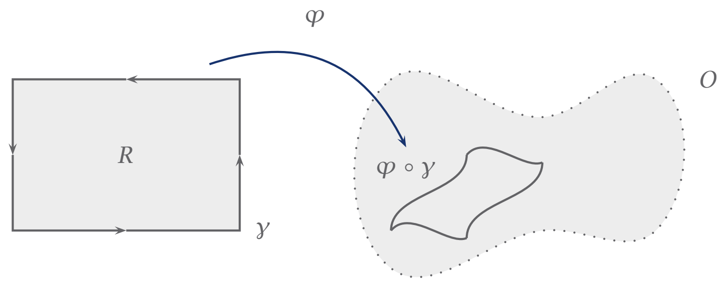
$$
u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \tilde{O}. \quad ⋊
$$

Der Beweis dieses Satzes wird sich über das ganze Kapitel erstrecken.

2.26 **Definition** *Erfüllt $f : O \to \mathbb{C}$ eine, und damit alle Bedingungen, aus Satz 2.25, so heißt f holomorph oder analytisch in O.*

2.27 **Cauchyscher Integralsatz für Bilder von Rechtecken** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, R eine achsenparallele, abgeschlossene Rechteckfläche in $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in C^1(R \to O)$ und γ eine geschlossene stückweise C^1 Randkurve von R, dann gilt*

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \quad \rtimes$$



» 1.) $\varphi \circ \gamma$ ist stückweise C^1 in O, also ist das das Integral $\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ definiert.

2.) R ist kompakt und $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi)^t$ stetig auf R. Daher nimmt $|\nabla\varphi|$ dort sein Maximum an, es existiert also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\left|\nabla\varphi(x,y)\right| \le \|\nabla\varphi\|_\infty =: C, \qquad \forall\ (x,y) \in R.$$

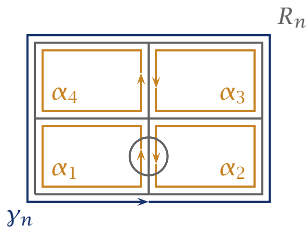
3.) Definiere eine Folge (R_n) von Rechtecken mit Randkurve γ_n. Dabei sei $R_0 := R$ und $\gamma_0 := \gamma$.

Teile R_n durch Seitenhalbierung in 4 Rechtecke, wobei $R_{n+1} :=$ dasjenige der 4, für das $\left|\int_{\varphi\circ\gamma_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ am größten ist.

Offensichtlich liegt R_{n+1} in R_n und es gilt

$$\int\limits_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\varphi\circ\alpha_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

da sich jeweils die überlagernden Kurvenstücke von α_j wegheben:



Es gilt damit

$$\left|\int\limits_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int\limits_{\varphi\circ\gamma_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

Per Induktion erhalten wir

$$\left|\int\limits_{\varphi\circ\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n\left|\int\limits_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

4.) Definiere eine Folge (x_n) mit $x_n :=$ Mittelpunkt von R_n, dann folgt

$$|x - x_n| \leq L(\gamma_n) = \frac{1}{2^n}L(\gamma_0),$$

für $x \in R_n$. Für $m \geq n$ und $x_m \in R_m$ gilt dann

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n}L(\gamma_0),$$

also ist (x_n) eine Cauchyfolge und damit konvergent gegen ein $y \in R_0$. Dabei ist insbesondere $|y - x_n| \leq \frac{1}{2^n}L(\gamma_0)$.

5.) Da φ stetig ist, gilt für $x_n \to y$ auch $\varphi(x_n) \to \varphi(y) := z_0 \in O$.
Sei $z \in \operatorname{im} \varphi \circ \gamma_n,\ z = \varphi(x),\ x \in R_n$, dann gilt nach dem Mittelwertsatz für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z - z_0)| = \left|\mathrm{Re}(\varphi(x)) - \mathrm{Re}(\varphi(y))\right| &\overset{\text{MWS}}{=} \|\nabla \,\mathrm{Re}\, \varphi(x)\| \left|x - y\right| \\ &\le C \cdot \left|x - y\right| \le CL(\gamma_n) \le \frac{C}{2^n} L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Analog folgt für den Imaginärteil $|\mathrm{Im}(z - z_0)| \le \frac{C}{2^n} L(\gamma_0)$, und damit gilt

$$|z - z_0| \le \sqrt{2} \frac{C}{2^n} L(\gamma_0).$$

6.) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, f ist differenzierbar, also gilt,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + r(z, z_0),$$

mit $\left| \frac{r(z,z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon$ für $0 < |z - z_0| < \delta$.

Für n hinreichend groß gilt

$$\begin{aligned} &|\varphi(x_n) - z_0| < \delta, \\ &|r(\varphi(x_n), z_0)| < \varepsilon\, |\varphi(x_n) - z_0| \le \varepsilon \sqrt{2} \frac{C}{2^n} L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) \,\mathrm{d}z \right| &\le \underbrace{\left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \,\mathrm{d}z \right|}_{=0, \text{ da Polynom}} + \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} r(z, z_0) \,\mathrm{d}z \right| \\ &\le \max |r(z, z_0)|\, L(\varphi \circ \gamma_n) \\ &\le \varepsilon \sqrt{2}\, \frac{C}{2^n} L(\gamma_0) \int_a^b \left| \nabla \varphi \circ \gamma_n(t) \right| \left| \dot{\gamma}_n(t) \right| \,\mathrm{d}t \\ &\le \varepsilon \sqrt{2}\, \frac{C}{2^n} L(\gamma_0)\, C \frac{L(\gamma_0)}{2^n} = \varepsilon \sqrt{2} \frac{C^2}{4^n} L^2(\gamma_0) = \frac{\varepsilon D}{4^n}. \end{aligned}$$

7.) Zusammen mit 3.) gilt somit für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int\limits_{\varphi \circ \gamma} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq 4^n \frac{\varepsilon}{4^n} D = \varepsilon D. \quad «$$

2.28 **Korollar** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, γ_1, γ_2 C^1-Kurven in O und $\gamma_1 \sim \gamma_2$, dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\, \mathrm{d}z\,. \quad \rtimes$$

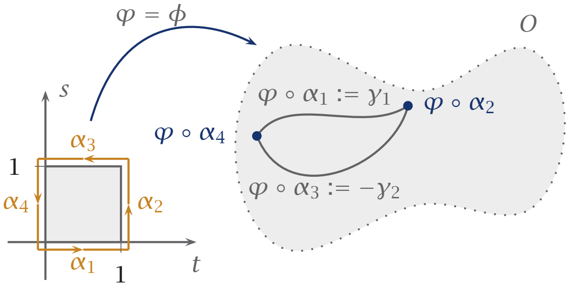
» Sei ϕ eine Homotopie zwishen γ_1 und γ_2. Setze $\varphi := \phi$ und $R = [0,1] \times [0,1]$. Wir müssen zwischen den zwei Definitionen einer Homotopie unterscheiden

Fall 1) $\phi(0,s) = \phi(0,0)$, $\phi(1,s) = \phi(1,0)$. Sei γ die Aneinanderknüpfung von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 (Skizze), setze,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \alpha_1(t) &:= \varphi(t,0) = \gamma_1(t), \\
\varphi \circ \alpha_2(t) &:= \varphi(1,0), \\
\varphi \circ \alpha_3(t) &:= \varphi(1-t,1) = -\gamma_2(t), \\
\varphi \circ \alpha_4(t) &:= \varphi(0,1) = \varphi(0,0),
\end{aligned}$$

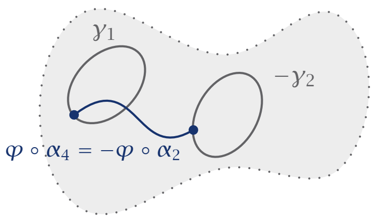
dann folgt mit 2.27,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\varphi \circ \gamma} f(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\varphi \circ \alpha_2} f(z)\, \mathrm{d}z}_{=0} + \int_{-\gamma_2} f(z)\, \mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\varphi \circ \alpha_4} f(z)\, \mathrm{d}z}_{=0} \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\, \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$



Fall 2) $\phi(0,s) = \phi(1,s)$, ebenso mit 2.27 folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi\circ\alpha_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi\circ\alpha_4} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$



«

» *Teilbeweis Satz 2.25* (i) ⇒ (ii): Folgt aus 2.28 da f stetig.
(ii) ⇒ (iii): Ist γ C^1-nullhomotop, dann ist $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ mit einer konstanten Kurve $\tilde{\gamma}$. Daraus folgt mit (ii), dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \quad «$$

2.29 **Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, sowie $z_0 \in O$, $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq O$. Dann gilt*

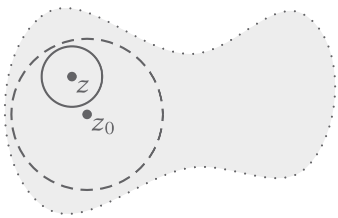
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta, \quad \text{für } |z - z_0| < r.$$

Ist f auf dem Kreisrand bekannt, so ist es damit im Kreisinneren eindeutig bestimmt.

Das Integral ist hierbei zu verstehen als Integral längs

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \; 0 \leq t \leq 2\pi. \quad ⋊$$

» Sei $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon\, e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, dann ist offensichtlich $\gamma \sim \gamma_\varepsilon$ in $O \setminus \{z\}$, und $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ differenzierbar in $O \setminus \{z\}$.



Aus (ii) folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \\
&= \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta + f(z) \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

Da f in z differenzierbar ist, ist $\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| < C$ für $|\zeta - z| < \varepsilon$ und damit ist

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \mathrm{d}\zeta \leq CL(\gamma_\varepsilon) = C2\pi\varepsilon.$$

Also gilt für $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = 0 + f(z) \int_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{1}{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i\, f(z). \quad «$$

2.30 **Potenzreihenentwicklungssatz** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$, dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ für } |z - z_0| < r. \quad \rtimes$$

» Aus Satz 2.29 folgt: Für $|z - z_0| < r$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \mathrm{d}\zeta, \end{aligned}$$

da $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ konvergiert die Reihe gleichmäßig bezüglich ζ auf dem Kreis.

$$\begin{aligned} \ldots &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta \,(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

für $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta$. «

2.31 **Korollar** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, sowie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die Potenzreihenentwicklung von f.

(a) *Für die Glieder der Potenzreihe gilt*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

(b) *Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe gilt*

$$R \geq \sup \left\{ r > 0 : \overline{K_r(w_0)} \subseteq O \right\}. \quad \rtimes$$

» (a) Da man im Konvergenzradius gliedweise differenzieren kann, folgt dies direkt indem man $z = z_0$ setzt.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \sup \left\{ r > 0 : \overline{K_r(z_0)} \subseteq O \right\}$, dann existiert ein $r > 0$, so dass $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$ und damit konvergiert die Potenzreihe im Punkt z. «

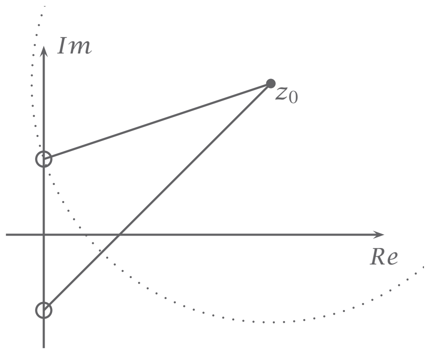
2.32 **Bsp** Sei $O = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ und

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z \in O.$$

Entwickelt man f um $z_0 \in O$ in eine Potenzreihe, folgt aus 2.31,

$$R \geq \min\{|z_0 - i|, |z_0 + i|\}.$$

Wegen $|f(z)| \to \infty$ für $z \to \pm i$ folgt sogar $R = \min\{|z_0 - i|, |z_0 + i|\}$.



Setzen wir beispielsweise $z_0 = 0$, ist die Potenzreihe von f gegeben durch,

$$f(z) = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n, \text{ für } |z| < R = 1,$$

was $R = \min\{|-i|, |i|\}$ bestätigt.

Setzen wir nun $z_0 = 2 + i$, erhalten wir

$$R = \min\{|2|, |2 + 2i|\} = 2,$$

was sich durch einfaches Nachrechnen bestätigen lässt. ■

2.33 **Definition** *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar ist, heißt ganze Funktion. Ist f ganz, dann gilt für beliebige $z_0 \in \mathbb{C}$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$ ⋊

» *Teilbeweis Satz 2.25* (i) ⇒ (iv): Siehe Satz 2.30.
(iv) ⇒ (v): Siehe Satz 2.34.
(v) ⇒ (i): trivial. «

2.34 **Satz** *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < R$ mit $R > 0$, dann ist f in $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ beliebig oft differenzierbar und*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}, \text{ für } |z - z_0| < R.$$ ⋊

» Für $k = 1$ (Rest folgt mit Induktion)

Die gliedweise Ableitung

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

hat denselben Konvergenzradius wie $f(z)$.

$s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n (z - z_0)^n$ ist ein Polynom und damit insbesondere differenzierbar, also gilt

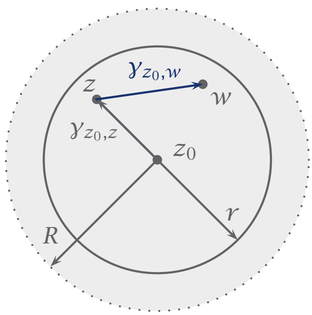
$$\int_\gamma s_k'(z)\,\mathrm{d}z = s_k(z_2) - s_k(z_1), \text{ für } \gamma \text{ Kurve in } O \text{ von } z_1 \text{ nach } z_2.$$

Daraus folgt $\int_\gamma s_k'(z)\,\mathrm{d}z$ ist unabhängig von der stückweisen C^1 Kurve γ. Für $z \in K_R(z_0)$ sei $\gamma_{z_0,z}$ beliebige stückweise C^1-Kurve von z_0 nach z, die ganz in $\overline{K_r(z_0)}$ verläuft für ein $r \in (0,R)$, damit folgt

$$\underbrace{s_k(z)}_{\to f(z)} = \underbrace{s_k(z_0)}_{\to f(z_0)} + \int_{\gamma_{z_0,z}} \underbrace{s_k'(\zeta)}_{\to g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \int_{\gamma_{z_0,z}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

unabhängig von γ.

Für $z, w \in K_R(z_0)$ wähle $\gamma_{z_0,z}, \gamma_{z_0,w}$ wie in Skizze,



dann gilt $f(w) - f(z) = \int_{\gamma_{z_0,w}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_{z,w}} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z)\right| &= \left|\frac{1}{w-z}\int_{\gamma_{z,w}} g(\zeta) - g(z)\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|w-z|}\max_{\zeta\in\gamma_{z,w}} |g(\zeta)-g(z)|\,L(\gamma_{z,w}) < \varepsilon,\end{aligned}$$

für $|w-z| < \delta$. Also ist f differenzierbar und $f'(z) = g(z)$. «

2.35 **Korollar** (a) $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, *insbesondere ist die Potenzreihe eindeutig.*

(b) *Cauchysche Koeffizientenformel,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

für jedes $r \in (0,R)$. ⋊

2.36 **Bsp** (a) $(e^z)' = e^z$.

(b) $(\cos z)' = -\sin z$.

(c) $(\sin z)' = \cos z$.

Insbesondere sind $e^z, \sin z, \cos z$ ganz. ■

2.37 **Cauchyabschätzung für Taylorkoeffizienten** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$, $|f(z)| \leq M$ für $|z - z_0| = r$ und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

für $|z - z_0| < r$, dann gilt

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = |a_n| \leq \frac{M}{r^n}. \quad \rtimes$$

» Hier können wir 2.31 verwenden,

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} L(\gamma) \leq \frac{M}{r^n}. \end{aligned}$$ «

2.38 **Satz von Liouvielle** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.* $\rtimes$

» Sei $|f(z)| \leq M$ für $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ für } z \in \mathbb{C},$$

dann folgt aus 2.37, dass $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r \geq 0$ mit $\overline{K_r(0)} \subseteq O = \mathbb{C}$. Da $r > 0$ beliebig war folgt,

$$|a_n| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{M}{r^n} = \begin{cases} M, & \text{für } n = 0, \\ 0, & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Also ist $f(z) = a_0$ für $z \in \mathbb{C}$. «

2.39 **Riemannscher Hebbarkeitssatz** *Sei $z_0 \in O$, $f : O \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner*

$$\exists\, M > 0\ \exists\, r > 0 : \left|f(z)\right| \leq M, \ \text{für}\ 0 < |z - z_0| < r.$$

Dann ist f in z_0 holomorph ergänzbar, d.h. es existiert ein $a \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} a, & z = z_0, \\ f(z), & \text{sonst}, \end{cases}$$

holomorph ist auf O. ⋊

» Setzen wir

$$g(z) := \begin{cases} 0, & \text{für } z = z_0, \\ (z - z_0)^2 f(z), & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann ist g differenzierbar für $z \neq z_0$ und für $z = z_0$. Damit folgt,

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z) \to 0 \text{ für } z \to z_0.$$

Insbesondere ist $g'(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ und g ist holomorph auf ganz O. Es existiert also ein $r > 0$, so dass die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

für $|z - z_0| < r$ konvergiert. f hat somit die Darstellung,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2},$$

für $0 < |z - z_0| < r$. Setzten wir nun,

$$a := \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = a_2,$$

können wir f in z_0 holomorph fortsetzen und erhalten,

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n$$

für $|z - z_0| < r$. «

Der Hebbarkeitssatz ist eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft von holomorphen Funktionen, in $\mathbb{R}$ ist eine solche Aussage nicht möglich. Die Forderung, dass $z_0 \in O$ liegt ist dabei nicht unerheblich, wie man sich leicht am Beispiel $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ überlegen kann.

2.40 **Bsp** Sei f holomorph in O, dann ist auch

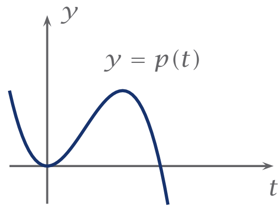
$$g(z) := \begin{cases} f'(z_0), & \text{für } z = z_0, \\ \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

holomorph in O. ■

2.41 **Hilfssatz** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ wie in (iii) gefordert. Ist $D \subseteq O$ abgeschlossene Dreiecksfläche mit geschlossener stückweiser C^1 Randkurve γ, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \quad ⋊$$

» (a) Sei $p(t) = 3t^2 - 2t^3$

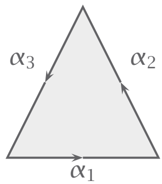


$$p(0) = 0, \qquad p(1) = 1,$$
$$p'(t) > 0, \qquad \text{für 0<t<1},$$

insbesondere ist $p : [0,1] \to [0,1]$ bijektiv mit $p'(0) = p'(1) = 0$.

(b) Nach Voraussetzung ist γ stückweise C^1. Wir können also γ nach eventueller Umparametrisierung wie folgt durch C^1 Kurven α_i beschreiben

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & 0 < t \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha_2(t), & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}, \\ \alpha_3(t), & \frac{2}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$



Da γ nur an endlich vielen Stellen nicht C^1 ist, kann γ durch eine geschickte Parametertransformation auf ganz D zu C^1 transformiert werden. Sei dazu $\beta_1(t) = \alpha_1\left(\frac{1}{3}p(3t)\right)$, dann folgt

$$\int\limits_{\beta_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} f\left(\alpha_1\left(\frac{1}{3}p(3t)\right)\right)\alpha_1'\left(\frac{1}{3}p(3t)\right)p'(3t)\,\mathrm{d}t\,,$$

Substituiere $s = \frac{1}{3}p(3t) \Rightarrow \mathrm{d}s = p'(3t)\,\mathrm{d}t$,

$$\ldots = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} f\left(\alpha_1(s)\right)\alpha_1'(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\alpha_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Das Gleiche gilt für

$$\beta_2(t) = \alpha_2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p(3t - \frac{1}{3})\right),$$
$$\beta_3(t) = \alpha_3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}p(3t - \frac{2}{3})\right),$$

damit erhalten wir

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \beta_1(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \beta_2(t), & \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3}, \\ \beta_3(t), & \frac{2}{3} < t \leq 1, \end{cases}$$

und damit ist $\tilde{\gamma}(t) \in C^1([0,1] \to O)$.

γ und $\tilde{\gamma}$ sind homotop, also folgt mit (iii)

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Um zu prüfen, ob $\tilde{\gamma}$ auch Nullhomotop ist, muss bei der Angabe der Homotopie darauf geachtet werden, dass die “Zwischenkurven” den Definitionsbereich D nicht verlassen. Wählen wir unsere Standardhomotopie,

$$\phi(t,s) = (1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\gamma(t),$$

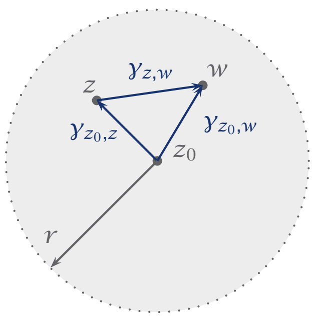
dann ist jedes $\phi(t,s) \in D$, da D konvex ist, also ist $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}(0)$. «

2.42 **Satz von Morera** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ stetig und für jede abgeschlossene Dreiecksfläche $D \subseteq O$ mit geschlossener stückweiser C^1-Randkurve γ sei*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

dann ist f differenzierbar in O. ⋊

» Sei $z_0 \in O$ und $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$. Wir müssen zeigen, dass f eine Stammfunktion F auf $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$ besitzt. Dann ist F differenzierbar und mit (v) beliebig oft differenzierbar. Also ist auch f differenzierbar und die Behauptung folgt.



Sei $\gamma_{z,w}(t) = z + t(w-z), 0 \le t \le 1$. Aus der Voraussetzung folgt

$$\int_{\gamma_{z_0,w}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Setze $F(z) := \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, dann ist

$$|F(w) - F(z)| = \left| \int_{\gamma_{z_0,w}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| = \left| \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right|.$$

Damit können wir den Differenzenquotienten abschätzen,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|w-z|} \left| \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta) - f(z)\,\mathrm{d}\zeta \right| \\ &\le \frac{1}{|w-z|} \max_{\zeta \in \operatorname{im} \gamma_{z,w}} |f(\zeta) - f(z)| \underbrace{L(\gamma_{z,w})}_{|w-z|} < \varepsilon, \end{aligned}$$

für $0 < |w-z| < \delta$, da f stetig ist. «

» *Teilbeweis* 2.25 (iii) $\Rightarrow$ (i): Die Voraussetzungen für den Satz von Morera sind erfüllt und damit folgt (i). «

2.43 *Bemerkungen* (a) Wie wir im Beweis von Satz 2.42 gesehen haben, hat eine Funktion $f : O \to \mathbb{C}$ genau dann eine Stammfunktion, wenn sie differenzierbar ist. Im reellen Fall war Stetigkeit bereits mehr als genug.

(b) Die Existenz einer lokalen Stammfunktion von f impliziert nicht die Existenz einer Stammfunktion auf ganz O ("globale Stammfunktion"). ⊸

Bsp $f(z) = z^{-1}$ auf $O = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph, besitzt aber keine Stammfunktion auf O. Später werden wir sehen, dass in der "geschlitzten" komplexen Ebene

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

$\ln z$ eine globale Stammfunktion von z^{-1} ist. ■

2.44 **Satz** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in O$, dann sind folgende Aussagen äquivalent* *(i)* f *ist differenzierbar in* z_0.

(ii) $(u, v) : \tilde{O} \to \mathbb{R}^2$ *ist in* (x_0, y_0) *differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in* (x_0, y_0)

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

Sind (i) und (ii) erfüllt, so gilt

$$u_x(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0),$$
$$v_y(x_0, y_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0). \quad \rtimes$$

» Sei f differenzierbar in z_0, dann gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

Dies ist äquivalent mit

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) + \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Re}(z - z_0) - \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Im}(z - z_0) + o(z - z_0),$$
$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0) + \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Re}(z - z_0) + \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Im}(z - z_0) - o(z - z_0),$$

als Vektoren geschrieben

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z_0) \\ \operatorname{Im} f(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$
$$+ o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \right),$$

oder äquivalent

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$
$$+ o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \right).$$

Aber dies ist gerade äquivalent mit (u, v) ist differenzierbar in (x_0, y_0) und die Jacobimatrix ist gegeben als

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \quad «$$

» *Restbeweis von 2.25* (vi) ⇒ (i) Siehe lezter Beweis,
(i) ⇒ (vi) Die Differenzierbarkeit von f impliziert die von (u, v) und da f' stetig ist, sind es auch u_x, u_y, v_x, v_y. «

2.45 **Bsp** Sei $f(z) = e^z$, dann ist $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$
$$v(x, y) = e^x \sin y,$$

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y$$
$$v_y = e^x \cos y, \qquad v_x = e^x \sin y.$$

Offensichtlich gilt hier Cauchy Riemann. ■

2.46 **Definition** (a) *$M \subseteq \mathbb{C}$ heißt (weg-)zusammenhängend, falls zu je zwei Elementen $z_1, z_2 \in M$ eine C^1 Kurve in M existiert, mit z_1 als Anfangs- und z_2 als Endpunkt.*

(b) *$G \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist.* ⋊

2.47 **Satz** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf G und $f' = 0$ auf G, dann ist f auf G konstant.* ⋊

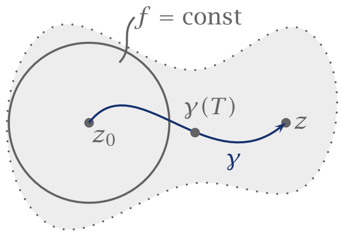
» Sei $z_0 \in G$. Zu $z \in G$ sei γ C^1 Kurve von z_0 nach z, dann gilt nach Voraussetzung,

$$0 = \int_\gamma f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(z) - f(z_0),$$

also ist $f(z) = f(z_0)$ für $z \in G$. «

2.48 **Satz** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G. Existiert ein $z_0 \in G$, so dass $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist f auf G konstant.* ⋊

» Erfülle $z_0 \in G$ die Voraussetzung. Zu $z \in G$ sei $\gamma \in C^1([0, 1] \to G)$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$.



1.) Nach Satz 2.25 hat f in z_0 postiven Konvergenzradius R, also gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = f(z_0), \tag{1}$$

für $|z - z_0| < R$.

Wählen wir nun $z \in G$ beliebig aber fest und $\gamma := \gamma_{z_0,z}$. Da γ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für $0 \le t \le \delta$ gilt $\left|\gamma(t) - z_0\right| < R$. Da f ebenfalls stetig ist, folgt $f \circ \gamma(t) = f(z_0)$ für $0 \le t \le \delta$.

2.) Sei $T := \sup \left\{t \in [0,1] : f \circ \gamma(\tau) = f(z_0),\ 0 \le \tau \le t\right\}$. Aus 1.) wissen wir, $T \ge \delta$.

3.) Ist $T = 1$, dann folgt $f(z) = \lim\limits_{t \to 1} f \circ \gamma(t) = f(z_0)$, also ist $f(z) = f(z_0)$ und wir sind fertig.

Nun müssen wir $T < 1$ zu einem Widerspruch führen.

Wir wissen bereits $f \circ \gamma(T) = f(z_0)$. Gilt nun $f^{(n)} \circ \gamma(t) = 0$ für $0 \le t \le T$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann liefert dasselbe Argument wie in 1.) ein $\delta > 0$ für das gilt

$$f \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(T) = f(z_0), \quad \text{für } T \le t \le T + \delta,$$

was ein Widerspruch zur Maximalität von T wäre, also kann T nicht kleiner 1 sein.

Wir zeigen nun $f^{(n)} \circ \gamma(t) = 0$ für $0 \le t \le T$ per Induktion.

Sei also $t_0 \in [0, T]$ beliebig.

Induktionsanfang: Sei $|\gamma(t) - z_0| < R$, dann ist $f' \circ \gamma(t) = 0$, da f auf $K_R(z_0)$ konstant ist.

Sei $|\gamma(t) - z_0| \geq R$. Da $t \mapsto |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ stetig ist und

$$|\gamma(0) - \gamma(t_0)| = |z_0 - \gamma(t_0)| \geq R \text{ sowie } |\gamma(t_0) - \gamma(t_0)| = 0,$$

können wir den Zwischenwertsatz anwenden und eine Folge (t_n) in $[0, t_0]$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren

$$|\gamma(t_n) - \gamma(t_0)| = \frac{R}{n} \begin{cases} \to 0, & \text{für } n \to \infty \\ \neq 0, & \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Da f differenzierbar ist, stimmen folgende Grenzwerte überein:

$$\begin{aligned} f' \circ \gamma(t_0) &= \lim_{z \to \gamma(t_0)} \frac{f(z) - f \circ \gamma(t_0)}{z - \gamma(t_0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f \circ \gamma(t_n) - f \circ \gamma(t_0)}{\gamma(t_n) - \gamma(t_0)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also ist $f' \circ \gamma(t_0) = 0$.

Induktionsschritt: Wir argumentieren genau wie im Induktionsanfang und ersetzten f durch $f^{(n)}$. Da f holomorph in G existiert der Differenzenquotient auch für $f^{(n)}$. «

2-C Nullstellen

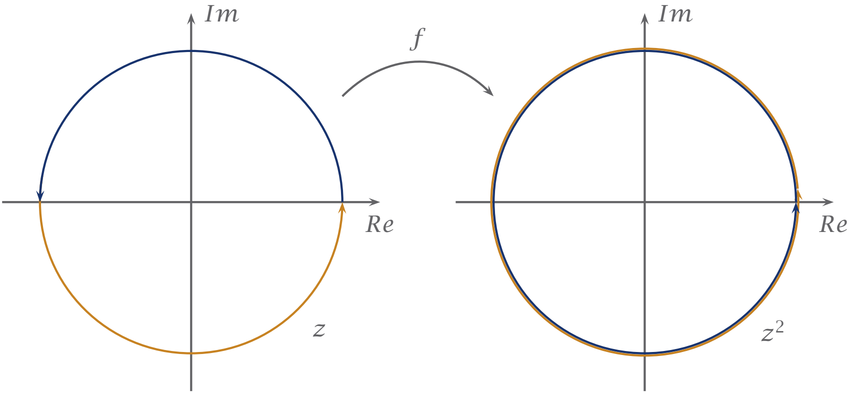
In diesem Abschnitt werden wir Nullstellen holomorpher Funktionen betrachten, die ebenfalls überraschende Eigenschaften haben. Ist nämlich z_0 Nullstelle der Ordnung K von $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$, so verhalten sich f und ihre “Umkehrfunktionen” lokal wie die Abbildungen $z \mapsto (z - z_0)^K$ und deren “Umkehrfunktionen”.

2.49 **Definition** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in O$, $f(z_0) = 0$. Existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, dann nennt man*

$$K = \min\left\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\right\},$$

die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle z_0 andernfalls heißt die Vielfachheit ∞. $\rtimes$

Betrachtet man $f : z \mapsto z^2,\ re^{i\varphi} \mapsto r^2 e^{2i\varphi}$,



dann ist z^2 offensichtlich nicht injektiv, denn zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es zwei Urbilder.

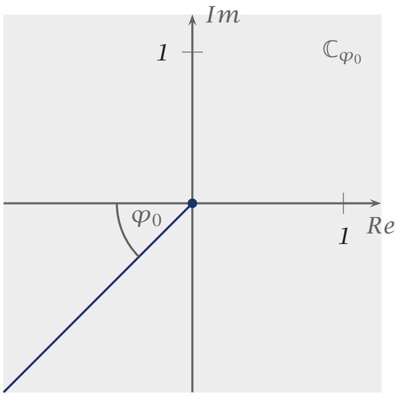
Durch Einführung der "Riemannschen Flächen" lässt sich dieses Problem umgehen. Dabei legt man zwei $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Ebenen übereinander, schneidet sie jeweils entlang der positiven reellen Halbachse auf, verklebt den Rand für $\operatorname{Im} z \uparrow 0$ der unteren Ebene mit dem Rand für $\operatorname{Im} z \downarrow 0$ der oberen Ebene und dann die anderen beiden Ränder miteinander.
Dies ist in unserer Vorstellung nur dann möglich, wenn sich die Ebenen durchdringen.

Betrachten wir f nun auf dieser Fläche, als

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \left\{ re^{i\varphi} : r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R},\ e^{i(\varphi+2\pi)} \neq e^{i\varphi},\ e^{i(\varphi+4\pi)} = e^{i\varphi} \right\},$$

dann ist f bijektiv und holomorph. Dabei ist es nicht von Bedeutung, entlang welcher Halbgeraden der Schnitt erfolgt ist. Für $z \mapsto z^2$ hat die Riemannsche Fläche 2 Blätter, für $z \mapsto z^n$ respektive n. Für den ln hat sie sogar unendlich viele Blätter.

2.50 **Hilfssatz** *Sei* $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $\mathbb{C}_{\varphi_0} = \left\{\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi_0 - \pi}\} : r \geq 0\right\}$.



$$\arg_{\varphi_0}(z) := \begin{cases} \arg(z), & \textit{für } -\pi + \varphi_0 < \arg z < \pi, \\ \arg(z) + 2\pi, & \textit{für } -\pi \leq \arg z < -\pi + \varphi_0, \end{cases}$$

dann ist $\arg_{\varphi_0} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \to (-\pi + \varphi_0, \pi + \varphi_0)$ *stetig und surjektiv.* ⋊

» $z \mapsto |z|$ ist stetig und daher ist

$$\arg_{\varphi_0}(z) = \begin{cases} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

mit geeigneter Addition von $\pm 2\pi$, ebenfalls stetig und surjektiv. «

2.51 **Satz** *Sei* $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, $k \in \mathbb{N}$ *und* $z^{1/k} = |z|^{1/k} e^{i 1/k \arg_{\varphi_0}(z)}$, *dann ist*

$$\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \to \mathbb{C},$$

holomorph, und es gilt

$$\left(\sqrt[k]{z}\right)^k = z, \ \left(\sqrt[k]{z}\right)' = \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{z}\right)^{k-1}}. \quad \rtimes$$

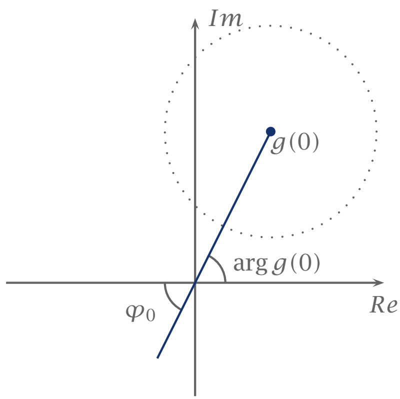
» (a) $\left(\sqrt[k]{z}\right)^k = |z|\, e^{i \arg_{\varphi_0}(z)} = z.$

(b) Seien $f(z) = z^k$, $g(z) = z^{1/k}$, dann ist $f(z)$ holomorph und $g(z)$ nach Satz 2.50 stetig. Offensichtlich ist $f \circ g(z) = z$ und damit gilt

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \neq z_0}} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \neq z_0}} \frac{1}{\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(g(z_0))} = \frac{1}{k g(z_0)^{k-1}} = \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{z_0}\right)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Andere Zweige sind $z^{1/k} = |z|^{1/k} e^{i 1/k (\arg_{\varphi_0}(z) + 2\pi n)}$, $n = 0, 1, \ldots, k-1$. «

2.52 **Satz** *Sei* $f : O \to \mathbb{C}$ *holomorph,* $z_0 \in O$ *Nullstelle der Ordnung* $k \in \mathbb{N}$*. Dann existiert ein* $r > 0$ *und eine holomorphe Funktion* $h : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ *mit* $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ *und* $f(z) = (h(z))^k$ *in* $K_r(z_0)$. $\rtimes$



» Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $z_0 = 0$. Da f holomorph, existiert ein $R > 0$, so dass gilt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \underbrace{\left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k}\right)}_{:=g(z)}, \quad \text{für } |z| < R.$$

Dann ist g holomorph auf $K_R(z_0)$ und $g(0) = a_k \neq 0$. Wähle $r > 0$ mit

$$|g(z) - g(0)| < \frac{|g(0)|}{2}, \quad \text{für } |z| < r,$$

dann ist $g(z) \in \mathbb{C}_{\varphi_0}$ mit $\varphi_0 = \arg(-g(0))$.

Sei $h(z) = \sqrt[k]{g(z)}z$, dann folgt

$$\begin{aligned} h(z)^k &= g(z)z^k = f(z), \\ h(0) &= 0 \\ h'(0) &= \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{g(0)}\right)^{k-1}} \cdot 0 + \sqrt[k]{g(0)} \cdot 1 \neq 0, \end{aligned}$$

und h ist, als Produkt und Verkettung holomorpher Funktionen, holomorph. «

2.53 **Bsp** Verschwindet die Ableitung einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nirgends, ist sie injektiv, bei Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt dies nicht mehr, denn für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$, ist $|f'(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$ aber f ist nicht injektiv, denn $e^{z+2\pi i} = e^z$. ■

2.54 **Satz** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in O$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert ein $r > 0$, so dass $f|_{K_r(z_0)}$ injektiv ist.*

In diesem Fall ist $f(K_r(z_0))$ offen, die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(K_r(z_0)) \to K_r(z_0)$ holomorph und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(w)}.$$

f^{-1} heißt lokale Umkehrfunktion. ⋊

» Löse die Gleichung $f(z) = w = w_1 + iw_2$ mit

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy),$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy),$$

was äquivalent zu folgender Vektorgleichung ist

$$\begin{pmatrix} g_1(x,y,w_1,w_2) \\ g_2(x,y,w_1,w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) - w_1 \\ v(x,y) - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $g_i \in C^1(\overline{K_r(z_0)} \to \mathbb{R})$ und

$$\begin{vmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f' & -\operatorname{Im} f' \\ \operatorname{Im} f' & \operatorname{Re} f' \end{vmatrix} = |f'|^2 \neq 0,$$

für $z = z_0$. Außerdem gilt

$$g_1(x_0, y_0, \operatorname{Re} f(z_0), \operatorname{Im} f(z_0)) = 0,$$
$$g_2(x_0, y_0, \operatorname{Re} f(z_0), \operatorname{Im} f(z_0)) = 0.$$

Nun können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden, der die Existenz eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ von $\big(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\big)$ und eine eindeutige Auflösung

$$x = \varphi_1(w_1,w_2),$$
$$y = \varphi_2(w_1,w_2),$$

mit $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1\left(\tilde{U} \to \mathbb{R}\right)$ liefert. Damit ist

$$g_i(\varphi_1(w_1,w_2), \varphi_2(w_1,w_2), w_1, w_2) = 0,$$

und f lokaler Diffeomorphismus in $\tilde{U}$.
Insbesondere gilt $f^{-1}(w) := \varphi_1(w_1,w_2) + i\varphi_2(w_1,w_2)$ ist Umkehrfunktion, f^{-1} ist stetig und f ist injektiv auf $f^{-1}\left(\left\{x+iy \,:\, (x,y) \in \tilde{U}\right\}\right)$.

(a) f ist stetig $\Rightarrow\ \exists\, r > 0 : K_r(z_0) \subseteq U = \left\{x+iy \,:\, (x,y) \in \hat{U}\right\}$, insbesondere ist $f|_{K_r(z_0)}$ injektiv.

(b) f^{-1} ist stetig $\Rightarrow$ Urbilder offener Mengen sind offen $\Rightarrow f(K_r(z_0)) =$ Urbild von $K_r(z_0)$ bezüglich f^{-1} ist offen.

(c) f^{-1} ist holomorph, denn

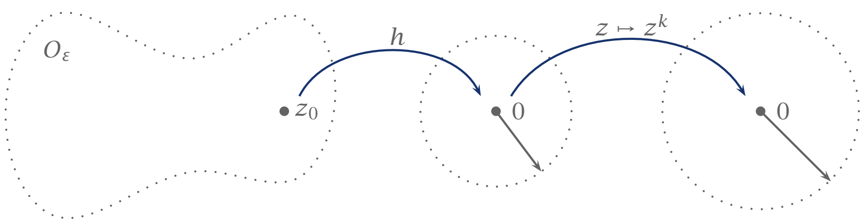
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{w\to w_0\\ w\neq w_0}} \frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0} &= \lim_{\substack{w\to w_0\\ w\neq w_0}} \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\\ &= \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.\end{aligned}$$ «

2.55 **Blätterzahl einer Nullstelle** *Sei $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in O$ eine k-fache Nullstelle. Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung $O_\varepsilon(z_0)$ mit $f(O_\varepsilon) = K_\varepsilon(0)$.*

$f|_{O_\varepsilon}$ nimmt jeden Wert w mit $0 < |w| < \varepsilon$ genau k-mal an, $w = 0$ genau einmal. ⋊

» Nach Satz 2.52 existiert ein $r > 0$, so dass $f(z) = (h(z))^k$ mit h holomorph auf $K_r(z_0)$ und $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$.

Satz 2.54: Wähle $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(0) \subseteq f(K_r(z_0))$ offen, dann ist $O_\varepsilon := f^{-1}(K_\varepsilon(0))$. «



2.56 **Korollar** *Nullstellen endlicher Ordnung sind isoliert.* ⋊

2.57 **Satz von der inversen Abbildung** *Seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O_1 \to O_2$ holomorph und bijektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für $z \in O_1$, f^{-1} ist holomorph auf O_2 und*

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(w)}. \quad \rtimes$$

» 1.) Wir zeigen $f' \neq 0$ mit einem Widerspruchsargument.

Angenommen $\exists\, z_0 \in O_1 : f'(z_0) = 0$. Betrachte $g(z) = f(z) - f(z_0)$, dann ist z_0 Nullstelle von g mindestens 2. Ordnung.

Fall a) Ordnung ist ∞, dann gibt es ein $r > 0 : g(z) = 0$ in $K_r(z_0)$, also $f(z) = f(z_0)$ für $|z - z_0| < r$ und f wäre nicht injektiv.

Fall b) Ordnung $k \geq 2$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $g|_{O_\varepsilon}$ jeden Wert w mit $0 < |w| < \varepsilon$ k-mal annimmt, dann ist aber $f(z) - f(z_0)$ nicht injektiv.

z_0 kann also keine Nullstelle von f' sein.

2.) Da f bijektiv ist, existiert ein $f^{-1} : O_2 \to O_1$. Der Rest folgt aus 2.54, indem man den Satz auf jeden Punkt in O_1 anwendet. «

2.58 **Identitätssatz** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f, g holomorph in G und (z_n) Folge in G mit $z_n \to z_0 \in G$, $z_n \neq z_0$, sowie $f(z_n) = g(z_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, dann ist $f = g$ auf G.* $\rtimes$

» Sei $h(z) = f(z) - g(z)$, dann folgt $h(z_0) = h(z_n) = 0$.

Fall a) z_0 ist Nullstelle von h mit endlicher Vielfachheit, dann ist z_0 isolierte Nullstelle $\lightning$, da $z_n \to z_0$.

Fall b) z_0 hat Vielfachheit ∞, dann ist h konstant, also $h(z) = h(z_0) = 0$. «

2.59 **Gebietstreue** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G. Ist f nicht konstant auf G, dann ist $f(G)$ Gebiet.* $\rtimes$

» 1.) $f(G)$ ist offen, denn sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$. Setze $g(z) = f(z) - f(z_0)$.

Fall a) z_0 ist Nullstelle der Ordnung ∞.

Dann ist $g = 0$ auf ganz G, also ist f konstant, ein Widerspruch.

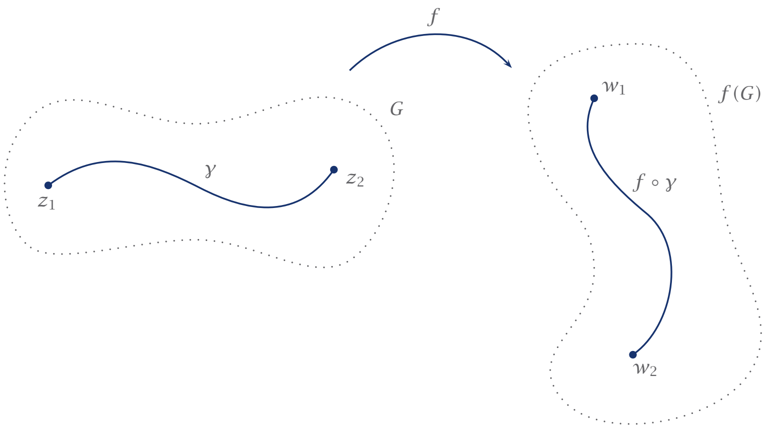
Fall b) z_0 ist Nullstelle der Ordnung $K \in \mathbb{N}$

Dann existiert ein $O_\varepsilon \subseteq G$ mit $g(O_\varepsilon) = K_\varepsilon(g(z_0)) = K_\varepsilon(0)$. Es gilt also

$$f(O_\varepsilon) = g(O_\varepsilon) + f(z_0) = K_\varepsilon(f(z_0)),$$

und damit enthält $f(G)$ mit $w_0 = f(z_0)$ auch eine offene Umgebung $K_\varepsilon(w_0)$.

2.) $f(G)$ ist zusammenhängend, denn seien $w_j = f(z_j) \in f(G)$ mit $j = 1, 2$, dann existiert eine C^1-Kurve γ von z_1 nach z_2 in G und damit ist auch $f \circ \gamma$ eine C^1-Kurve von $f(z_1) = w_1$ nach $f(z_2) = w_2$ in $f(G)$.



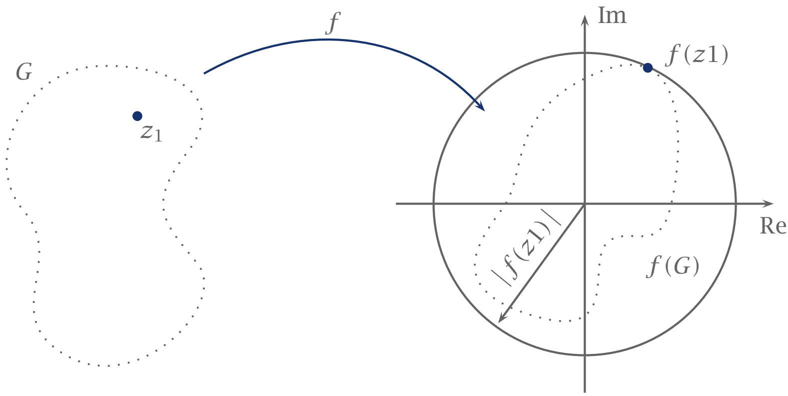
«

2.60 **Maximumsprinzip I** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G. f ist konstant auf G, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) $\exists\, z_1 \in G : \;\forall\, z \in G : |f(z)| \leq |f(z_1)|$,

(b) $\exists\, z_2 \in G : \;\forall\, z \in G : |f(z)| \geq |f(z_2)|$ *und* $f(z_2) \neq 0$. ⋊

» Angenommen es existiert ein $z_1 \in G$, so dass $\forall\ z \in G : |f(z)| \leq |f(z_1)|$. Ist f konstant, sind wir fertig, andernfalls ist $f(G)$ nach 2.59 offen. Aber $f(z_1)$ liegt auf dem Rand und kann daher kein innerer Punkt von $f(G)$ sein, also wäre $f(G)$ nicht offen und damit muss f konstant sein.



«

2.61 **Maximumsprinzip II** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G und $f \in C(\overline{G} \to \mathbb{C})$, dann nimmt $|f|$ das Maximum auf dem Rand an.*

$$\exists\ z_0 \in \partial G :\ \forall\ z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|,$$

Ist außerdem $|f| > 0$ auf G, so existiert auch ein $z_1 \in \partial G$ mit $|f(z)| \geq |f(z_1)|, \quad \forall\ z \in G$. ⋊

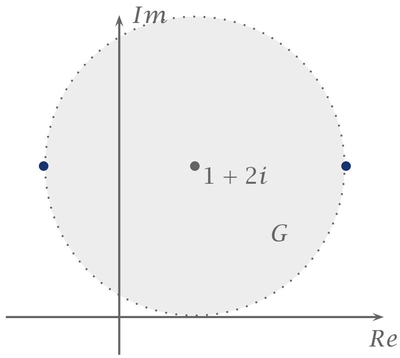
» $\overline{G}$ kompakt, also nimmt die reellwertige Funktion $|f(z)|$ ihr Minimum und Maximum an. Es gilt also

$$\exists\ z_1, z_2 \in \overline{G} :\ \forall\ z \in G : |f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|.$$

Ist $z_1 \in \partial G$, sind wir fertig, ist andererseits $z_1 \in G$, dann ist f auf G konstant und da f auf $\overline{G}$ stetig ist, ist f auch auf $\overline{G}$ konstant und man kann ein $\tilde{z}_1$ auf dem Rand ∂G wählen.

Analog verfährt man mit z_2. «

2.62 **Bsp** Sei $f(z) = e^z$ und $G = K_2(1+2i)$ das zu untersuchende Gebiet. Es gilt $\left|f(z)\right| = e^{\operatorname{Re} z}$, also ist $\left|f\right|$ maximal bei $3+2i$ und minimal bei $-1+2i$, also $e^{-1} \leq \left|f(z)\right| \leq e^3$.



2.63 **Bsp** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c\,|x - x_0|^4$.

Für $c > 0$ ist

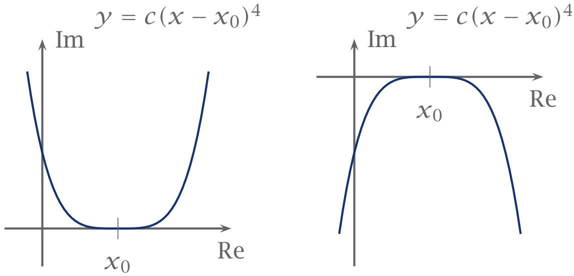
$$f_+ := f\big|_{[x_0,\infty)} \text{ injektiv und damit}$$

$$f_+^{-1} : [0,\infty) \to [x_0,\infty),\ y \mapsto \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{4}} + x_0.$$

Für $c < 0$ ist

$$f_- := f\big|_{(-\infty,x_0]} \text{ injektiv und damit}$$

$$f_-^{-1} : [0,\infty) \to (-\infty,x_0],\ y \mapsto x_0 - \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad ■$$



2.64 **Satz** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ und f reell analytisch in x_0, d.h.*

$$f(x) = y_0 + \sum_{n=K}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \text{für } |x - x_0| < r,$$

mit $r > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$, $a_K \neq 0$, $K \geq 1$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$f_+ := f\big|_{[x_0, x_0+\varepsilon]} \text{ und } f_- := f\big|_{[x_0-\varepsilon, x_0]},$$

injektiv und f_+^{-1}, f_-^{-1} als Puiseux-Reihen darstellbar sind,

$$f_\pm^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\pm \left| y - y_0 \right|^{1/K} \right)^n, \quad \text{für } y \in \begin{cases} f_+([x_0, x_0 + \varepsilon]), \\ f_-([x_0 - \varepsilon, x_0]), \end{cases}$$

mit geeignetem $b_n \in \mathbb{R}$ und $b_1 = \frac{1}{|a_K|^{1/K}} \neq 0$. ⋊

» Sei $g(z) := (\operatorname{sign} a_K) \left(\sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)$ für $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < r$, dann ist g holomorph in $K_r(x_0)$, $z = x_0$ ist Nullstelle der Ordnung K und

$$y_0 + (\operatorname{sign} a_K)\, g(x) = f(x), \quad x_0 - r < x < x_0 + r.$$

Nach Satz 2.52 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $g(z) = (h(z))^K$ für $|z - z_0| < \varepsilon$ und

$$h(z) = (z - x_0) \left(\underbrace{\sum_{n=K}^{\infty} (\operatorname{sign} a_K)\, a_K (z - x_0)^{n-K}}_{(\operatorname{sign} a_K) a_K = |a_K| > 0 \text{ für } z = x_0} \right)^{1/K},$$

wobei $(\cdot)^{1/K} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \to \mathbb{C}$. Daraus folgt

- $h'(x) \neq 0$ also folgt mit 2.54, dass $h|_{K_\varepsilon(x_0)}$ injektiv ist und damit h^{-1} holomorph.
- $h(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R} \cap K_\varepsilon(x_0)$.
- $h'(x_0) = 1 \cdot (a_K)^{1/K} + 0 = (a_K)^{1/K} > 0$.
- h ist in $\mathbb{R} \cap K_\varepsilon(x_0)$ streng monoton wachsend, also auch h^{-1}.
- $h^{-1}(z) = x_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.
- $b_1 = \frac{(h^{-1})'(0)}{1} = \frac{1}{h' \circ h^{-1}(0)} = \frac{1}{h'(x_0)} = \frac{1}{|a_K|^{1/K}}$.
- $b_n = \frac{\left(h^{-1}\right)^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{R}$, da $h^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

Die Gleichung $f(x) = y$ ist äquivalent zu

$$y - y_0 = (\operatorname{sign} a_K)\, g(x) = (\operatorname{sign} a_K)\, (h(x))^K \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{\operatorname{sign} a_K} = h(x)^K,$$

und da h streng monoton wächst, gilt für $x \geq x_0$, dass $h(x) \geq h(x_0)$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow h(x) = \left| \frac{y - y_0}{\operatorname{sign} a_K} \right|^{1/K} \\ &\Rightarrow x = h^{-1}\left(|y - y_0|^{1/K} \right) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, |y - y_0|^{1/K}, \end{aligned}$$

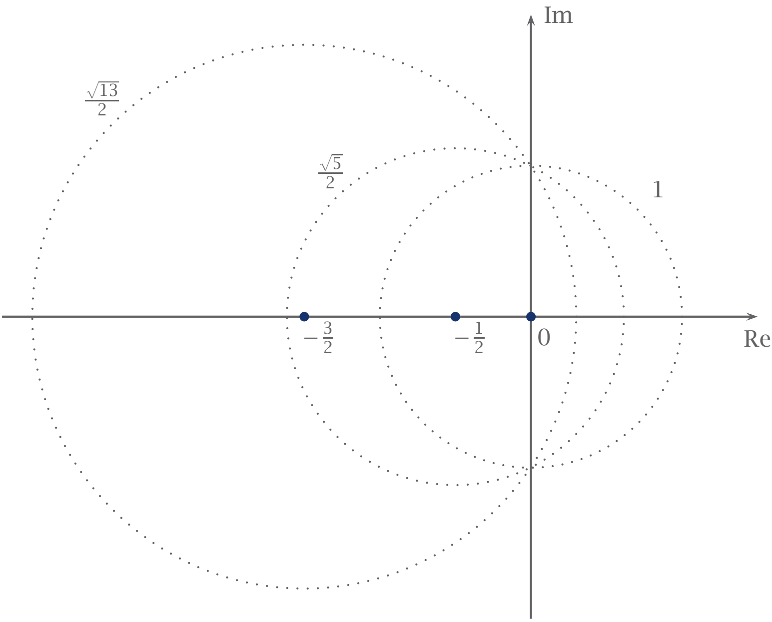
analog dazu gilt für $x \leq x_0$, dass $h(x) \leq h(x_0)$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow h(x) = -\left| \frac{y - y_0}{\operatorname{sign} a_K} \right|^{1/K} \\ &\Rightarrow x = h^{-1}\left(-|y - y_0|^{1/K} \right) = x_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, |y - y_0|^{1/K}. \quad « \end{aligned}$$

Mit der Funktionentheorie können also auch sehr elegant Sätze über reelle Funktionen bewiesen werden, obiger Beweis wäre ohne die hier entwickelte Theorie nur mit erheblichem Aufwand möglich.

2-D Analytische Fortsetzung

2.65 **Bsp** Die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$ ist holomorph in $K_1(0)$ mit $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.



Entwicklung von f um $z = -\frac{1}{2}$ in eine Potenzreihe ergibt

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z + \frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{in } K_{\sqrt{5}/2}\left(-\frac{1}{2}\right),$$

mit $f = f_1$ in $K_1(0) \cap K_{\sqrt{5}/2}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Entwicklung von f um $z = -\frac{3}{2}$ in eine Potenzreihe ergibt

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z + \frac{3}{2}\right)^n, \quad \text{in } K_{\sqrt{13}/2}\left(-\frac{3}{2}\right),$$

mit $f_1 = f_2$ in $K_{\sqrt{5}/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap K_{\sqrt{13}/2}\left(-\frac{3}{2}\right)$. ■

2.66 **Definition** *Ein Tupel* $(K_0, \dots, K_n) \equiv K$ *offener Kreisscheiben* $K_j = K_{r_j}(z_j)$ *heißt* *Kreiskette, falls*

$$z_j \in K_{j-1} \text{ und } z_{j-1} \in K_j, \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Gibt es holomorphe Funktionen $f_j : K_j \to \mathbb{C}$*, mit*

$$f_j|_{K_{j-1} \cap K_j} = f_{j-1}|_{K_{j-1} \cap K_j}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

so heißt f *analytisch fortsetzbar längs* K. f_n *heißt analytische Fortsetzung von* f_0 *längs* K. ⋊

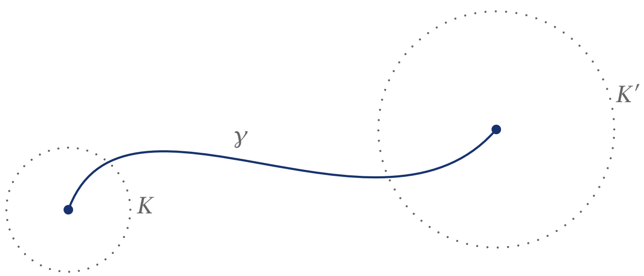
2.67 *Bemerkung.* Nach dem Identitätssatz ist f_n eindeutig und damit sind es auch auch $f_2, \dots, f_{n-1}$. ⊸

Nun stellt sich die Frage, ob für zwei Kreisketten $(K_0, \dots, K_n)$ und $(\tilde{K}_0, \dots, \tilde{K}_n)$ mit $K_0 = \tilde{K}_0$ und $K_n = \tilde{K}_n$ auch $f_n = \tilde{f}_n$ gilt. Wir werden sehen, dass dies im Allgemeinen falsch ist, wir jedoch mit zusätzlichen Einschränkungen die Gleichheit erzielen können.

2.68 **Definition** *Sei* $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$. *Eine Kreiskette* $K = (K_0, \dots, K_n)$ *verläuft längs* γ*, falls es eine Unterteilung* $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$ *gibt, so dass*

$$\gamma(\tau_j) = \text{Mittelpunkt von } K_j,$$
$$\gamma\left([\tau_{j-1}, \tau_j]\right) \subseteq K_{j-1} \cap K_j. \quad ⋊$$

2.69 **Satz** *Sei* $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$ *und* K*,* K' *offene Kreisscheiben um* $\gamma(t_0)$ *bzw.* $\gamma(t_1)$



Sei f holomorph in K und g, $\tilde{g}$ seien in K' holomorphe analytische Fortsetzungen von f längs Kreisketten, die längs γ verlaufen, dann gilt $g = \tilde{g}$. ⋊

» Sei $\tau_0 < \ldots < \tau_n$ die Unterteilung und $f_0, \ldots, f_n$ die Funktionen der ersten Kreiskette $K = (K_0, \ldots, K_n)$.

Für $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ sei

$$p_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - \gamma(t))^n, \quad \text{in } K_{r(t)}(\gamma(t)),$$

die Potenzreihenentwicklung von f_{j-1} um $\gamma(t)$. p_{τ_j} ist doppelt definiert, nämlich durch

$$\begin{aligned} p_{\tau_j} &= \text{Entwicklung von } f_{j-1} \text{ um } \gamma(\tau_j) \text{ und} \\ p_{\tau_j} &= \text{Entwicklung von } f_j \text{ um } \gamma(\tau_j). \end{aligned}$$

Die Definitionen stimmen aber überein, denn $f_j = f_{j-1}$ im $K_j \cap K_{j-1}$ und $\gamma(\tau_j) \in K_j \cap K_{j-1}$. Außerdem ist $p_{\tau_j}\big|_{K_j} = f_j$. Es gilt aber noch mehr, denn da γ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\gamma(t')$ in $K_{r(t)}(\gamma(t))$ liegt für $|t - t'| < \delta$. Man erhält somit $p_{t'}$ durch Entwicklung von p_t um $\gamma(t')$.

$$p_t = f_j, \quad \text{in } K_{j-1} \cap K_j \cap K_{r(t)}(\gamma(t)).$$

Der Identitätssatz besagt nun, dass diese Entwicklung mit unserer Definition von $p_{t'}$ übereinstimmt, denn $p_t = f_j$ in $K_j \cap K_{r(t)}(\gamma(t))$. Diese Argumentation kann man auch auf weitere Kreisscheiben fortsetzten, falls t' "zu weit" von t entfernt ist. In einer kleinen Umgebung vom t sind also alle Potenzreihen p_t identisch. (lokale Verträglichkeit)

Entsprechend erhält man $\tilde{p}_t$ für die andere Kreiskette.

Sei nun $M = \{t \in [t_0, t_1] : p_t = \tilde{p}_t\}$, dann folgt

- $M \neq \emptyset$, denn $[t_0, \min\{\tau_1, \tilde{\tau}_1\}] \subseteq M$.
- M ist relativ offen in $[t_0, t_1]$, denn falls $p_t = \tilde{p}_t$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $p_s = \tilde{p}_s$ für $t \leq s < t + \delta$.

- M ist abgeschlossen, denn sei t' ein Häufungspunkt von M, dann stimmen p_t und $\tilde{p}_t$ aufgrund der lokalen Verträglichkeit in jeder Umgebung von t' überein und aufrgund des Identitätssatzes dann auch in t'.

M ist also nichtleer und sowohl offen als auch abgeschlossen in der Spurtopologie bezüglich $[t_0, t_1]$. Nun ist $[t_0, t_1]$ zusammenhängend und daher gilt $M = [t_0, t_1]$. Damit ist $g = p_{t_1} = \tilde{p}_{t_1} = \tilde{g}$. «

2.70 **Definition** *Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$, K, K' offene Kreisscheiben um $\gamma(t_0)$ bzw. $\gamma(t_1)$, f holomorph in K, g holomorph in K'. Dann heißt g analytische Fortsetzung von f längs γ, falls es eine längs γ verlaufende Kreiskette gibt, so dass g analytische Fortsetzung von f längs dieser Kreiskette ist.* ⋊

2.71 **Bsp** Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ und

$$f(z) = |z|^{1/N} e^{i1/N \arg z}, \; z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$
$$\gamma(t) = e^{i2\pi t}, \; 0 \leq t \leq N.$$

Die Funktion

$$g : \left\{ re^{i\varphi} : r > 0, \; -\frac{\pi}{N} < \varphi < \frac{\pi}{N} \right\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \; z \mapsto z^N,$$

ist holomorph und bijektiv und damit ist auch f holomorph, denn $f = g^{-1}$.

Betrachten wir die Kreiskette $K_j = K_1\left(\gamma(\tau_j)\right)$ für $j = 0, \ldots, N$ und $\tau_j = \frac{j}{8}$, dann ist $f_0 = f_1 = f_2 = f$. Für f_3 setzten wir $\tilde{f}(z) := |z|^{1/N} e^{i\frac{1}{N}\arg_\pi(z)}$ mit

$$\arg_\pi = \begin{cases} \arg z, & \text{für } \arg z < \pi, \\ \arg z + 2\pi, & \text{für } -\pi \leq \arg z < 0, \end{cases}$$

dann ist $\tilde{f} = g^{-1}$ für $g : \left\{ re^{i\varphi} : r > 0, \; 0 < \varphi < 2\pi \right\} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto z^N$ holomorph und

$$f_3 = \tilde{f}|_{K_3}, \; f_4 = \tilde{f}|_{K_4}, \; f_5 = \tilde{f}|_{K_5}, \; f_6 = \tilde{f}|_{K_6},$$

Für f_7 muss beachtet werden, dass $\arg_\pi z$ stetig an f anschließt.

Für f_7 wählt man $\tilde{\tilde{f}} := f \cdot e^{i2\pi/N}$ und damit ist

$$f_7 = \tilde{\tilde{f}}|_{K_7}, \; f_8 = \tilde{\tilde{f}}|_{K_8}.$$

Nun ist $K_8 = K_0$ aber $f_8 = f \cdot e^{i2\pi/N} \neq f$. Nach N Umläufen stimmen die Funktionen auf den Kreisen wieder überein. ■

2.72 **Lemma** *Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$, f_1 analytische Fortsetzung von f_0 längs γ und $\varphi : [s_0, s_1] \to [t_0, t_1]$ stetig, streng monoton wachsend mit $\varphi(s_j) = t_j$. Dann ist f_1 auch analytische Fortsetzung von f_0 längs $\gamma \circ \varphi$. Insbesondere kann immer $s_0 = 0, s_1 = 1$ gewählt werden.*

» f_1 ist analytische Fortsetzung längs einer Kreiskette

$$K = (K_{r_0}(\gamma(\tau_1)), \dots, K_{r_n}(\gamma(\tau_n))).$$

K verläuft auch längs $\gamma \circ \varphi$ und daher ist

$$\sigma_j = \varphi^{-1}(\tau_j) \Rightarrow K = (K_{r_0}(\gamma \circ \varphi(\sigma_0)), \dots, K_{r_n}(\gamma \circ \varphi(\sigma_n))). \quad «$$

2.73 **Monodromiesatz** *Seien $\gamma, \tilde{\gamma} \in C([0,1] \to C)$ und $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ und $\phi \in C([0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C})$ eine stetige Homotopie zwischen γ und $\tilde{\gamma}$, d.h.*

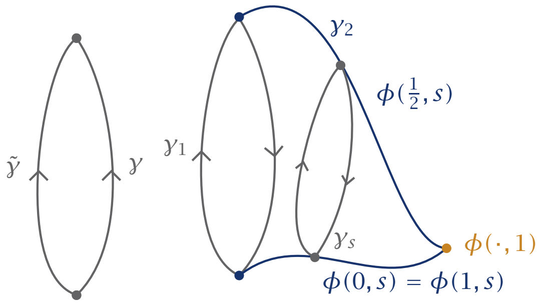
$$\phi(\cdot, 0) = \gamma, \; \phi(\cdot, 1) = \tilde{\gamma},$$
$$\phi(0, s) = \phi(0, 0), \; \phi(1, s) = \phi(1, 0), \; \textit{für } 0 \le s \le 1.$$

Ist f_0 holomorph in $K_r(\gamma(0))$ und lässt sich f_0 längs jedem Weg $\gamma_s := \phi(\cdot, s)$ für $0 \le s \le 1$ analytisch fortsetzen, so stimmen die Fortsetzungen längs γ und $\tilde{\gamma}$ überein. ⋊

» Ohne Beweis. «

2.74 **Definition** *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in G nullhomotop ist oder äquivalent, falls je zwei Kurven γ und $\tilde{\gamma}$ mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt homotop sind.* ⋊

Erläuterung. Die Äquivalenz der Definition kann man Anhand folgender Homotopie sehen:



Hierbei entspricht γ_1, zunächst γ vorwärts und dann $\tilde{\gamma}$ rückwärts durchlaufen.

Für die Konstruktion der Homotopie gehe zu festem s entlang $\phi(t, s)$ für $0 \leq t \leq s$, dann $\phi(s, t - s)$ für $s \leq t \leq s + \frac{1}{2}$, dann $\phi(2s + \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2})$ für $s + \frac{1}{2} \leq t \leq 2s + \frac{1}{2}$. Eventuell muss umparametrisiert werden, so dass t zwischen 0 und 1 läuft. ⊸

Bsp (a) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

(b) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist einfach zusammenhängend.

(c) Jede Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend. ■

2.75 **Korollar** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $K_r(z_0) \subseteq G$ und f_0 holomorph in $K_r(z_0)$, lässt sich f_0 längs jeder stetigen Kurve in G mit Anfangspunkt z_0 analytisch fortsetzen. Dann gibt es genau eine in G holomorphe Funktion f mit $f|_{K_r(z_0)} = f_0$.* ⋊

» *Eindeutigkeit.* Folgt aus dem Identitätssatz und $f|_{K_r(z_0)} = f_0$.

Existenz. Wähle zu jedem $z_1 \in G$ eine Kurve γ in G von z_0 nach z_1, dann ist f_0 längs γ analytisch fortsetzbar zu f_1 und f_1 ist holomorph in $K_{r_1}(z_1)$. Definiere $f(z_1) := f_1(z_1)$. Der Monodromiesatz besagt nun, dass $f_1(z_1)$ unabhängig von der Wahl der Kurve γ und damit f in jedem $z_1 \in G$ eindeutig definiert ist.

Nun ist noch zu zeigen, dass f holomorph ist. Sei $z_1 \in G$ fest und f_1, die soeben konstruierte Fortsetzung von f_0, holomorph in $K_{r_1}(z_1) \subseteq G$.

Zeige $f|_{K_{\frac{r_1}{3}}(z_1)} = f_1|_{K_{\frac{r_1}{3}}(z_1)}$, dann ist f holomorph in $K_{\frac{r_1}{3}}(z_1)$.

Sei $z \in K_{\frac{r_1}{3}}(z_1)$, dann ist γ_z stetige Kurve von z_0 nach z. Ergänze die Kreiskette längs γ durch $K_{\frac{2r_1}{3}}(z)$ zu Kreiskette längs γ_z.

Dann ist $f(z)$ analytische Fortsetzung von f_0 längs γ_z zu f_z und $f_z = f_1$ in $K_{\frac{2}{3}r_1}(z)$ und $f(z) = f_z(z) = f_1(z)$. «

2.78 **Bsp** Sei $f_0(z) = |z|^{\frac{1}{N}} e^{i\frac{1}{N}\arg z}$ in $K_1(2)$ und $G = \mathbb{C}_{\varphi_0} = \mathbb{C} \setminus \left\{re^{i(\varphi_0-\pi)} : r > 0\right\}$, dann ist $f(z) = |z|^{\frac{1}{N}} e^{i\frac{1}{N}\arg_{\varphi_0} z}$ in G.

Man nennt f einen Zweig der “mehrdeutigen” Umkehrfunktion f von $g(z) = z^N$. Weitere Zweige sind $f(z) = |z|^{\frac{1}{N}} e^{i\frac{1}{N}\arg_{\varphi_0} z + 2k\pi}$. ■

2-E Integrale längs geschlossener Kurven

2.79 **Bsp** Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < R$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ für $|z| < r$ mit $\frac{1}{r} < R$, dann gilt $h(z) = f(z) + g(\frac{1}{z})$ ist holomorph für $\frac{1}{r} < |z| < R$ mit

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n := \begin{cases} a_n, & n \geq 0, \\ b_{-n}, & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Form von Reihe nennt man “Laurent-Reihe”. ■

2.80 **Laurent-Entwicklung** *Sei $0 \leq r < R$ und $K_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und f holomorph in $K_{r,R}(z_0)$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \textit{für } r < |z - z_0| < R,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz, \ \textit{für } n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R,$$

Cauchy-Formel für Laurent Koeffizienten. ⋊

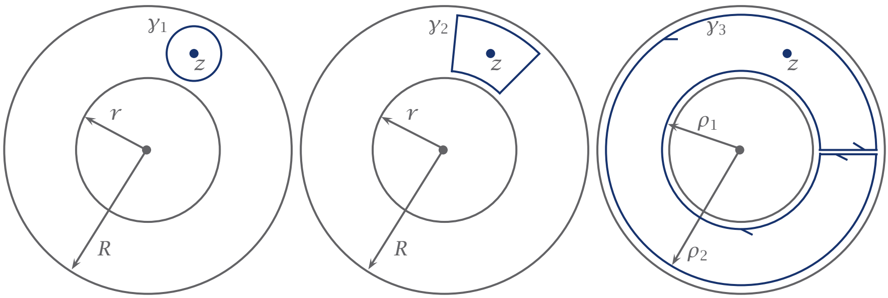
2.81 *Bemerkung.* 1.) $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ nennt man den Hauptteil, $N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

2.) $r = 0$ ist erlaubt. Dann hat f in z_0 eine isolierte Singularität. In diesem Fall konvergiert $H(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. $N(z)$ konvergiert immer in $K_R(z_0)$.

3.) Falls f holomorph in $K_R(z_0)$, gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z-z_0)^{-n-1}\,\mathrm{d}z = 0, \text{für } -n \in \mathbb{N}. \quad \multimap$$

» *Beweis Satz 2.80* Ohne Einschränkung können wir $z_0 = 0$ wählen. Sei $z \in K_{r,R}(0)$ fest, $\varepsilon = \min\left\{\frac{R-|z|}{2}, \frac{|z|-r}{2}\right\}$.



$\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma_3$ in $K_{r,R}(z_0) \setminus \{z\}$.

Aus dem Cauchy Integralsatz und der gleichmäßigen Konvergenz der geometrichen Reihe folgt,

$$
\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{-z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \mathrm{d}\zeta - \int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{z^{n+1}} \zeta^n\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta}_{:= a_n \text{ für } n \geq 0}\, z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{\int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta}_{:= a_n \text{ für } n < 0}\, z^n. \quad «
\end{aligned}
$$

2.82 **Definition** *1.) Sei f holomorph in O, dann hat f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus O$ eine isolierte Singularität, falls gilt $\exists\, R > 0 : K_{0,R}(z_0) \subseteq O$.*

2.) f habe in z_0 eine isolierte Singularität und sei als Laurent-Reihe darstellbar

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ in } K_{0,R}(z_0),
$$

dann unterscheiden wir drei Fälle

(i) Falls $a_n = 0$ für $n < 0$, heißt die Singularität hebbar (vgl. Riemannscher Hebbarkeitssatz).

(ii) Falls $\exists\, N \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0\ \forall\, n < N : a_n = 0$, heißt z_0 Polstelle von f. f hat in z_0 einen Pol der Ordnung m, falls $a_{-m} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ für $n > m$.

(iii) Falls $\forall\, N \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 : \exists\, n < N : a_n \neq 0$, hat f in z_0 eine wesentliche Singularität. ⋊

2.83 **Bsp** (a) Standardbeispiel für eine Funktion mit wesentlicher Singularität:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + H(z),$$

hat eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$.

(b) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit p, q Polynome hat isolierte Singularitäten in $z_1, \dots, z_n$, diese sind genau die Nullstellen von q.

Vereinfachungen:

$$\deg p < \deg q,$$
$$p(z_j) \neq 0, j = 1, \dots, n.$$

Partialbruchzerlegung. Sei m die Ordnung der Nullstelle z_1, dann gilt

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{(z - z_1)^j} + \underbrace{\frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)}}_{\text{holomorph in } K_\varepsilon(z_1)},$$

mit $\tilde{p}, \tilde{q}$ Polynome und $q(z) = (z - z_1)^m \tilde{q}(z), \tilde{q}(z_1) \neq 0$ und $\deg \tilde{p} < \deg \tilde{q}$.

Der zweite Summand $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ ist holomorph und Nebenteil der Laurentreihe, der erste Summand ist Hauptteil und endlich. f hat also an der Stelle z_1 einen Pol der Ordnung m. ■

2.84 **Korollar** *$f : O \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ hat genau dann einen Pol der Ordnung m in z_0, falls*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}}_{:= g(z)},$$

und $a_{-m} \neq 0$. Also eine in O holomorphe Abbildung g existiert, mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}. \quad \rtimes$$

Satz von Casorati-Weierstraß *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f, dann liegt für jedes $\varepsilon > 0$ das Bild $f(K_\varepsilon(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$.* ⋊

2.85 **Definition** *Sei γ geschlossene C^1-Kurve in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$, dann heißt*

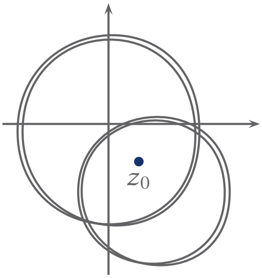
$$\nu(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z\,,$$

die Umlaufzahl von γ um z_0. ⋊

2.86 **Bsp** (a) Sei $\gamma_N : [0, N] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i2\pi t}$ und $\tilde{\gamma}_N \sim \gamma_N$, dann gilt

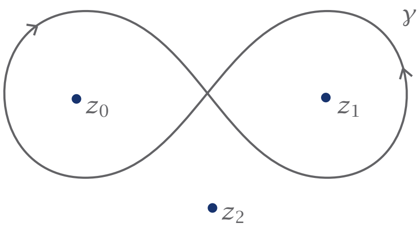
$$\int_{\gamma_N} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}_N} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = 2\pi i N,$$

also ist $\nu(\gamma_N, z_0) = N$.



Für $|z_0| > 1$ gilt $\nu(\gamma_N, z_0) = 0$, denn γ_N ist Nullhomotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

(b) Einfach getwistete Kreislinie:



$$\nu(\gamma, z_j) = \begin{cases} -1, & z_0, \\ 1, & z_1, \\ 0, & z_2. \end{cases} \quad ■$$

2.87 *Bemerkung.* Die Umlaufzahl $\nu(\gamma, z_0)$ ist eine ganze Zahl (Ohne Beweis). Sind γ und $\tilde{\gamma}$ homotope Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, dann ist auch $\nu(\gamma, z_0) = \nu(\tilde{\gamma}, z_0)$. ⊸

2.88 **Satz** *Sei* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *in* $K_{0,R}(z_0)$ *und* γ *geschlossene* C^1*-Kurve in* $K_{0,R}(z_0)$*, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1} \nu(\gamma, z_0). \quad ⋊$$

» Sei $g(z) = f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, dann hat g folgende Stammfunktion in $K_{0,R}(z_0)$

$$G(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1},$$

und es gilt

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = 0,$$

da γ geschlossen und damit folgt,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 0 + a_{-1} 2\pi i \nu(\gamma, z_0). \quad «$$

2.89 **Definition** *Sei* f *holomorph in* O *mit isolierter Singularität in* z_0 *und* γ *Kurve in* O *mit* $\nu(\gamma, z_0) \neq 0$*, dann heißt*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right) \frac{1}{2\pi i \nu(\gamma, z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

das Residuum von f *in* z_0. ⋊

2.90 **Bsp** (a) Sei

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!},$$

dann ist $\operatorname{Res}(f,0) = 1$.

(b) Sei $g(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, dann ist $\operatorname{Res}(g,0) = -\frac{1}{6}$.

(c) Sei $h(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-2n}$, dann ist $\operatorname{Res}(h,0) = 0$. ■

2.91 **Residuensatz** *Sei $f : O \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph und jedes $s \in S$ sei eine isolierte Singularität von f. γ sei C^1 nullhomotop in O und* $\operatorname{im} \gamma \cap S = \emptyset$*, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{z \in S} 2\pi i \operatorname{Res}(f,z) \nu(\gamma, z). \quad \rtimes$$

» 1.) Sei ϕ eine C^1 Homotopie zwischen γ und einer konstanten Kurve.

Die Funktion $g(z) = \frac{1}{z - z_0}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $\operatorname{im} \phi \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, also ist γ C^1 nullhomotop und mit 2.25 folgt, dass

$$\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \nu(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

2.) Behauptung: die Summe im Residuensatz ist endlich.

(a) Für alle hebbaren Singularitäten $z \in S$ gilt $\operatorname{Res}(f,z) = 0$.

(b) Angenommen, es gibt eine Folge (z_n) von Polen bzw. wesentlichen Singularitäten von f mit $\nu(\gamma, z) \neq 0$ und $z_n \neq z_m$ für $m \neq n$.

Da $\nu(\gamma, z_n) \neq 0$, ist $z_n \in \operatorname{im} \phi$ und $\operatorname{im} \phi = \phi([0,1] \times [0,1])$ ist kompakt. Daher hat z_n eine konvergente Teilfolge $z_{n_k} \to \zeta \in \operatorname{im} \phi$.

Die z_{n_k} sind nicht hebbare Singularitäten von f, also gilt

$$\forall\ k \in \mathbb{N} :\ \exists\ \zeta_k \in O : |\zeta_k - z_{n_k}| < \frac{1}{k} \text{ und } |f(\zeta_k)| > k,$$

denn ist z_{n_k} ein Pol so, gilt $|f(z)| = \left|\frac{g(z)}{(z-z_{n_k})^n}\right| \to \infty$ für $z \to z_{n_k}$ und ist z_{n_k} wesentlich, können wir den Satz von Casorati Weierstraß anwenden und $f(K_{\frac{1}{k}}(z_{n_k}))$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Nun gilt $\zeta_k \to \zeta$ und $f(\zeta_k) \to \infty$, also ist f nicht holomorph in ζ.

Also ist ζ eine nicht hebbare Singularitätsstelle aber $z_{n_k} \to \zeta$ ist ein Widerspruch, da ζ nach Voraussetzung eine isolierte Singularitätsstelle von f sein müsste.

Eine solche Folge z_n kann somit nicht existieren und daher gilt,

$$\text{card}\,\{z \in S : \text{Res}(f,z) \cdot \nu(\gamma,z) \neq 0\} < \infty.$$

3.) Aus 1.) und 2.) folgt, dass $\{z \in S : \text{Res}(f,z)\nu(\gamma,z) \neq 0\} = \{z_1,\ldots,z_M\}$, mit $M \in \mathbb{N}$. Setzt man

$$H(z_j,z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z_j)(z-z_j)^n, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\{z_j\},$$

und $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{M} H(z_j,z)$, dann ist der Riemannsche Hebbarkeitssatz auf g anwendbar und g ist holomorph in im ϕ.

Da γ nullhomotop ist, folgt $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$ und damit ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{M}\int_\gamma H(z_j,z)\,\mathrm{d}z \\ &= 0 + \sum_{j=1}^{M} 2\pi i\, a_{-1}\, \nu(\gamma,z_j). \quad \text{«}\end{aligned}$$

2.92 **Residuenberechnung** *1.) $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hat eine Polstelle der Ordnung k bei z_0.*

(a) Ist $k = 1$, dann ist

$$(z-z_0)f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

(b) Ist $1 < k \in \mathbb{N}$*, dann ist*

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}(z-z_0)^k f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \frac{(n+k)!}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}$$

$$\overset{z\to z_0}{\to} a_{-1}(-1+k)(-1+(k-1))\cdots(1) = a_{-1}(k-1)!$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z)\Big)$$
$$= \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z)\Big) \Big|_{z=z_0}.$$

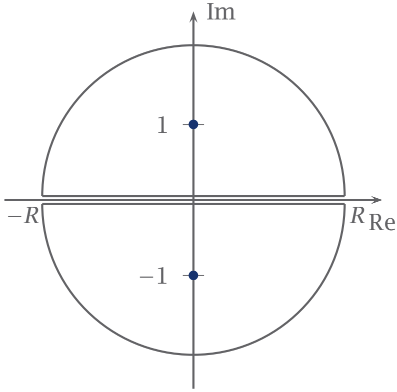
2.) Falls $f = \frac{g}{h}$ *mit* g, h *holomorph in* z_0 *und* $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ *und* $g(z_0) \neq 0$*, dann ist*

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}, & \textit{für } z \neq z_0, \\ h'(z_0) \neq 0, & \textit{für } z = z_0, \end{cases}$$

holomorph in z_0 *und damit hat* $f(z) = \frac{1}{z-z_0}\frac{g(z)}{\varphi(z)}$ *einen Pol 1. Ordnung in* z_0 *und es gilt* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

2.93 **Bsp** 1.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ dann ist

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{e^{ii}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i},$$
$$\mathrm{Res}(f, -i) = \frac{e^{-ii}}{-2i} = -\frac{e}{2i}.$$



$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,i)\underbrace{\nu(\gamma_1,i)}_{=1}+\operatorname{Res}(f,-i)\underbrace{\nu(\gamma_1,-i)}_{=0}\right)\\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = \frac{\pi}{e}.\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi e.$$

2.) Mit Hilfe der Funktionentheorie lassen sich auch elegant reelle uneigentliche Integrale berechnen.

Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Sei nun

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(f(x+i\cdot 0)) = \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}.$$

Tipp: Die Funktion e^{iz} ist in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ beschränkt, deshalb wählt man γ_1 in der oberen Halbebenen.

$z_0 = i$ ist Polstelle 2. Ordnung, für das Residuum gilt also:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} \\
&= \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} = \frac{e^{iz}(i(z+i)-2)}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} \\
&= -\frac{4e^{-1}}{-8i} = \frac{1}{2ie}.
\end{aligned}$$

Das Integral über γ hat also den Wert

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)\nu(\gamma,i), = 2\pi i \frac{1}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

Den Wert des Kurvenstücks in der oberen Halbebenen ($\operatorname{Im} z > 0$) können wir für $R \to \infty$ wie folgt abschätzen,

$$|f(z)| = \frac{\left|e^{iz}\right|}{|1+z^2|^2} = \frac{|e^{-\operatorname{Im} z}|}{|1+z^2|^2} \le \frac{1}{|1+z^2|^2} \le \frac{1}{(|z|^2-1)^2},$$

also ist

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le L(\gamma)\max_\gamma |f| \le \pi R \frac{1}{(R^2-1)^2} \to 0.$$

Der Grenzwert des Integral ist also

$$\pi e^{-1} = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to 0} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Bildet man den Realteil, erhält man das reelle Integral,

$$\pi e^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x. \quad ■$$

2.94 **Definition** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Eine geschlossene C^1-Kurve γ berandet G, falls*

$$\nu(\gamma,z) = \begin{cases} 1, & z \in G, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}. \end{cases} \quad \rtimes$$

2.95 **Bsp** $G = K_1(0)$, $\gamma_n(t) = e^{i2\pi nt}$ für $0 \le t \le 1$ und $n \in \mathbb{Z}$.

γ_1 berandet G.

γ_n für $n \neq 1$ berandet G nicht, auch nicht für $n = -1$. ■

2.96 **Definition** *Ist f in O bis auf Pole holomorph, so heißt f meromorph.* ⋊

2.97 **Null- und Polstellen Zählen I** *Sei f meromorph in O und $G \subseteq O$ Gebiet, f nicht konstant Null auf G, γ eine C^1 Kurve in O, die G berandet und γ geht durch keine Null- oder Polstellen, dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N_G - P_G,$$

wobei N_G die Anzahl der Nullstellen in G und P_G die Anzahl der Polstellen in G jeweils mit Vielfachheit gezählt ist. ⋊

» Sei S die Menge der Null- und Polstellen von f, dann besteht S nur aus isolierten Punkten (vgl. 2.56).

$\frac{f'}{f}$ ist holomorph in $O \setminus S$ und daraus folgt mit dem Residuensatz, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{z \in S} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right) \nu(\gamma, z) = \sum_{z \in S} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right).$$

Behauptung: $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right) = \begin{cases} k, & \text{falls } z_0 \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle,} \\ -k, & \text{falls } z_0 \text{ eine } k\text{-fache Polstelle.} \end{cases}$

Sei nun $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z)$. Ist $k \in \mathbb{N}$, dann ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung k, ist $-k \in \mathbb{N}$, dann ist z_0 eine Polstelle der Ordnung k.

Insbesondere ist g holomorph in z_0 und $g(z_0) \neq 0$, also gilt

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)}{(z - z_0)^k g(z)} \\ &= \frac{k g(z)}{(z - z_0) g(z)} + \frac{(z - z_0) g'(z)}{(z - z_0) g(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Also ist z_0 ein Pol 1. Ordnung von $\frac{f'}{f}$ und es gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0}\left((z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$$

$$= k = \begin{cases} \text{Ordnung der Nullstelle, falls } z_0 \text{ Nullstelle,} \\ \text{-Ordnung des Pols, falls } z_0 \text{ Polstelle.} \end{cases} \quad «$$

2.98 **Bsp**

$$f(z) = \frac{(z-2)(z-3)}{(z-1)^2},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} -2, & j = 1 \\ 1, & j = 2, 3 \\ 0, & j = 4. \end{cases} \quad ■$$

2.99 **Null- und Polstellen Zählen II** *Seien die Voraussetzungen wie in 2.97, dann gilt* $N_G - P_G = \nu(f \circ \gamma, 0)$. ⋊

»

$$2\pi i(N_G - P_G) = \int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1}\frac{f' \circ \gamma(t)}{f \circ \gamma(t)}\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{f \circ \gamma(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{f \circ \gamma}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \nu(f \circ \gamma, 0)2\pi i. \quad «$$

2.100 **Satz von Rouché** *Seien f, g holomorph in O und $G \subseteq O$ Gebiet berandet von einer C^1-Kurve γ in O, so dass*

$$|g(z)| < |f(z)|, \text{ für } z \in \operatorname{im}\gamma,$$

dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen in G. ⋊

» Aus 2.99 folgt, dass

$$N_G(f) = \nu(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f \circ \gamma}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$N_G(f+g) = \nu((f+g) \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(f+g) \circ \gamma}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Zeige, dass $f \circ \gamma \sim (f+g) \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
\phi(t,s) &:= (f \circ \gamma)(t) + s(g \circ \gamma)(t) \\
\phi(t,0) &= (f \circ \gamma)(t), \\
\phi(t,1) &= ((f+g) \circ \gamma)(t), \\
|\phi(t,s)| &= |f \circ \gamma(t) + sg \circ \gamma(t)| \\
&\geq |f \circ \gamma(t)| - s\,|g \circ \gamma(t)| \geq |f \circ \gamma(t)| - |g \circ \gamma(t)| > 0.
\end{aligned}$$

Also ist $f \circ \gamma \sim (f+g) \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. «

2.101 **Fundamentalsatz der Algebra** *Sei $p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ und $a_j \in \mathbb{C}$, dann hat p in $\mathbb{C}$ genau n-Nullstellen mit Vielfachheit gezählt und alle liegen im $\overline{K_R(0)}$ mit $R = \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right\}$.*

» 1.) Für $|z| > R$ gilt

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\, |z|^j \leq |z|^{n-1} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|}_{\leq R < |z|} < |z|^n,$$

also ist $p(z) \neq 0$ für $z \notin \overline{K_R(0)}$.

2.) Sei $\varepsilon > 0$, dann hat $f(z) = z^n$ n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) in $K_{R+\varepsilon}(0)$. Sei

$$g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j,$$

dann gilt für $|z| = R + \varepsilon$, dass $|g(z)| < |f(z)|$, also haben $f(z)$ und $p(z) = f(z) + g(z)$ gleich viele Nullsten in $K_{R+\varepsilon}(0)$, also n. «

2.102 *Bemerkung.* Holomorphe Funktionen sind allgemeiner als man denken könnte. Der Riemannsche Abbildungssatz besagt, dass für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ eine bijektive holomorphe Abbildung $f : G \to K_1(0)$ existiert. ⊸

3 Einführung in Integrations und Maßtheorie

3-A Falsche Erwartungen

Wir wissen bereits, dass $C^1([a,b] \to \mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm vollständig ist, es existiert jedoch kein Skalarprodukt, das die Supremumsnorm induziert, also für das gilt $||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$. Für die durch ein Skalarprodukt induzierte L_2-Norm

$$||f||_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b \left(|f|^2\right)\,\mathrm{d}x},$$

ist $C^1([a,b] \to \mathbb{R})$ hingegen nicht mehr vollständig. Nun sind sowohl Orthogonalität als auch Vollständigkeit wichtige Konzepte in der Analysis, auf die wir auch in Funktionenräumen nicht verzichten wollen. Die Intuition rät, den $C^1([a,b] \to \mathbb{R})$ bezüglich der L_2-Norm "zu vervollständigen", wie wir $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Norm vervollständigt haben. Dies ist mit Hilfe des Lebesgue-Integrals möglich.

Bis dahin müssen wir jedoch noch etwas arbeiten. Zuerst wollen wir uns damit beschäftigen Mengen zu "messen". Wir kennen für einen Quader $Q = X_{j=1}^n [a_j, b_j]$ im $\mathbb{R}^n$ das Volumen $V(Q) = \prod_{j=1}^n \left|b_j - a_j\right|$.
Zunächst wollen wir die Frage klären, ob der Volumenbegriff für beliebige Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Sinn macht.
Für einen allgemeinen Volumenbegriff sollte gelten, dass eine Translation, Spiegelung oder Rotation der Menge das Volumen nicht ändert. Außerdem sollte das Volumen des Einheitsquaders stets 1 sein. Und betrachtet man die Vereinigung zweier disjunkter Mengen M_1 und M_2, dann sollte das Volumen der Vereinigung der Summe der Einzelvolumina entsprechen.

3.1 **Erster Versuch** *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ heißt Inhalt, falls sie den folgenden Eigenschaften genügt.*

(i) $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(ii) *Sei* $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine Translation, Spiegelung oder Rotation, dann ist* $\mu(\beta(A)) = \mu(A)$.

(iii) $\mu((0,1]^n) = 1$.

μ *heißt Maß, falls statt (i) gilt*

(iv) $\mu(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. ⋊

3.2 **Bsp** Gegenbeispiel (Vitali 1905): Es gibt kein Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ auf $\mathbb{R}$.

Zerlege $(0,1]$ in abzählbar viele gleichgroße disjunkte Mengen. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $(0,1]$ und

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sei $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,1]$.

Sei $A_0 \subseteq (0,1]$ so definiert, dass A_0 aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält[2].

$A_j := (A_0 + q_j) \mod 1$.

(a) Es gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = (0,1]$.

"$\subseteq$" gilt per definitionem. Sei nun $x \in (0,1]$, dann gibt es ein $y \in A_0 : x \in [y]$, also ist $x - y \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$.

Falls $x = y$, dann ist $x \in A_0 \subseteq A_0 + 1 \mod 1$.

Falls $x - y \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, existiert ein $j \in \mathbb{N} : x - y = q_j$, also ist $x \in (A_0 + q_j) \mod 1$.

Falls $x - y \in \mathbb{Q} \cap (-1,0)$, existiert ein $j \in \mathbb{N} : x - y + 1 = q_j$, also ist $x \in (A_0 + q_j) \mod 1$.

Also ist $(0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

[2] Dass das funktioniert, garantiert das Auswahlaxiom

(b) Es ist $A_j \cap A_k = \emptyset$, falls $j \neq k$.

Sei $x \in A_j \cap A_k$ für $j \neq k$, dann gilt

$$\begin{aligned}
x &= (y_1 + q_j) \mod 1, && y_1 \in A_0,\\
x &= (y_2 + q_k) \mod 1, && y_2 \in A_0,\\
\Rightarrow &= y_1 - y_2 \in \mathbb{Q},
\end{aligned}$$

also ist $[y_1] = [y_2]$ und daher auch $y_1 = y_2$, da A_0 genau einen Vertreter jeder Äquivalenzklasse enthält und damit ist $q_j = q_k \mod 1$ und $A_j = A_k$, ein Widerspruch, also ist $A_j \cap A_k = \emptyset$.

(c) Angenommen μ sei ein Maß, dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(A_j) &= \mu\Big((A_0 + q_j) \cap (0,1]\Big) + \mu\Big((A_0 + q_j) \cap (1,2] - 1\Big)\\
&= \mu\Big((A_0 + q_j) \cap (0,1]\Big) + \mu\Big((A_0 + q_j) \cap (1,2]\Big)\\
&= \mu\Big(((A_0 + q_j) \cap (0,1]) \cup ((A_0 + q_j) \cap (1,2])\Big)\\
&= \mu\Big((A_0 + q_j) \cap (0,2]\Big) = \mu(A_0 + q_j) = \mu(A_0).
\end{aligned}$$

Aber es ist $\mu((0,1]) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_0) \neq 1$, ein Widerspruch. ■

3.3 *Bemerkung.* 1.) Hausdorff (1914): Man kann keinen Inhalt auf dem $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ definieren.

2.) Banach-Tarski (1924): Sei $n \geq 3$, dann existieren $C_1, \ldots, C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und Bewegungen $\beta_1, \ldots, \beta_k$, sodass $K_1(0) = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} C_j$ und $\dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \beta_j(C_j) = K_1(0) \cup K_1(3)$.

3.) Banach (1923): Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ existieren verschiedene Inhalte. ⊸

3-B Messbare Mengen

3.4 **Definition** *Sei Ω Menge.*

1.) $h \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Halbring, falls

(i) $\varnothing \in h$,

(ii) $A, B \in h \Rightarrow A \cap B \in h$,

(iii) $A, B \in h,\ A \subseteq B \Rightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, C_1, \ldots, C_k \in h : B \setminus A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} C_i$.

2.) $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *heißt* *σ-Algebra*, *falls*

(i) $\varnothing \in \Sigma$,

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

(iii) $A_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \Sigma$.

(Ω, Σ) *heißt messbarer Raum*, Σ *Menge der messbaren Mengen.*

3.) *Zu* $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *ist* $\sigma(M) := \bigcap_{\Sigma \supseteq M} \Sigma$, *eine σ-Algebra, denn Schnitte von σ-Algebren sind σ-Algebren. Sie heißt die von M erzeugte σ-Algebra.*

4.) *Sei X Menge, dann heißt $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologie auf X, falls es den folgenden Eigenschaften genügt:*

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{O}_X$,

(ii) $A, B \in \mathcal{O}_X \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}_X$,

(iii) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_X \Rightarrow \bigcup_{O \in \mathcal{T}} O \in \mathcal{O}_X$.

$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}_X)$ *heißt Borel σ-Algebra.* ⋊

3.5 **Korollar** 1.) *Sei Σ eine σ-Algebra und für $j \in \mathbb{N}$ sei $A_j \in \Sigma$, dann ist,*

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \Sigma.$$

2.) *Ist $\mathcal{O}_X$ Topologie auf X, $\mathcal{A}_X = \{O^c : O \in \mathcal{O}_X\}$ das System aller abgeschlossener Mengen in X, so gilt $\sigma(\mathcal{O}_X) = \sigma(\mathcal{A}_X)$.* ⋊

» 1.) Wir wissen, dass Komplemente und abzählbare Vereinigungen in Σ sind,

$$A_j \in \Sigma \Rightarrow A_j^c \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^c \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^c \right)^c \in \Sigma.$$

2.) Ist $M \subseteq \Sigma$, dann ist auch $\sigma(M) \subseteq \Sigma$, also gilt

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_X \Rightarrow \ \exists\, O \in \mathcal{O}_X : A = X \setminus O \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{O}_X) \\ \Rightarrow \mathcal{A}_X \subseteq \sigma(\mathcal{O}_X) \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_X) \subseteq \sigma(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Analog folgt $\sigma(\mathcal{O}_X) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_X)$. «

3.6 **Satz** *1.) Die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wird von jeder der folgenden Mengen erzeugt,*

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\}\,, \\
M_2 &= \{O \subseteq \mathbb{R} \,:\, O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}\,, \\
M_3 &= \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_4 &= \{(a,b] \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_5 &= \{[a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_6 &= \{[a,b] \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_7 &= \{[a,\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_8 &= \{(a,\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_9 &= \{(-\infty,a] \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_{10} &= \{(-\infty,a) \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,, \\
M_{11} &= \{(a,b) \,:\, a \in \mathbb{Q}\}\,.
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere wird $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von folgendem Halbring erzeugt

$$h = \left\{ X_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i] \,:\, a_i,b_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle endlichen und abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$. ⋊

» 1.) $(a,b] = \underbrace{(a,\infty)}_{\in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}} \cap \underbrace{(b,\infty)^c}_{\in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, also ist $M_4 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und damit ist $\sigma(M_4) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.) Sei $O \subseteq \mathbb{R}$ offen, dann ist O abzählbare Vereinigung offener Intervalle, also

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j),$$

$$(a_j, b_j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_j, b_j - \frac{1}{k}\right] \in \sigma(M_4),$$

und damit ist $O \in \sigma(M_4)$. «

3.7 **Satz** *Sei $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ und $f : \Omega \to \Omega'$, dann ist*

$$f^{-1}(\sigma(M)) = \left\{ f^{-1}(A) \, : \, A \in \sigma(M) \right\},$$

eine σ-Algebra und wird von $f^{-1}(M)$ erzeugt. ⋊

» (i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\sigma(M))$,

(ii) $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\Omega' \setminus A) = \Omega \setminus f^{-1}(A)$. Sei also $B \in f^{-1}(\sigma(M))$, dann existiert ein $A \in \sigma(M) : B = f^{-1}(A)$. Damit gilt $B^c = f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\sigma(M))$.

(iii) Die "Urbildabbildung" ist inklusionserhaltend, also gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_j),$$

ist also $B_j \in f^{-1}(\sigma(M))$, dann folgt $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in f^{-1}(\sigma(M))$.

aus (i) bis (iii) folgt, $f^{-1}(\sigma(M))$ ist σ-Algebra.

(iv) $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(\sigma(M))$ also ist auch $\sigma(f^{-1}(M)) \subseteq f^{-1}(\sigma(M))$.

Betrachte $\Sigma = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \, : \, f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(M))\}$, also ist Σ eine σ-Algebra auf Ω (Beweis analog zu oben).

Offensichtlich ist $M \subseteq \Sigma$, also ist auch $\sigma(M) \subseteq \Sigma$ und damit ist

$$f^{-1}(\sigma(M)) \subseteq f^{-1}(\Sigma) = \sigma(f^{-1}(M)).$$

Also ist $f^{-1}(\sigma(M)) = \sigma(f^{-1}(M))$ die von $f^{-1}(M)$ erzeugte σ-Algebra. «

3-C Maße

Sei nun stets h ein Halbring und Σ eine σ-Algebra.

3.8 **Definition** *$\mu : h \to [0, \infty]$ heißt Prämaß, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ heißt Maß, falls*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$, *(Definitheit)*

(ii) $\mu(A) \geq 0$, *(Positivität)*

(iii) $\mu\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, *($\sigma$-Additivität)*

falls $\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in h$ *bei Prämaß.*

(Ω, Σ, μ) *heißt Maßraum.*

Falls $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *mit* $\mu(A_n) < \infty$, *dann heißt* μ *σ-endlich.*

Ist $\mu(\Omega) < \infty$, *dann heißt* μ *endliches Maß.*

Ist $\mu(\Omega) = 1$, *dann heißt* μ *Wahrscheinlichkeitsmaß.* ⋊

3.9 **Forsetzungssatz** *Ein Prämaß μ_0 auf h besitzt eine Fortsetzung μ zu einem Maß auf $\sigma(h)$. Ist μ_0 σ-endlich, dann ist μ eindeutig.* ⋊

» Elstrodt, Kapitel III, §§ 4.5. «

3.10 **Korollar** *Es gibt genau ein Maß $\mu^{(n)}$ auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\mu(X_{j=1}^{n}(a_j, b_j]) = \prod_{j=1}^{n} \left| b_j - a_j \right| .$$

μ^n heißt Lebesgue-Borel-Maß und ist translationsinvariant. ⋊

» Durch μ wird ein Prämaß auf dem Halbring

$$h = \left\{ X_{j=1}^{n}(a_j, b_j] : a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\},$$

definiert. μ ist σ-endlich, denn $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} W(z_j)$, mit (z_j) einer Abzählung von $\mathbb{Z}^n$ und $W(z_j)$ ein halboffener Würfel mit Mittelpunkt z_j und Seitenlänge 1.

Dann ist $\mu(W(z_j)) = 1$ und die Fortsetzung eindeutig. μ ist auf h translationsinvariant, also ist auch die Fortsetzung translationsinvariant. «

3.11 **Weitere Eigenschaften** *Sei μ Maß, $A_j \in \Sigma$, dann gilt*

(i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. *(Monotonie)*

(ii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots,\ A := \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \in \Sigma$, *dann ist*

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots, A := \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \in \Sigma$, *dann ist*

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iv) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. ⋊

» (i) $A_2 = A_1 \dot\cup (A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow \mu(A_2) = \mu(A_1) + \underbrace{\mu(A_2 \cap A_1^c)}_{\geq 0}$.

(ii) Schreibe A als $A = A_1 \dot\cup (A_2 \setminus A_1) \dot\cup (A_3 \setminus A_2) \dot\cup \ldots$,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu\left(A_1 \dot\cup (A_2 \setminus A_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (A_k \setminus A_{k-1})\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

(iii) $A \subseteq A_1$, also ist

$$A_1 = A \dot\cup (A_1 \setminus A) = A \dot\cup \left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = A \dot\cup \bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_j.$$

Für das Maß von A_1 gilt also

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \mu(A) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_j\right) = \mu(A) + \lim_{j\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_j) \\
&= \mu(A) + \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iv)

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \dot\cup \dot\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \right),$$

$$A_j \supseteq A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k,$$

also gilt für das Maß

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu\left(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right) \le \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \quad «$$

3.12 **Definition** *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.*

1.) $N \in \Sigma$ heißt Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$. Eine Eigenschaft $E(x)$ für $x \in \Omega$ gilt fast überall, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ gibt, sodass

$$\forall\ x \in \Omega \setminus N : E(x) \text{ ist wahr.}$$

2.) (Ω, Σ, μ) heißt vollständiger Maßraum, falls Σ mit einer Nullmenge N auch jede Teilmenge von N enthält. $\rtimes$

3.13 **Vervollständigung eines Maßraums** *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Setze*

$$\Sigma^* = \{B \subseteq \Omega : \ \exists\ A, C \in \Sigma : (A \subseteq B \subseteq C) \wedge \mu(C \setminus A) = 0\},$$

und für $B \in \Sigma^*$, $\mu^*(B) = \mu(A)(= \mu(C))$. Insbesondere ist dann jede Teilmenge einer Nullmenge in Σ^* enthalten.

Dann gilt

- *Σ^* ist eine σ-Algebra.*
- *μ^* ist ein Maß auf Σ^*.*
- *μ^* ist eindeutige Fortsetzung von μ.*

- $(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$ *ist vollständig.* $\rtimes$

» Σ^* ist eine σ-Algebra, denn

1.) $\varnothing \in \Sigma \subseteq \Sigma^*$.

2.) Sei $B \in \Sigma^*$, und $A \subseteq B \subseteq C$, mit $C \setminus A = N$, dann gilt

$$\begin{aligned} & C^c \subseteq B^c \subseteq A^c, \\ & C^c, A^c \in \Sigma, \\ & A^c \setminus C^c = A^c \cap (C^c)^c = A^c \cap C = C \setminus A, \\ \Rightarrow & \mu(A^c \setminus C^c) = 0, \\ \Rightarrow & B^c \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

3.) Sei $B_j \in \Sigma^*$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, dann gibt es $A_j, B_j \in \Sigma$, sodass $A_j \subseteq B_j \subseteq C_j$ und $\mu(C_j \setminus A_j) = 0$. Es gilt dann

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \subseteq B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \subseteq C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j,$$

und für $A, C \in \Sigma$ folgt,

$$\begin{aligned} C \setminus A = C \cap A^c = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j \right) \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right)^c &= \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j^c \right) \\ \subseteq \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j \cap A_j^c \right) \\ \overset{3.11}{\Rightarrow} \mu(C \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k \setminus A_k) = 0. \end{aligned}$$

4.) μ^* ist Maß: Übung.

5.) μ^* ist eindeutig: μ^* ist Maß, also monoton,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mu^*(A)}_{=\mu(A)} \leq \mu^*(B) \leq \underbrace{\mu^*(C)}_{=\mu(C)}, \\ \Rightarrow\ & \mu^*(B) = \mu(A), \end{aligned}$$

also ist μ^* eindeutig. «

3.14 **Definition** *Die Vervollständigung $\lambda^{(n)}$ des Lebesgue-Borel-Maßes $\mu^{(n)}$ heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.* $\rtimes$

3.15 **Bsp** 1.) Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\lambda^{(n)}(\{x\}) = 0$, denn sei

$$W_j := X_{k=1}^n \left(x_k - \frac{1}{j}, x_k \right] \Rightarrow \{x\} \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} W_j,$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}(\{x\}) = \lim_{j\to\infty} \lambda^{(n)}(W_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j^n} = 0$$

2.) Aus 1.) folgt für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar, dass $\lambda^{(n)}(M) = 0$ ist.

3.) Die Cantor-Menge ist ein Beispiel für eine überabzählbare Nullmenge.

4.) Für $a \in \mathbb{R}$ ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = a\}.$$

Falls $n \geq 2$, ist $\lambda^{(n)}(H) = 0$, denn

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k, \; H_k = \{a\} \times (-k, k] \times \ldots \times (-k, k],$$

offensichtlich ist $H_k \subseteq H_{k+1}$, also folgt mit 3.11, dass $\lambda^{(n)}(H) = \lim_{k\to\infty} \lambda^{(n)}(H_k)$,

$$H_k = \bigcap_{l=1}^{\infty} \underbrace{(a - \frac{1}{l}, a) \times (-k, k] \times \ldots \times (-k, k]}_{\lambda^{(n)}(\ldots) = \frac{1}{l}(2k)^{n-1} \to 0},$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}(H_k) = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}(H) = 0. \quad \blacksquare$$

3-D Messbare Funktionen

3.16 **Definition** *Seien (Ω, Σ) und (Ω', Σ') messbare Räume. Dann heißt $f : \Omega \to \Omega'$ messbar, falls gilt*

$$\forall\; B \in \Sigma' : f^{-1}(B) \in \Sigma,$$

oder anders geschrieben $f^{-1}(\Sigma') \subseteq \Sigma$. Man schreibt $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ ist messbar.

Falls $\Sigma' = \mathcal{B}(\Omega') = \sigma(\mathcal{O}_{\Omega'})$ Borel-σ Algebra auf Ω' ist, heißt $f : (\Omega, \Sigma) \to \Omega'$ Borel-messbar. ⋊

3.17 **Vereinfachung** *Ist $M' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ mit $\Sigma' = \sigma(M')$, dann sind äquivalent*

(i) $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ messbar.

(ii) $\forall\ B \in M' : f^{-1}(B) \in \Sigma$. ⋊

» (i) $\Rightarrow f^{-1}(M') \subseteq f^{-1}(\sigma(M')) = f^{-1}(\Sigma') \subseteq \Sigma$.

(ii) $\Rightarrow f^{-1}(\Sigma') = f^{-1}(\sigma(M')) = \sigma(f^{-1}(M')) \subseteq \sigma(\Sigma) = \Sigma$,

da $\sigma(f^{-1}(M'))$ die kleinste σ-Algebra ist, die $f^{-1}(M')$ als Teilmenge enthält. «

3.18 **Korollar** *1.) Ist $f : X \to Y$ stetig, dann ist f Borel-messbar.*

2.) Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Für $A \subseteq \Omega$ ist

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A.

Es gilt $A \in \Sigma$ genau dann, wenn $\chi_A : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist. ⋊

» 1.) Die Borel-σ Algebra auf X ist $\Sigma = \sigma(\mathcal{O}_X)$, die auf Y ist $\Sigma' = \sigma(\mathcal{O}_Y)$. Wendet man nun 3.17 an mit $M' = \mathcal{O}_Y$ folgt aufgrund der Stetigkeit von f, dass $f^{-1}O \in \mathcal{O}_X$ für $O \in \mathcal{O}_Y$.

2.) Wähle $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\})$.

"$\Rightarrow$": Sei $A \in \Sigma$, dann ist

$$\chi_A^{-1}((a,b]) = \begin{cases} \varnothing, & 0,1 \notin (a,b], \\ A, & 1 \in (a,b], 0 \notin (a,b], \\ \Omega \setminus A & 1 \notin (a,b], 0 \in (a,b], \\ \Omega, 0, 1 \in (a,b] \end{cases}$$

$$\in \Sigma$$

"$\Leftarrow$": Sei $A = \chi_A^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$, dann ist $A \in \Sigma$.

3.19 **Erweiterung von $\mathbb{R}$** *Seien* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$,

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B \cup E : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ und } E \in \{\varnothing, \{\infty\}, \{-\infty\}, \{\infty, -\infty\}\}\},$$

dann ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *eine* σ*-Algebra, die Borel-*σ*-Algebra von* $\overline{\mathbb{R}}$.

Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt numerische Funktion.* ⋊

3.20 **Korollar** $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist Borel-messbar genau dann, wenn eine der Bedingungen erfüllt ist,*

(i) $f^{-1}((a, \infty]) \in \Sigma, a \in \overline{\mathbb{R}}$,

(ii) $f^{-1}((a, b]) \in \Sigma,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. ⋊

» $\{(a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erzeugt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. «

3.21 **Bildmaß** *Sei* $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ *messbar und* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *ein Maß auf* (Ω, Σ). *Dann ist* $\nu : \Sigma' \to [0, \infty]$ *mit*

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \text{ für } B \in \Sigma',$$

ein Maß auf (Ω', Σ'), *das sogenannte Bildmaß. Schreibe* $\nu := f(\mu)$. ⋊

» (i) $\nu(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Sei $B \in \Sigma'$, dann ist $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \geq 0$, da $f^{-1}(B) \in \Sigma$.

(iii) Sei $\dot{\bigcup}_{j=1}^n B_j$ disjunkte Vereinigung von $B_j \in \Sigma'$ für $1 \le j \le n$, dann ist

$$\begin{aligned} \nu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^n B_j\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^n B_j\right)\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^n f^{-1}(B_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu\left(f^{-1}(B_j)\right) = \sum_{j=1}^n \nu(B_j), \end{aligned}$$

da f^{-1} inklusionserhalten ist und die Urbilder disjunkter Mengen ebenfalls disjunkt sind. «

3.22 **Satz** *Seien $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ und $g : (\Omega', \Sigma') \to (\Omega'', \Sigma'')$ messbar, dann ist auch $g \circ f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega'', \Sigma'')$ messbar.* ⋊

» Sei $C \in \Sigma''$, dann ist

$$(g \circ f)^{-1}(C) = (f^{-1} \circ g^{-1})(C) = f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \Sigma'} \in \Sigma. \quad «$$

3.23 **Satz** *1.) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar.

(ii) $f_1, \dots, f_n : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ sind alle Borel-messbar.

2.) $f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{C}$ ist Borel-messbar genau dann, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ beide Borel-messbar sind. ⋊

» 1.) "(ii)⇒(i)": Folgt direkt aus $f^{-1}\left(X_{j=1}^n (a_j, b_j]\right) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}((a_j, b_j])$.

2.) "(i)⇒(ii)": Wähle $\mathbb{R}$ statt $(a_j, b_j]$ für $j = 2, \dots, n$ dann folgt

$$f^{-1}\left((a_1, b_1] \times X_{j=2}^n \mathbb{R}]\right) = f_1^{-1}((a_1, b_1]),$$

und die $(a_1, b_1]$ erzeugen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, also ist f_1 messbar.

3.) $\mathbb{C}$ ist homöomorph zum $\mathbb{R}^2$. «

3.24 **Satz** *1.) Seien $f, g : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar, dann sind es auch* *(i)* λf *für* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) $f + g$, *falls* $\forall\ x \in \Omega : f(x) = \pm\infty \Rightarrow g(x) \neq \mp\infty$.

(iii) $f \cdot g$, *wobei* $0 \cdot \infty = 0$ *zu setzen ist.*

(iv) $f_+ := \max\{f, 0\}$.

(v) $f_- := \max\{-f, 0\}$.

(vi) $|f| = f_+ + f_-$.

2.) Sei (f_n) *eine Funktionenfolge und alle* $f_n : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}^n$ *Borel-messbar, dann sind auch* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *und falls der Grenzwert existiert* $\lim_{n\to\infty} f_n$ *messbar.* ⋊

» 1.) Wir zeigen die Behauptung nur für $f + g$ und $\max\{f, g\}$, die anderen Fälle folgen analog.

Seien $\phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^2$, $x \mapsto (f(x),\ g(x))$ und $P : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Offensichtlich ist P stetig, also Borel-messbar und daher gilt

$$\begin{aligned}(f+g)^{-1}((0,\infty]) &= (f+g)^{-1}((0,\infty)) \cup (f+g)^{-1}(\{\infty\}) \\ &= \phi^{-1}(P^{-1}(0,\infty)) \cup g^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma.\end{aligned}$$

$$\max\{f,g\}^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}((a,\infty]) \cup g^{-1}((a,\infty]) \in \Sigma.$$

2.) Sei $\tilde{f}(x) := \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ für $x \in \Omega$, dann ist

$$\tilde{f}^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}((a,\infty])}_{\in\Sigma} \in \Sigma,$$

und daher ist

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x),$$

messbar. Ist $\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$, ist auch $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar, dabei ist auch ∞ zugelassen. «

3-E Lebesgue Integral

3.25 **Definition** *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt einfache Funktion, falls f Borell-messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt, d.h. f ist genau dann einfach, wenn f Linearkombination[3] von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen ist.* $\rtimes$

3.26 **Vorläufige Definition** *Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum und $E \in \Sigma$. Für eine einfache Funktion*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}, \quad \text{mit } A_j \text{ messbar},$$

definieren wir

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu(A_j \cap E),$$

wobei wir im Fall $\lambda_j = 0$ und $\mu(A_j) = \infty$, $\lambda_j \cdot \mu(A_j) = 0$ setzen. $\rtimes$

Bsp 1.) Sei

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann lässt sich f schreiben als $f = 1 \cdot \chi_{[0,2]} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus [0,2]}$ und damit ist $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = 2$.

2.) Sei

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

dann ist $\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu = \infty$.

[3] Diese sind per definitionem endlich.

3.) Sei

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$= 1 \cdot \chi_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}},$$

dann ist $\int_{\mathbb{R}} h \, \mathrm{d}\mu = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$ ■

3.27 **Satz** *Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar und positiv[4], dann existiert eine Folge (s_n) einfacher Funktionen mit den Eigenschaften*

(i) $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots,$

(ii) $\forall\ x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$

Ist f beschränkt, so konvergiert s_n auf Ω gleichmäßig gegen f. ⋊

» Sei

$$E_{n,j} := \left\{ x \in \Omega \, : \, \frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n} \right\},$$

für $j = 1, \ldots, 2^n \cdot n$, und

$$F_n := \{x \in \Omega \, : \, f(x) \ge n\} = f^{-1}([n, \infty]),$$

dann sind F_n und $E_{n,j}$ messbar. Sei

$$s_n(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{2^n}, & \text{für } x \in E_{n,j}, 1 \le j \le 2^n, \\ n, & \text{für } x \in F_n, \end{cases}$$
$$= \sum_{j=1}^{2^n n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{E_{n,j}} + n \chi_{F_n},$$

dann ist s_n messbar und einfach. $s_n(x)$ ist außerdem monoton wachsend, denn

$$E_{n+1,2j} \dot\cup E_{n+1,2j+1} = E_{n,j},$$

mit $s_{n+1}(x) = \dfrac{2j}{2^{n+1}} = \dfrac{j}{2^n}$ und $s_n(x) = \dfrac{j-1}{2^n}$ auf $E_{n+1,2j+1}$.

Sei nun $x \in \Omega$ fest,

---

[4]Wir sagen x ist positiv, falls $x \ge 0$ und ist echt positiv, falls $x > 0$.

- falls $f(x) < \infty$, folgt $|s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ für $n > f(x)$,
- falls $f(x) = \infty$, ist $s_n(x) = n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Ist f beschränkt, also $f(x) \le c \in \mathbb{R}$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge c$, so dass $\|f - s_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n}$ für $n \ge N$ und damit konvergiert s_n gleichmäßig gegen f. «

3.28 **Korollar** *Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) f ist Borel-messbar.

(ii) f ist punktweiser limes einfacher Funktionen. ⋊

» (i)⇒(ii): f ist Borel-messbar, also auch f_+ und f_-. f_+ und f_- sind positiv, also nach 3.27 punktweiser limes einfacher Funktionen und da $f = f_+ - f_-$ ist damit auch f punktweiser Limes einfacher Funktionen.

(ii)⇒(i): Einfache Funktionen sind messbar, und damit ist f als Grenzwert messbarer Funktionen messbar. «

3.29 **Definition** *Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum und $E \in \Sigma$.*

(i) Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar und positiv, dann ist

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_E s \, \mathrm{d}\mu \ : \ s \textit{ einfach und } \ \forall\ x \in \Omega : 0 \le s(x) \le f(x)\right\},$$

(ii) Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar mit $f = f_+ - f_-$.
Falls $\int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu = \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu = \infty$, dann ist $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ nicht definiert. Andernfalls ist

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

(iii) Falls $\int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu, \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, was äquivalent zu $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ist, dann heißt f Lebesgue integrierbar und man schreibt $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. ⋊

3.30 **Eigenschaften des Lebesgue Integrals** *Seien* (Ω, Σ, μ) *Maßraum,* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *Borel-messbar und* $A \in \Sigma$*, dann gilt*

(i) $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) \Leftrightarrow |f| \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$*, in diesem Fall gilt*

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$*, dann ist* $\lambda f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und*

$$\int_A \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(iii) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und* $|g| \leq f$*, dann ist* $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und*

$$\left| \int_A g \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(iv) Sei $\mu(A) < \infty$ *und* $f|_A$ *beschränkt, dann ist*

$$\chi_A \cdot f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu).$$

(v) Seien $f, g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und* $f \leq g$*, dann ist*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

(vi) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$*, dann ist*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(vii) Sei $\mu(A) = 0$*, dann ist*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(viii) Sei $A_1 \subseteq A_2$ *und* $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$*, dann ist*

$$\int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu.$$

(ix) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann ist

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \pm\infty\}\right) = 0.$$

(x) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und positiv, $A_1 \subseteq A_2$, dann ist

$$\int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu. \quad ⋊$$

» "(i)": Ist f numerisch, dann ist $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$, die Äquivalenz folgt aus der Definition. Für das Integral gilt

$$\begin{aligned}
\int_A f \, \mathrm{d}\mu &= \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu - \underbrace{\int_a f_- \, \mathrm{d}\mu}_{\geq 0} \leq \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu + \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sup\left\{\int_A s \, \mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq f_+\right\} + \sup\left\{\int_A t \, \mathrm{d}\mu : 0 \leq t \leq f_-\right\} \\
&= \sup\left\{\int_A \sigma : 0 \leq \sigma \leq f_+ + f_-\right\} = \int_A (f_+ + f_-) \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

"(ii),(iii)": Übung.

"(iv)": $|f(x)| \leq C$ für $x \in A$, also sind auch $|f_+|, |f_-| \leq C$. Sei s einfach mit $0 \leq s \leq \chi_A f_+$, dann ist

$$\int_A s \, \mathrm{d}\mu \leq C\mu(A) \Rightarrow \int_\Omega (\chi_A f)_+ \, \mathrm{d}\mu \leq C\mu(A).$$

"(v)": Aus $f \leq g$ folgt,

$$\begin{aligned}
f_+ \leq g_+ &\Rightarrow \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g_+ \, \mathrm{d}\mu, \\
g_- \leq f_- &\Rightarrow \int_A g_- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

"(vi),(vii)": Klar, vergleiche auf (iv).

"(viii)": Für jede einfache Funktion auf A_2 gilt Gleichheit.

“(ix)”: Falls $\mu\left(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}\right) > 0$, gilt für

$$s_n(x) = \begin{cases} 0, & \Omega \setminus A, \\ n, & A = \{\omega : f(\omega) = \infty\}, \end{cases}$$

und damit $0 \leq s_n \leq f$, also auch

$$\begin{aligned} & \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu = n\mu(A) \to \infty, \\ \Rightarrow & \int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu = \infty. \end{aligned}$$

“(x)”: $f\chi_{A_1}, f\chi_{A_2} \in L_1$ und $f\chi_{A_1} \leq f\chi_{A_2}$.

3-F Konvergenzsätze und mehr

3.31 **Satz** *Seien* $s_n, \sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ *einfache Funktionen mit* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ *und* $0 \leq \sigma \leq \lim_{n\to\infty} s_n$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» σ ist einfach, also Linearkombination charaktersitischer Funktionen,

$$\sigma = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{A_j}, \qquad \forall\ A_j\ \exists\ \alpha_j \in \mathbb{R} : \sigma^{-1}(\alpha_j) = A_j,$$

also sind die A_j messbar und $A_i \cap A_k = \varnothing$ für $i \neq k$.

Sei nun $\beta > 1$ und $B_n = \{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) \leq \beta s_n(\omega)\}$ eine Folge von Mengen, dann existiert für jedes $\omega \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\omega \in B_n$ und daher gilt

- $B_k \subseteq B_l$ für $l \geq k$,
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega$, $\Rightarrow A_j = A_j \cap \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_j \cap B_n)$
- $\sigma\chi_{B_n} \leq \beta s_n$,

Also gilt

$$\int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lim_{m\to\infty} \mu(A_j \cap B_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_m)$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sigma \chi_{B_m} \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \beta s_m \,\mathrm{d}\mu = \beta \lim_{m\to\infty} \int_\Omega s_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Da für $\beta > 1$ beliebig gilt $\int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu \le \beta \lim\limits_{m\to\infty} \int_\Omega s_m \,\mathrm{d}\mu$, folgt die Behauptung. «

3.32 **Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi 1906)** *Seien $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen mit $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» 1.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist wohldefiniert und nach 3.24 messbar.

2.) $f_n \le f \Rightarrow \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ und daher gilt insbesondere,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

3.) Sei s einfach mit $0 \le s \le f$, $\beta > 1$ und $B_n = \{\omega \in \Omega : s(\omega) \le \beta f_n(\omega)\}$, dann gilt

- $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$,
- $s\, \chi_{B_n} \le \beta f_n$ und $s\, \chi_{B_n}$ einfach,
- $0 \le s\, \chi_{B_1} \le s\, \chi_{B_2} \le \dots$.

Offensichtlich ist $s = \lim\limits_{n\to\infty} s\chi_{B_n}$, also gilt

$$\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s\chi_{B_n} \,\mathrm{d}\mu \le \beta \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

und da $\beta > 1$ beliebig war, folgt

$$\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

insbesondere gilt dann

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : 0 \le s \le f, s \text{ einfach} \right\} \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \quad «$$

3.33 **Additivität** *Seien $f, g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann ist $f + g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und es gilt für $A \in \Sigma$,*

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» 1.) Seien $f, g \geq 0$, dann ist $f + g$ nach 3.24 messbar.

Es existieren also Folgen $(s_n), (t_n)$ einfacher Funktionen mit $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ und $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$, sodass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x),$$

Sei $\sigma_n = s_n + t_n$, dann ist σ_n einfach und monoton steigend und es gilt $(f+g)(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$.

Es folgt daher mit 3.32, dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sigma_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega t_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Sei nun $A \in \Sigma$, dann ist

$$\begin{aligned} \int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega (f+g)\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

2.) Seien nun $f, g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, und

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq 0 \text{ und } g(\omega) < 0 \text{ und } (f+g)(\omega) \geq 0\} \\ &= f^{-1}([0,\infty]) \cap g^{-1}([-\infty,0]) \cap (f+g)^{-1}([0,\infty]), \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} &\int_{A_1} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} \underbrace{f+g}_{\geq 0} + \underbrace{-g}_{\geq 0}\,\mathrm{d}\mu, \\ \Rightarrow &\int_{A_1} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{A_1} g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Entsprechend für

$$A_2 := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq 0 \text{ und } g(\omega) < 0 \text{ und } (f+g)(\omega) < 0\},$$

usw. «

3.34 **Korollar** *Seien* $f_n : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar und* $f_n \geq 0$*, dann gilt*

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» Zum Beweis betrachten wir die Reihe als Grenzwert ihrer Partialsummen

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N f_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{3.32}{=} \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^N f_n\right) \mathrm{d}\mu$$
$$\overset{3.33}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu. \quad «$$

3.35 **Bsp** Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu(A) = \operatorname{card} A$, dann gilt:

1.) Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ ist messbar und es gilt

$$\int_\mathbb{N} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n),$$

denn betrachten wir $f_n := f \cdot \chi_{\{n\}}$, dann ist $f_n \geq 0$ und $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und wir können 3.34 anwenden.

2.) Sei $f_n : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ und $a_{nk} = f_n(k)$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{nk} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{nk},$$

denn $\sum_{k=1}^\infty a_{nk} = \int_\mathbb{N} f_n \, \mathrm{d}\mu$ und wir können erneut 3.34 anwenden. ■

3.36 **Lemma von Fatou (1906)** *Sei* $f_n : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar,* $f_n \geq 0$*, dann gilt*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Ist darüber hinaus $f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und gibt es ein* $M \in \mathbb{R}$*, sodass* $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, dann ist* $\liminf_{n\to\infty} f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und es gilt*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq M. \quad \rtimes$$

» Sei $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$, dann ist f positiv und nach 3.24 messbar, ebenso ist $g_n := \inf\left\{f_j : j \geq n\right\}$ messbar. Nun gilt

- $g_n \leq f_j$ für $j \geq n$,
- $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$,
- $g_n \to f$ punktweise,

also ist auch

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \inf\left\{\int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu : j \geq n\right\}.$$

Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt somit die Behauptung,

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) \overset{3.32}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf\left\{\int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu : j \geq n\right\}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \quad «$$

3.37 **Satz von der Majorisierten Konvergenz (Lebesgue 1910)** *Seien* $f_n, f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *und* $f_n \to f$*. Existiert ein* $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *mit* $|f_n| \leq g$ *für* $n \in \mathbb{N}$*, dann sind* $f_n, f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *und es gilt*

$$\int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0, \quad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» Aus 3.30 folgt, dass $f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Nun ist $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq g$, also ist auch $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Wegen $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$ gilt

$$g_n := 2g - |f_n - f| \ge 0, \quad g_n \to 2g,$$

und damit erhalten wir,

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega - |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu - \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu}_{\ge 0},\end{aligned}$$

und daher ist $\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Nun sind die f_n nichtnegativ, also existiert auch der Grenzwert und stimmt mit dem limes superior überein, es gilt also,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung für Integrale folgt daher die übrige Behauptung,

$$\left| \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0. \quad «$$

3.38 **Tschebyscheff-Ungleichung** *Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $f \ge 0$, dann gilt für jedes $C \in (0, \infty]$,*

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \ge C\}) \le \frac{1}{C} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

» $\Omega' = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \ge C\} = f^{-1}([C, \infty]) \in \Sigma$

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \setminus \Omega'} f \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{\Omega'} C \,\mathrm{d}\mu = C\mu(\Omega'). \quad «$$

3.39 **Korollar** *1.) Ist $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$, dann folgt $f = 0$ fast überall.*

2.) Ist $f \ge 0$ und $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist $f(\omega) < \infty$ fast überall auf Ω.

» 1.) Sei $A_n = |f|^{-1}([\frac{1}{n}, \infty])$, dann ist $A_n \in \Sigma$ und da $A_n \subseteq A_{n+1}$, gilt

$$\mu(A_n) \le n \underbrace{\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu}_{=0},$$

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

2.) Folgt direkt aus 3.38. «

3.40 **Korollar** *Seien $f, g : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

(i) Gilt $f = g$ fast überall, dann ist $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \Sigma$.

(ii) Sind f, g integrierbar und $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \Sigma$, dann ist $f = g$ fast überall. ⋊

» "(i)": trivial.

"(ii)": Sei ohne Einschränkung $g = 0$, dann ist für alle $A \in \Sigma$, $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Wähle $A = f^{-1}([0, \infty]) \in \Sigma$, dann ist

$$\int_\Omega f_+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

und aus 3.39 folgt, $f_+ = 0$ fast überall. Analog verfährt man mit f_- und da $f = f_+ - f_- = 0$ fast überall, ist auch $f = g$ fast überall. «

3.41 *Bemerkung.* Für $f, g : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ fast überall},$$

eine Äquivalenzrelation.

Zu jedem $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ existiert ein $\tilde{f} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ so, dass $\tilde{f} \sim f$ und $\tilde{f}(x) < \infty, \ \forall \, x \in \Omega$. Insbesondere gilt für jedes $A \in \Sigma$,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

denn nach 3.39 gilt $\mu(f^{-1}(\{-\infty, \infty\})) = 0$. ⊸

3.42 **Definition** *Sei* $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar, dann heißt die Funktion* μ*-messbar, falls* f *messbar bezüglich* $(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$*, d.h. der Vervollständigung von* (Ω, Σ, μ)*, ist.* ⋊

3.43 *Bemerkung.* 1.) Sei $f \in L_1(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$ und $f = g$ fast überall, dann ist auch $g \in L_1(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$.

2.) Alle Konvergenzsätze gelten auch für μ-messbare Funktionen, wobei die Voraussetzungen nur fast überall gelten müssen. ⊸

Bsp Seien f, f_n messbar, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ fast überall, $|f_n| \le g$ fast überall und $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0. \quad \blacksquare$$

3-G Riemann- und Lebesgueintegral

3.44 **Satz** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt, dann sind äquivalent*

(i) f *ist Riemann-integrierbar,*

(ii) Das Lebesgue-Maß $\lambda^{(1)}$ *der Unstetigkeitsstellen von* f *ist 0.*

Sind beide Voraussetzungen erfüllt, dann gilt

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x. \quad ⋊$$

» Ohne Einschränkung sind $a = 0,\ b = 1$. Wir sagen f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn Ober- und Untersumme gegen denselben Wert konvergieren.

1.) Für das Riemann-Integral benötigen wir eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$, für $n \in \mathbb{N}$ seien also

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left[0, \frac{1}{2^n}\right], Y_j = \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right], \\ m_j &= \inf\left\{f(x) : x \in Y_j\right\}, \\ M_j &= \sup\left\{f(x) : x \in Y_j\right\}, \end{aligned}$$

für $j = 2, 3, \dots, 2^n$. Nun können wir f durch folgende Funktionenfolgen von unten und von oben annähern,

$$g_n(x) := \begin{cases} m_j, & \text{für } x \in Y_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1], \end{cases} \qquad G_n(x) := \begin{cases} M_j, & \text{für } x \in Y_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1], \end{cases}$$

wobei g_n und G_m per definitionem einfach sind. Aufgrund der Konstruktion gilt $g_n \le g_{n+1} \le G_{n+1} \le G_n$.

"Unter"- und "Obersumme" können wir also wie folgt definieren,

$$\begin{aligned} U_n &= \int_{[0,1]} g_n \, \mathrm{d}\lambda^{(1)}, \\ O_n &= \int_{[0,1]} G_n \, \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \end{aligned}$$

Seien $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, $G = \lim\limits_{n\to\infty} G_n$, beide Grenzwerte existieren, da g_n und G_n monoton sind. g und G sind als Grenzwerte einfacher Funktionen messbar und beschränkt, da f beschränkt ist. Nun ist

$$\inf_{[0,1]} f \le g_n(x) \le g(x) \le G(x) \le G_n(x) \le \sup_{[0,1]} f.$$

Nach 3.30 sind $g \cdot \chi_{[0,1]},\ G \cdot \chi_{[0,1]} \in L_1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})^*, \lambda^{(1)})$.

2.) Sei D die Menge der Unstetigkeitsstellen von f, dann ist

$$D \subseteq \underbrace{\left\{ \frac{j}{2^n} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ und } j = 0, \dots, 2^n \right\}}_{\text{abzählbar, also Nullmenge}} \cup \{x \ : \ g(x) \neq G(x)\}$$

3.) "$\Rightarrow$": Sei f Riemann-integrierbar und I der Wert des Integrals, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = I$,

Majorisierte Konvergenz: $|g_n|, |G_n| \le \max\{|\inf f|, |\sup f|\}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_{[0,1]} G \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} \\ \Rightarrow & \int_{[0,1]} (G - g) \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

also ist $G = g$ fast überall und daher ist $\lambda^{(1)}(D) = 0$. Da $g \leq f \leq G$, ist $g = f = G$ fast überall und es gilt

$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_{[0,1]} g \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.) "$\Leftarrow$": Sei $\lambda^{(1)}(D) = 0$, dann ist $g = G$ fast überall und damit auch $g = f = G$ fast überall. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_{[0,1]} g \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_{[0,1]} G \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

und f ist Riemann-integrierbar[5].

3.45 **Satz** *Sei $I = (a,b)$ und $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar über jedem $[c,d] \subseteq I$, dann sind äquivalent*

(i) f ist Lebesgue-integrierbar über I,

(ii) $|f|$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über I, d.h.

$$\lim_{d\uparrow b}\lim_{c\downarrow a} \int_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ existiert.}$$

Falls beide Aussagen gelten, ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}\mu$. ⋊

» Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a < a_n < b_n < b$ und $b_n \uparrow b$, $a_n \downarrow a$ monoton.

1.) Aus 3.44 folgt, dass $|f|\,\chi_{[a_n,b_n]}$ Lebesgue-integrierbar ist, also ist auch $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} |f|\,\chi_{[a_n,b_n]}$ Lebesgue-messbar.

Außerdem ist $|f|\,\chi_{[a_n,b_n]} \leq |f|\,\chi_{[a_{n+1},b_{n+1}]}$, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|\,\chi_{[a_n,b_n]}\,\mathrm{d}\mu \overset{3.33}{=} \int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

[5]Dieser Beweis ist eigentlich unvollständig, da man zeigen müsste, dass jede Riemannsumme konvergiert, man kann den allgemeinen Fall aber aus dem hier konstruierten Spezialfall herleiten.

2.) "(ii)⇒(i)": Aus (ii) folgt, $\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}|f(x)|\,dx$ existiert und $=\int_{\mathbb{R}}|f|\,d\mu<\infty$, also ist f Lebesgue-integrierbar.

3.) "(i)⇒(ii)": $\int_{\mathbb{R}}|f|\,d\mu<\infty$, also existiert $\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}|f(x)|\,dx$ und daraus folgt (i).

4.) Die selben Überlegungen wie in 1.) für f statt $|f|$ und majorisierter statt monotoner Konvergenz mit

$$|f\chi_{[a_n,b_n]}|\le|f|,$$

im Fall dass (i) und (ii) gelten, liefert

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_I f\,d\mu. \quad «$$

3.46 **Bsp** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $I=(0,\infty)$. Bei $x=0$ ist f stetig ergänzbar durch $f(0)=1$

$$\int_1^d \frac{\sin x}{x}\,dx=\underbrace{-\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^d}_{\to\cos 1}-\int_1^d\underbrace{\frac{\cos x}{x^2}}_{|\cdot|\le\frac{1}{x^2}}\,dx<\infty,$$

also ist f über I Riemann-integrierbar, aber

$$\begin{aligned}\int_\pi^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx&=\sum_{j=1}^n\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx\\&\ge\sum_{j=1}^n\frac{1}{(j+1)\pi}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}|\sin x|\,dx\\&=\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{(j+1)\pi}\right)\int_0^\pi|\sin x|\,dx\to\infty \text{ für } N\to\infty,\end{aligned}$$

also ist $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar über I also auch nicht Lebesgue-integrierbar.

Allgemeiner: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$.

$$\begin{cases} \alpha \le 0, & f \text{ ist weder Riemann- noch Lebesgue-integrierbar,} \\ 0 < \alpha \le 1, & f \text{ ist Riemann- aber nicht Lebesgue-integrierbar,} \\ 1 < \alpha < 2, & f \text{ ist sowohl Riemann- als auch Lebesgue-integrierbar,} \\ \alpha \ge 2, & f \text{ ist weder Riemann- noch Lebesgue-integrierbar.} \end{cases} \quad ■$$

3-H Produktmaße

3.47 **Definition/Satz** *Seien (Ω, Σ) und (Ω', Σ') Maßräume, dann ist*

$$h = \{A \times B : A \in \Sigma, B \in \Sigma'\},$$

ein Halbring und $\Sigma \otimes \Sigma' := \sigma(h)$ eine σ-Algebra, die Produkt σ-Algebra.

Für $M \in \Sigma \otimes \Sigma'$ und $a \in \Omega, b \in \Omega'$ seien die Schnitte

$$M_a = \{y \in \Omega' : (a, y) \in M\} \subseteq \Omega',$$
$$M^b = \{x \in \Omega : (x, b) \in M\} \subseteq \Omega,$$

dann gilt $M_a \in \Sigma'$ und $M^b \in \Sigma$. $\rtimes$

» (i) $\mathcal{M} := \left\{M \subseteq \Omega \times \Omega' : M_a \in \Sigma', M^b \in \Sigma, a \in \Omega, b \in \Omega'\right\}$ ist σ-Algebra.

(ii) $h \subseteq \mathcal{M}$: $A \times B \in h \Rightarrow (A \times B)_a = \begin{cases} B, & a \in A, \\ \emptyset, & a \notin A, \end{cases}$

und $\Rightarrow \Sigma \otimes \Sigma' \subseteq \mathcal{M}$. «

Korollar *Sei $f : \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann sind auch die Schnitte $f(x, \cdot) : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f(\cdot, y) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ für $x \in \Omega$, $y \in \Omega'$ messbar.* $\rtimes$

» Sei $C \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann ist

$$(f(x, \cdot))^{-1}(C) = \{y \in \Omega' : f(x, y) \in C\} = f^{-1}(C)_x. \quad «$$

3.48 **Definition/Satz** *Seien* (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') σ*-endliche Maßräume und* h *wie in* 3.47. *Dann ist* $\rho(A \times B) := \mu(A)\mu'(B)$ *mit* $0 \cdot \infty = 0$ *ein* σ*-endliches Prämaß auf* $(\Omega \times \Omega', h)$, *das Prä-Produktmaß.* ⋊

» (i) $\rho(\varnothing) = 0$,

(ii) $\rho(A \times B) = \mu(A)\mu'(B) \geq 0$,

(iii) σ-Additivität: $\rho(\dot\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i) = \sum\limits_{i=1}^n \rho(A_i \times B_i)$

Sei $A \times B = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$, dann gilt insbesondere für $k \neq n$, dass

$$(A_n \times B_n) \cap (A_k \times B_k) = \varnothing \Rightarrow (A_n \cap A_k = \varnothing) \vee (B_n \cap B_k = \varnothing).$$

$$\begin{aligned}
\rho(A \times B) &= \mu(A)\mu'(B) = \int_\Omega \mu'(B)\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mu'((A \times B)_x) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_\Omega \mu'\left(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times B_n)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'((A_n \times B_n)_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu'(B_n)\chi_{A_n}}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \mu'(B_n)\chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\mu'(B_n).
\end{aligned}$$

(i)-(iii) $\Rightarrow$ ρ ist Prämaß.

(iv) μ, μ' sind σ-endlich, es gilt daher

$$\begin{aligned}
\Omega &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m, \ \mu(A_m) < \infty, \\
\Omega' &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \ \mu'(B_n) < \infty.
\end{aligned}$$

Nun ist $\Omega \times \Omega' = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} A_m \times B_n$ und

$$\rho(A_m \times B_n) = \mu(A_m)\mu'(B_n) < \infty,$$

also ist ρ ebenfalls σ-endlich. «

3.49 **Definition/Satz** *Seien* $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$, *σ-endliche Maßräume für* $1 \le j \le n$, *dann existiert genau ein Maß auf* $\bigotimes_{j=1}^n \Sigma_j$, *das Produktmaß* ρ, *mit* $\rho(X_{j=1}^n A_j) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j)$ *für* $A_j \in \Sigma_j$. ⋊

» Der Beweis für zwei Maßräume wird analog zum Forsetzungssatz 3.9 geführt, danach Induktion. «

3.50 **Spezialfall** *Seien* $\Omega_j = \mathbb{R}$, $\Sigma_j = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *die Borel σ-Algebra und* μ_j *das Borel-Maß mit* $\mu((a,b]) = |b-a|$, *dann ist* $\mu^{(n)} := \bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ *das Lebesgue-Borel-Maß auf* $\mathbb{R}^n$. *Die Vervollständigung* $\lambda^{(n)}$ *von* $\mu^{(n)}$ *ist das Lebesgue Maß auf* $\mathbb{R}^n$.

Man kann zeigen, dass $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\left\{X_{j=1}^n (a_j, b_j]\right\}\right)$. ⋊

3.51 **Satz** *Seien* (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') *σ-endlich, dann gilt*

(i) *für* $M \in \Sigma \otimes \Sigma'$ *sind folgende Abbildungen,*

$$\varphi_M : \Omega \to [0,\infty],\ x \mapsto \mu'(M_x),$$
$$\varphi'_M : \Omega' \to [0,\infty],\ y \mapsto \mu(M^y),$$

messbar.

(ii) *Für die Abbildungen,*

$$\rho(M) := \int_\Omega \varphi_M \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mu'(M_x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$
$$\rho'(M) := \int_{\Omega'} \varphi'_M \,\mathrm{d}\mu' = \int_{\Omega'} \mu(M^y)\,\mathrm{d}\mu'(y),$$

gilt $\rho = \rho' = \mu \otimes \mu'$. ⋊

» (i) Setze $\mathcal{M} = \{M \in \Sigma \otimes \Sigma' : \varphi_M \text{ ist messbar}\} \subseteq \Sigma \otimes \Sigma'$.

Sei $A \times B \in \Sigma \times \Sigma'$. Dann ist

$$\varphi_{A\times B} : \Omega \to [0,1],\ x \mapsto \mu'(B)\chi_A(x),$$

messbar nach 3.18 und daher ist $\Sigma \times \Sigma \subseteq \mathcal{M}$.

Zeige: $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra, dann ist $\Sigma \otimes \Sigma' = \mathcal{M}$.

1.) $\varnothing \in \mathcal{M}$, da $\varphi_\varnothing$ trivialerweise messbar ist.

2.) $M \in \mathcal{M} \Rightarrow M^c \in \mathcal{M}$, denn Ω' ist σ-endlich, es existiert also eine Folge Ω'_n mit,

$$\Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega'_n, \quad \Omega'_1 \subseteq \Omega'_2 \subseteq \ldots, \quad \mu'(\Omega'_n) < \infty.$$

$$\begin{aligned}\mu'(M_x^c) := \lim_{n\to\infty} \mu'\left(\Omega'_n \cap M_x^c\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu'\left(\Omega'_n \setminus (M_x \cap \Omega'_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu'\left(\Omega'_n\right) - \mu'(M_x \cap \Omega'_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu'\left(\Omega'_n\right) - \mu'((M \cap (\Omega \times \Omega'_n))_x),\end{aligned}$$

und alle Mengen sind messbar, also folgt mit 3.24, dass M_x^c messbar ist.

3.) Sei $M = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} M_n$, $M_n \in \mathcal{M}$. Es genügt hier disjunkte Vereinigungen zu betrachten, also

$$\mu'(M_x) = \mu'\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (M_n)_x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'((M_n)_x),$$

und $\mu'((M_n)_x)$ ist messbar.

(ii) Zeige ρ ist Maß auf $\Sigma \otimes \Sigma'$, $\rho(A \times B) = \mu(A)\mu'(B)$, also ist ρ Fortsetzung desselben Prämaßes wie $\mu \otimes \mu'$ und da die Fortsetzung eindeutig ist, folgt $\rho = \mu \otimes \mu'$. «

3.52 **Satz von Fubini I** *Seien* (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') *σ-endlich,* $f : \Omega \times \Omega' \to [0, \infty]$ *messbar, dann sind die Abbildungen*

$$f_1 : \Omega \to [0, \infty],\ x \mapsto \int_{\Omega'} f(x, \cdot)\, \mathrm{d}\mu',$$
$$f_2 : \Omega' \to [0, \infty],\ y \mapsto \int_{\Omega} f(\cdot, y)\, \mathrm{d}\mu,$$

messbar und es gilt,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu'(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu'(y). \quad \rtimes\end{aligned}$$

» Sei $M \in \Sigma \otimes \Sigma'$. Nach 3.51 ist die Abbildung,

$$(\chi_M)_2 : y \mapsto \mu(M^y) = \int_\Omega \chi_{M^y}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

messbar und es gilt,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} \chi_M\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = (\mu\otimes\mu')(M) \overset{3.51}{=} \rho(M) = \int_{\Omega'} \mu(M^y)\,\mathrm{d}\mu'(y)\\ = \int_{\Omega'}\left(\int_\Omega \chi_M\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu'(y).\end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität des Integrals gilt für jede positive einfache Funktion s,

$$\int_{\Omega\times\Omega'} s(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \int_{\Omega'}\left(\int_\Omega s(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu'(y),$$

insbesondere ist $y \mapsto \int_\Omega s(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ messbar.

3.37 besagt, dass eine Folge (s_n) positiver einfacher Funktionen existiert mit $s_n \uparrow f$. Mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz, erhalten wir somit die Behauptung,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') &= \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega'} s_n\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu')\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega'}\left(\underbrace{\int_\Omega s_n(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)}_{:=(s_n)_2 \text{ messbar, monotonw.}}\right)\mathrm{d}\mu'(y)\\ &= \int_{\Omega'}\left(\underbrace{\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)}_{:=f_2}\right)\mathrm{d}\mu'(y),\end{aligned}$$

und f_2 ist Grenzwert von $(s_n)_2$ also messbar. «

3.53 **Satz von Fubini II** *Seien (Ω,Σ,μ), (Ω',Σ',μ') σ-endlich und $f : \Omega\times\Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so gilt,*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} |f|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') &= \int_\Omega\left(\int_{\Omega'} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu'(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \qquad (*)\\ &= \int_{\Omega'}\left(\int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu'(y).\end{aligned}$$

Ist eines der Integrale endlich, dann ist $f \in L_1(\Omega \times \Omega', \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu')$ und es gilt,

$$f(\cdot, y) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu), \quad \text{für fast alle } y \in \Omega', \tag{**}$$
$$f(x, \cdot) \in L_1(\Omega', \Sigma', \mu'), \quad \text{für fast alle } x \in \Omega,$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x,y) \,\mathrm{d}\mu'(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu'(y). \quad \rtimes\end{aligned}$$

Bemerkung. Die iterierten Integrale sind eventuell nicht definiert, da z.B. $f_1(x) = \int_{\Omega'} f(x,y) \,\mathrm{d}\mu'(y)$ nur für fast alle $x \in \Omega$ definiert ist.

Zu Abhilfe sei $A := \{x \in \Omega : \int_{\Omega'} |f(x,y)| \,\mathrm{d}\mu'(y) = \infty\}$, dann ist A messbar mit $\mu(A) = 0$ (siehe Beweis). Nun kann man f_1 auf Ω messbar fortsetzten zu $\tilde{f}_1$ durch,

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A^c, \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

damit kann das Integral definiert werden durch

$$\int_{\Omega} f_1 \,\mathrm{d}\mu := \int_{\Omega} \tilde{f}_1 \,\mathrm{d}\mu. \quad \multimap$$

» 1.) f ist messbar, also ist auch $|f|$ messbar und mit Fubini I (3.52) folgt die Gleichheit in (*). Außerdem sind f_+ und f_- messbar und damit auch

$$f_{1,+}(\cdot, y), f_{2,+}(x, \cdot), f_{1,-}(\cdot; y), f_{2,-}(x, \cdot).$$

2.) Sei nun $\int_{\Omega\times\Omega'} |f| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') < \infty$, dann ist $f \in L_1(\Omega \times \Omega', \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu')$ und

$$g_1(x) := \int_{\Omega'} |f(x, \cdot)| \,\mathrm{d}\mu',$$

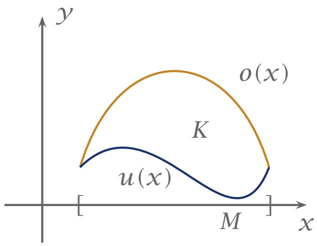
ist ebenfalls L_1. Mit 3.30 folgt, dass

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |g_1(x)| = \infty\}\right) = 0.$$

Also sind $f(x, \cdot)$ und $f(y, \cdot)$ μ-f.ü. integrierbar (**).

Der Rest folgt durch Anwendung von 3.52 auf f_+ und f_-. «

3.54 **Definition/Satz** *Eine Menge K heißt x-projezierbar, falls es Funktionen $o(x)$ und $u(x)$ gibt, sodass der Einschluss der Graphen gerade K ist.*



Sei (Ω, Σ, μ) σ-endlich, $\Omega' = \mathbb{R}$, $\Sigma' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, μ' das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ und $M \in \Sigma$.

Sind $u, o : M \to \mathbb{R}$ messbar, $u \leq o$ auf M, so gilt,

$$K = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega' : x \in M \wedge u(x) \leq y \leq o(x)\} \in \Sigma \otimes \Sigma',$$

und für jede Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$ ist $f(x,\cdot) : [u(x), o(x)] \to \mathbb{R}$ messbar für festes $x \in M$. Ist weiter

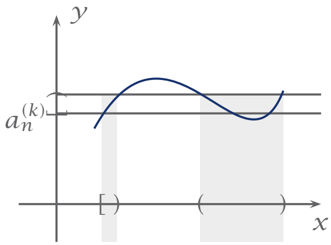
$$\int_M \left(\int_{[u(x),o(x)]} |f(x,y)| \,\mathrm{d}\mu'(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

so gilt $f \in L_1(K, \Sigma \otimes \Sigma \cap K, \mu \otimes \mu'|_K)$ und

$$\int_K f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') = \int_M \left(\int_{[u(x),o(x)]} f(x,y) \,\mathrm{d}\mu'(y) \right) \mathrm{d}\mu(x). \quad \rtimes$$

» (a) Sei $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \left[a_n^{(k)}, a_n^{(k)} + \frac{1}{k}\right)$, dann gilt $\sigma^{-1}\left(\left[a_n^{(k)}, a_n^{(k)} + \frac{1}{k}\right)\right) \in \Sigma$ und

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sigma^{-1}\left(\left[a_n^{(k)}, a_n^{(k)} + \frac{1}{k}\right)\right) \times (-\infty, a_n^{(k)} + \frac{1}{k})}_{\in \Sigma \otimes \Sigma'}$$
$$= \{(x,t) : x \in M, t \leq o(x)\}$$



(b) Rest folgt aus Fubinit mit z.B.,

$$\begin{aligned}\int_K |f| \,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') &= \int_{\Omega\times\Omega'} |f|\,\chi_K\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu')\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)| \underbrace{\chi_K(x,t)}_{=\chi_M(x)\chi_{[u(x),o(x)]}(t)} \mathrm{d}\mu'(t)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_M\left(\int_{[u(x),o(x)]} |f(x,t)|\,\mathrm{d}\mu'(t)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$ «

3.55 **Bsp** Kegel, $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 3 \text{ und } x^2+y^2\le z^2\}$.

Sei μ das Lebesgue Maß im $\mathbb{R}^3$, wir betrachten K als,

$$K = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2\le 9 \wedge \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\right\},$$

dann ist

$$\int_K z\,\mathrm{d}\mu^{(3)} = \int_{x^2+y^2\le 9}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z\,\mathrm{d}\mu^{(1)}(z)\right)\mathrm{d}\mu^{(2)}(x,y),$$

da für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Lebesgue- und Riemann-

Integral übereinstimmen, ist

$$\ldots = \frac{1}{2} \int\limits_{x^2+y^2 \le 9} 9 - x^2 - y^2 \, \mathrm{d}\mu^{(2)}(x,y)$$

$$\overset{3.54}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{-3}^{3} \left(\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 9 - x^2 - y^2 \, \mathrm{d}\mu^{(1)}(y) \right) \mathrm{d}\mu^{(1)}(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-3}^{3} \left[(9-x^2)y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \int\limits_{-3}^{3} (9-x^2)^{3/2} \, \mathrm{d}\mu^{(1)}(x)$$

Substitution: $x = 3 \sin \varphi, \;\; \mathrm{d}x = 3 \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi$,

$$= \frac{2}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (9 \cos^2 \varphi)^{3/2} 3 \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3} 3^4 \underbrace{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{= \frac{3}{8}\pi}$$

$$= \frac{81}{4} \pi < \infty.$$

Das letzte Integral existiert also und ist endlich, wenn wir die Gleichung nun “zurückgehen” sehen wir, dass alle Integrale existieren und endlich sind.

Das berechnete Integral beschreibt im Übrigen das Trägheitsmoment des Kreisels bei Rotation um die z-Achse. ■

3.56 **Definition** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $\phi : U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphimus ($k \ge 1$), falls ϕ bijektiv und ϕ, ϕ^{-1} beide C^k sind.* ⋊

3.57 *Bemerkung.* Der Satz über Umkehrabbildungen besagt, dass für eine Abbildung $\phi \in C^1(U \to V), x_0 \in U$ mit $\det \mathrm{D}\phi(x_0) \neq 0$, eine Umgebung $U(x_0) \subseteq U$ existiert, so dass

(i) $\phi\big|_{U(x_0)}$ injektiv,

(ii) $\phi(U(x_0))$ offen,

(iii) $\phi^{-1} \in C^1(\phi(U(x_0)) \to U(x_0))$,

(iv) $\mathrm{D}\phi^{-1}(\phi(x_0)) = (\mathrm{D}\phi(x_0))^{-1}$. ⊸

3.58 **Satz** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U \to V)$ bijektiv, dann sind äquivalent,*

(i) *ϕ ist C^1 Diffeomorphismus,*

(ii) $\det \mathrm{D}\phi \neq 0$ *auf* U. $\rtimes$

3.59 **Transformationssatz** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, $A \subseteq U$ messbar, dann gilt*

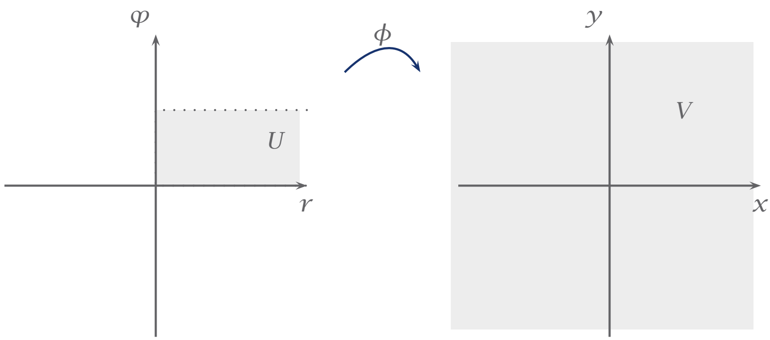
$$\int_{\phi(A)} f \,\mathrm{d}\mu^{(n)} = \int_A (f \circ \phi)\, |\det D\phi| \,\mathrm{d}\mu^{(n)},$$

falls $f : \phi(A) \to [0, \infty]$ messbar oder $f \in L_1(\phi(A), \Sigma \cap \phi(A), \mu|_{\phi(A)})$. $\rtimes$

3.60 **Bsp** Sei $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$.

$$\phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2\pi, & y < 0 \end{cases} \end{pmatrix}$$



Die Funktionaldeterminante von ϕ ist,

$$\det \mathrm{D}\phi(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r > 0,$$

da $r \in (0,\infty)$. Damit ist ϕ regulär in U, also C^1-Diffeomorphismus und es gilt,

$$\int_V f \,\mathrm{d}\mu = \int_U f \circ \phi \left|\det \mathrm{D}\phi\right| \,\mathrm{d}\mu = \int_U f \circ \phi \, r \,\mathrm{d}\mu,$$

falls f geeignet. V entspricht dem $\mathbb{R}^2$ ohne die positive reelle Halbachse $\mathbb{R}_+$, das Integral soll jedoch über den ganzen $\mathbb{R}^2$ berechnet werden. Jedoch ist $\mathbb{R}_+$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ eine Nullmenge, denn

$$\begin{aligned}&\mu^{(2)}\left(\{(x,0) : x \geq 0\}\right) = \mu^{(2)}\left([0,\infty) \times \{0\}\right) = \mu^{(1)}([0,\infty))\mu^{(1)}(\{0\}) = 0,\\ &\mu^{(2)}\left(\{(x,2\pi) : x \geq 0\}\right) = 0.\end{aligned}$$

Daher gilt für das Integral,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\mu &= \int\limits_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu(r,\varphi)\\ &\overset{\text{Fubini } *}{=} \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

* ist anwendbar, falls f messbar und positiv oder $f \in L_1$.

Wir wollen nun damit erneut das Trägheitsmoment des Kegels aus Beispiel 3.55 berechnen,

$$\begin{aligned}\int_K z \,\mathrm{d}\mu^{(3)} &= \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2 \leq 9} 9 - (x^2+y^2) \,\mathrm{d}\mu^{(3)}(x,y)\\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{r=0}^{3} \left(\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (9-r^2) r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3\\ &= \pi \left(\frac{3^4}{2} - \frac{3^4}{4} \right) = \frac{3^4}{4} \pi.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Koordinatentransformation oft schneller und eleganter ans Ziel führt.

3.61 *Bemerkung.* **Satz von Sard** *Sei $\phi \in C^1(U \to \mathbb{R}^n)$, $K := \{x \in U : \mathrm{D}\phi(x) = 0\}$. Dann ist $\mu(\phi(K)) = 0$.* $\rtimes$

Dadurch können wir den Transformationssatz verallgemeinern, es muss also nur vorausgesetzt werden, dass $\phi \in C^1(U \to V)$ und $\phi\big|_{U\setminus K}$ injektiv. $\multimap$

3-I $\mathcal{L}^p$-Räume

3.62 *Vorbemerkung.* Ist $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{C}$, so definieren wir,

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Sätze, die die Anordnung von $\mathbb{R}$ nicht benötigen, also insbesondere die Sätze von Lebesgue und Fubini, gelten auch für diese Funktionen.

Wir schreiben nun $\hat{\mathbb{K}}$, wenn sowohl $\overline{\mathbb{R}}$ also auch $\mathbb{C}$ möglich ist. ⊸

3.63 **Definition** *Sei $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \hat{\mathbb{K}}$ messbar.*

1.) Für $1 \leq p < \infty$, sei

$$N_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p},$$

denn $|f|^p = (\cdot)^p \circ |f|$ ist messbar[6].

2.) Für $p = \infty$, heißt

$$N_\infty(f) := \inf \{ c \in [0, \infty] : |f| \leq c \ \mu\text{-f.ü.} \} := \operatorname{esssup}_\Omega(f),$$

wesentliches Supremum von f. ⋊

3.64 **Korollar** *1.) Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt,*

(i) $0 \leq N_p(f) \leq \infty$,

(ii) $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.) $|f| \leq N_\infty(f)$ μ-f.ü..

3.) $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$. ⋊

» 1.) Offensichtlich.

[6] Wir setzen $\infty^p = \infty$

2.) per definitionem gilt $|f| \leq N_\infty + \varepsilon$ μ-f.ü., $\forall\ \varepsilon > 0$, also ist

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > N_\infty(f)\}\right)\\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > N_\infty(f) + \frac{1}{n}\right\}}_{\mu(\cdot)=0,\text{ nach Definition von } N_\infty}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > N_\infty(f) + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

3.) $|f+g|(\omega) \leq |f|(\omega) + |g|(\omega) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ μ-f.ü.. «

3.65 **Definition** *$p,q \in [1,\infty]$ heißen konjugiert, falls sie eine dieser Bedingungen erfüllen,*

(i) $p,q \neq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(ii) $p = 1, q = \infty$ oder $p = \infty, q = 1$. ⋊

Wir werden sehen, dass $p = q = 2$ ein wichtiger Spezialfall ist.

3.66 **Satz** *Seien $f,g : (\Omega,\Sigma,\mu) \to \hat{\mathbb{K}}$ messbar.*

1.) Für $1 < p,q < \infty$ und p,q konjugiert, gilt die Höldersche Ungleichung,

$$\underbrace{\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}\mu}_{=N_1(fg)} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q}}_{=N_p(f)N_q(g)}.$$

2.) Für $1 \leq p < \infty$ gilt die Minkowski Ungleichung,

$$\underbrace{\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1/p}}_{=N_p(f+g)} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{1/p}}_{N_p(f)+N_p(g)}.$$ ⋊

» 1.) (a) Wir betrachten zunächst die Sonderfälle.

Ist $N_p(f) = 0$, dann ist $f = 0$ μ-f.ü. also auch $fg = 0$ μ-f.ü. und damit folgt $N_1(fg) = 0$.

Ist $N_p(f) > 0$ und $N_q(g) = \infty$, dann folgt die Behauptung trivialerweise.

(b) Sei nun $0 < N_p(f), N_q(g) < \infty$.

Wir wollen uns auf den Spezialfall,

$$N_p(f) = 1 \text{ und } N_q(g) = 1 \Rightarrow \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq 1, \tag{*}$$

zurückziehen, denn für beliebige f, g ist,

$$N_p\left(\frac{f}{N_p(f)}\right) = 1, \; N_q\left(\frac{g}{N_q(g)}\right) = 1,$$

und damit folgt,

$$1 \geq \int_\Omega \left| \frac{f}{N_p(f)} \frac{g}{N_q(g)} \right| \, d\mu = \frac{1}{N_p(f)} \frac{1}{N_q(g)} \int_\Omega |fg| \, d\mu.$$

(c) Hilfsungleichung:

Seien $0 < x, y < \infty$, dann existieren $u, v \in \mathbb{R}$, so dass

$$x = e^{\frac{1}{p}u}, \; y = e^{\frac{1}{q}v}.$$

Die Abbildung $t \mapsto e^t$ ist konvex, setze nun $\lambda = \frac{1}{p}$, dann ist $\frac{1}{q} = 1 - \lambda$ und daher gilt,

$$\underbrace{e^{\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v}}_{= x \cdot y} = e^{\lambda u + (1-\lambda)v} \leq \lambda e^u + (1-\lambda)e^v = \underbrace{\frac{1}{p}e^u + \frac{1}{q}e^v}_{= \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q}.$$

Somit ist $x \cdot y \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ für $x, y \in (0, \infty)$. Offensichtlich gilt die Gleichung sogar für $x, y \in [0, \infty]$.

(d) Wir zeigen nun den Spezialfall, indem wir über die Hilfsungleichung integrieren, sei also $N_p(f) = N_q(g) = 1$,

$$\int_\Omega |f \cdot g| \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_\Omega |g|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2.) Für $p = 1$ ist dies gerade die Dreiecksungleichung für das Integral. Sei nun $1 < p < \infty$, dann gilt ohne Einschränkung $N_p(f+g) > 0$ und $N_p(f),\ N_p(g) < \infty$. Es gilt also

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\le (2\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p \max\left\{|f|^p, |g|^p\right\} \\ &\le 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right), \end{aligned}$$

also ist $N_p(f+g) < \infty$. Es folgt daher,

$$\begin{aligned} N_p(f+g)^p &= \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_\Omega |f|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\le N_p(f) N_q\left(|f+g|^{p-1}\right) + N_p(g) N_q\left(|f+g|^{p-1}\right) \\ &= \left(N_p(f) + N_p(g)\right)\left(\int_\Omega |f+g|^{q(p-1)}\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

p und q sind assoziert, es gilt daher $\frac{p}{q} = p-1$,

$$\begin{aligned} &= \left(N_p(f) + N_p(g)\right)\left(\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p/q} \\ &= \left(N_p(f) + N_p(g)\right) N_p(f+g)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Nun ist $N_p(f+g) < \infty$ also gilt auch

$$N_p(f+g)^{p-\frac{p}{q}} \le N_p(f) + N_p(g),$$

und $p - \frac{p}{q} = 1$. «

3.67 **Korollar** *1.) Für $1 \le p, q \le \infty$ konjugiert, gilt*

$$N_1(f \cdot g) \le N_p(f) N_q(g).$$

2.) Für $1 \le p \le \infty$ gilt,

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g).$$ ⋊

» 1.) Wir müssen noch den Fall $p = 1, q = \infty$ betrachten, doch hier ist

$$N_1(f \cdot g) = \int_\Omega \underbrace{|f \cdot g|}_{\le \|f\|_\infty |g| \ \mu\text{-f.ü.}} \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_\infty \int_\Omega |g| \, \mathrm{d}\mu.$$

2.) Für $p = \infty$ siehe 3.64. «

3.68 **Korollar** *Sei $1 \le p \le \infty$, dann ist*

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \hat{\mathbb{K}} : f \text{ ist messbar und } N_p(f) < \infty \right\},$$

ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. N_p ist eine Seminorm auf $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. ⋊

Streng genommen ist L^p mit der gewöhnlichen Addition kein Vektorraum, denn es sind auch auch Funktionen zugelassen, so dass auf einer Nullmenge gilt $f(\omega) = \pm\infty$ und $g(\omega) = \mp\infty$ und dann ist $f + g$ nur μ-f.ü. definiert.

Darüber hinaus ist L^p aber auch kein normierter Vektorraum, denn $N_p(f) = 0$ impliziert lediglich, dass $f = 0$ μ-f.ü. und nicht, dass f die Nullfunktion ist. Wir können dieses Problem aber mithilfe des Faktorraums lösen.

3.69 **Definition** *Sei $1 \le p \le \infty$, dann ist*

$$N := \left\{ f : \Omega \to \hat{\mathbb{K}} : N_p(f) = 0 \right\} = \left\{ f : \Omega \to \hat{\mathbb{K}} : f = 0 \ \mu\text{-f.ü.} \right\},$$

ein Unterraum von L^p.

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N,$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf L^p. Seien $[f]$ die Äquivalenzklassen mit Vertreter f, dann ist

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{[f] : f \in L^p\} = L^p / N,$$

ein Vektorraum und $\|[f]\|_p := N_p(f)$ eine Norm für $[f] \in \mathcal{L}^p$. ⋊

Bei Elementen in $\mathcal{L}^p$ handelt es sich also um Vertreter einer Äquivalenzklasse. Aussagen die für die Äquivalenzklasse $[f]$ gelten, gelten daher für einen Vertreter f stets nur μ-f.ü.. Außerdem muss man beispielsweise bei Widerspruchsargumenten darauf achten, den Widerspruch für die ganze Äquivalenzklasse herbeizuführen und nicht nur für einen einzigen Vertreter.

Wir wollen nun die Äquivalenzklassen untersuchen. Dazu schreiben wir im Folgenden $\mathcal{L}^p(\Omega)$ bzw. $\mathcal{L}^p$ für $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und meinen mit f stets die Äquivalenzklasse $[f]$.

Bemerkung. Jede Klasse $[f]$ enthält ein Element $\tilde{f}$ mit $\left|\tilde{f}\right| < \infty$ auf ganz Ω. ⊸

Besonders sind wir daran interessiert, ob jede Äquivalenzklasse ein stetiges Element enthält und wenn ja, ob dieses eindeutig ist. Die Eindeutigkeit ist wie des Öfteren eine leichte Angelegenheit.

3.70 **Satz** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C(\Omega) \cap \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\|f - g\|_p = 0$, dann ist $f = g$ auf ganz Ω. Insbesondere enthält jede Äquivalenzklasse höchstens ein stetiges Element.* ⋊

» Seien f, g wie vorausgesetzt und $\|f - g\|_p = 0$, dann ist $f = g$ μ-f.ü.. Angenommen es gibt ein $\omega \in \Omega$ mit $f(\omega) \neq g(\omega)$, dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f und g auch eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von ω auf der f und g verschieden sind. Aber U ist offen in $\mathbb{R}^n$ und nichtleer und daher gilt $\mu(U) \neq 0$, ein Widerspruch. «

Für die Existenz müssen wir jedoch bestimmte Voraussetzung an die Äquivalenzklasse treffen. Dies überschreitet jedoch den Rahmen der Vorlesung, weshalb wir den folgenden Satz nicht beweisen werden.

3.71 **Sobolevsche Einbettung** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindestens $\frac{n}{2}$-mal "schwach differenzierbar" und alle Ableitungen in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, dann ist f stetig, d.h. $[f]$ enthält ein stetiges Element.* ⋊

3.72 **Satz** *1.) Seien $\mu(\Omega) < \infty$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ und $f \in \mathcal{L}^{p'}$, dann ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und es gilt $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f\|_{p'}$.*

2.) Seien $1 \leq p < p' \leq \infty$*, dann ist*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \setminus \mathcal{L}^{p'}(\Omega) \neq \emptyset,$$
$$\mathcal{L}^{p'}(\Omega) \setminus \mathcal{L}^p(\Omega) \neq \emptyset.$$

3.) Seien $\Omega = \mathbb{N}, \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu(M) = \operatorname{card} M$ *und* $1 \leq p \leq p' \leq \infty$*, dann folgt*

$$l^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}) \subseteq l^{p'}. \quad \rtimes$$

» Der Beweis sei als Übungsaufgabe überlassen. «

3.73 **Satz von Fischer-Riesz** *Für* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *ein Banachraum.* $\rtimes$

» 1.) Sei $p = \infty$ und (f_n) Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Setze

$$A_n := \{\omega \in \Omega : |f_n(\omega)| > \|f_n\|_\infty\},$$
$$B_{k,l} := \{\omega \in \Omega : |f_k(\omega) - f_l(\omega)| > \|f_k - f_l\|_\infty\},$$

dann ist klar, dass $\mu(A_n) = \mu(B_{k,l}) = 0$. Ebenso ist,

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} B_{k,l},$$

als Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen eine Nullmenge.

Für $\omega \in \Omega \setminus E$ gilt $|f_k(\omega) - f_l(\omega)| \leq \|f_k - f_l\|_\infty \to 0$ für $k, l \to \infty$, d.h. $f_k(\omega) \to f(\omega)$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus E$. Setze

$$f(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega), & \omega \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \omega \in E, \end{cases}$$

dann ist $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$ μ-f.ü. also messbar und es gilt,

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

für $n \geq N_\varepsilon$ und $\omega \in \Omega \setminus E$. Damit ist $\|f_n - f\| < \varepsilon$ und $f - f_n \in \mathcal{L}^\infty$.

Insbesondere ist $f = \underbrace{f - f_n}_{\in \mathcal{L}^\infty} + f_n \in \mathcal{L}^\infty$.

2.) Sei $1 \leq p < \infty$ und (f_n) Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p$.

Wähle n_1 mit $||f_{n_1} - f_m||_p < \frac{1}{2}$ für $m > n_1$, $n_2 > n_1$ mit $||f_{n_2} - f_m||_p < \frac{1}{4}$ für $m > n_2$ usw., dann ist

$$||f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|| \leq \frac{1}{2^k}.$$

(a) Grenzfunktion f konstruieren:

$$g_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} f_{n_k}(\omega) - f_{n_{k+1}}(\omega),$$
$$g(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(\omega) - f_{n_{k+1}}(\omega).$$

Dann ist $||g_n||_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_{n_k} - f_{n_{k+1}}||_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} < 1$ und es gilt,

$$0 \leq g_n \uparrow g \Rightarrow 0 \leq g_n^p \uparrow g^p,$$

und g^p ist messbar. Wir können also den Satz der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten,

$$||g||_p^p = \int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} ||g_n||_p^p \leq 1.$$

g_n konvergiert daher μ-f.ü. absolut und daher konvergiert auch $(f_{n_1} - f_{n_k})_k$ gegen eine messbare Funktion und es gilt,

$$f_{n_{l+1}} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{l} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

μ-f.ü.. Sei $f = \lim_{l\to\infty} f_{n_l}$.

(b) Zeige $f \in \mathcal{L}^p$ und $||f_n - f||_p \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ mit $||f_n - f_m||_p < \varepsilon$ für $n, m > N$, dann besagt das Lemma von Fatou,

$$\begin{aligned}||f_n - f||_p^p &= \int_\Omega |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{l\to\infty} |f_n - f_{n_l}|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{n_l}|^p \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{l\to\infty} ||f_n - f_{n_l}||_p^p \\ &\leq \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Also ist $f - f_n \in \mathcal{L}^p$ und damit folgt $f = \underbrace{f - f_n}_{\in \mathcal{L}^p} + \underbrace{f_n}_{\in \mathcal{L}^p} \in \mathcal{L}^p$. «

3.74 **Satz von Weyl** *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und (f_n) Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^p$ und eine Teilfolge (f_{n_k}) so, dass*

$$||f_n - f|| \to 0 \textit{ und } f_{n_k} \twoheadrightarrow f \ \mu\textit{-f.ü.}. \quad \rtimes$$

» Ergibt sich aus der Konstruktion im Satz von Fischer-Riesz. «

3.75 **Satz** *Sei $1 \leq p < \infty$.*

1.) Für eine einfache Funktion s gilt,

$$s \in \mathcal{L}^p(\Omega) \Leftrightarrow \mu(\{\omega \in \Omega : s(\omega) \neq 0\}) < \infty.$$

2.) $\{s \in \mathcal{L}^p(\Omega) : s \textit{ ist einfach}\}$ liegt dicht in $\mathcal{L}^p$. $\rtimes$

» 1. Übung.

2. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $f \geq 0$. Dann existiert eine Folge (s_n) einfacher Funktionen mit $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ und $s_n \to f$. f majorisiert s_n und $f - s_n$, es gilt daher $s_n \in \mathcal{L}^p$ sowie,

$$\lim_{n\to\infty} ||f - s_n||_p^p = \lim_{n\to\infty} \int = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f - s_n| \,\mathrm{d}\mu = 0. \, |f - s_n|^p \,\mathrm{d}\mu$$

Für allgemeines f betrachte f_+ und f_-.

3.76 **Ausblick** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann liegt*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : \operatorname{supp} f \textit{ ist kompakt}\},$$

dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. $\rtimes$

3.77 *Bemerkung.* $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt,

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu,$$

d.h. vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm,

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2 \,.$$

Dabei erfüllt die Höldersche Ungleichung,

$$|\langle f, g \rangle| \le \int_\Omega |f\overline{g}| \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_2 \, \|g\|_2 \,,$$

die Cauchy-Schwartzsche-Ungleichung. ⊸

4 Volumen und Flächenintegrale, Vektoranalysis

4-A Mannigfaltigkeiten

4.1 **Definition** *1.) Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem $x \in S$ eine in der Spurtopologie offene Umgebung $U(x)$ auf S und ein Homöomorphismus $\phi_x : K_1^{(k)}(0) \to U(x)$ existiert.*

$(\phi_x, U(x))$ heißt Karte.

2.) Eine Menge,

$$A(S) := \left\{(\phi_{x_j}, U(x_j)) \,:\, 1 \le j \le N\right\} = \left\{(\phi_j, U_j) \,:\, 1 \le j \le N\right\},$$

mit $\bigcup_{i=j}^{N} U_j = S$ heißt Atlas von S.

3.) S ist von der Klasse $m \in \mathbb{N}_0$ $(S \in C^m)$, falls ein Atlas $A(S)$ existiert, so dass alle ϕ_j C^m-Diffeomorphismen sind. ⋊

4.2 **Bsp** Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| = 1\}$, sowie

$$\phi_{1,2}(y_1, y_2) = \left(y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}\right),$$
$$\phi_{3,4}(y_1, y_2) = \left(\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}, y_1, y_2\right),$$
$$\phi_{5,6}(y_1, y_2) = \left(y_1, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}, y_2\right),$$

dann hat $A(S)$ genau 3 Elemente und $S \in C^\infty$.

Alternativ kann man Kugelkoordinaten zur Beschreibung der Fläche verwenden,

$$\phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, sowie $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Hier stoßen wir jedoch zunächst auf Probleme. Erstens ist der Definitionsbereich von ϕ keine offene Menge und zweitens ist ϕ nicht bijektiv, denn bei $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ ist ϕ nicht eindeutig.

Trotzdem eignen sich die Kugelkoordianten für Berechnungen, denn wählt man $0 < \varphi < 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, dann ist der Definitionsbereich offen und ϕ bijektiv und es wurden lediglich Nullmengen entfernt. ■

Bei Mannigfaltigkeiten mit Rand wird ein halber Einheitskreis mit Rand zur Parametrisierung verwendet.

4.3 **Definition** *1.) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $k \geq 2$, wenn es zu jedem $x \in S$ eine S offene Umgebung $U(x)$ und ein Homöomorphismus ϕ_x existiert mit,*

$$\phi_x : K_1^{(k)}(0) \to U(x), \quad \text{oder}, \quad \phi_x : K_{1,+}^{(k)}(0) \to U(x),$$

mit $K_{1,+}^{(k)}(0) = K_1^{(k)}(0) \cap \{x : x_k \geq 0\}$. Der Atlas von S wird analog zu 4.1 definiert.

2.) $x \in S$ heißt Randpunkt von S, wenn $\phi_x^{-1}(x) \in K_{1,+}^{(k)}(0) \cap \{x : x_k = 0\}$.

∂S, der Rand von S ist definiert als die Menge der Randpunkte von S. ⋊

4.4 *Bemerkung.* Die Festlegung $x \in \partial S$ hängt nicht von der Wahl der Karte ab, denn seien $(\phi_1, U_1), (\phi_2, U_2)$ Karten und $x \in U_1 \cap U_2$, so bildet $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ innere Punkte auf innere Punkte ab. ⊸

4.5 **Satz** *Sei S k-dimensionale C^m-Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist ∂S eine $k-1$-dimensionale C^m-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Insbesondere gilt,*

$$\partial(\partial S) = \varnothing. \quad ⋊$$

» Seien $x \in \partial S$, $\phi_x \in C^m(K_{1,+}^{(k)}(0) \to S)$,

$$\tilde{\phi}_x := \phi_x|_{K_{1,+}^{(k)}(0) \cap \{x : x_k = 0\}},$$

dann ist $\tilde{\phi} \in C^m(K_{1,+}^{(k-1)}(0) \to U(x) \cap \partial S)$ ein C^m-Diffeomorphismus. «

Bsp Eine einfache Mannigfaltigkeit ist eine geschlossene Kurve γ im $\mathbb{R}^n$.

Die Definition erlaubt eine Überlappung von Karten, bei denen γ einen gegenläufigen Durchlaufsinn hat. ■

4.6 **Orientierung des Raums** *Zwei Basen* $(b_1, \dots, b_n)$ *und* $(c_1, \dots, c_n)$ *des* $\mathbb{R}^n$ *heißen gleich orientiert, falls*

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} c_i, \text{ und } \det(\alpha_{ji}) > 0,$$

oder äquivalent,

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_j, \text{ und } \det(\beta_{ij}) > 0. \quad \rtimes$$

» Die Äquivalenz sieht man sofort, da $\det(\alpha_{ij}) = \dfrac{1}{\det(\beta_{ij})}$. «

4.7 **Definition/Satz** *Seien* S *eine* k*-dimensionale* C^1*-Mannigfaltigkeit,* $(\phi_1, U_1), (\phi_2, U_2)$ *zwei Karten und* $x \in U_1 \cap U_2$.

Der Tangentialraum in x_0 *ist der lineare Raum,*

$$T_{x_0} := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(y_0), \dots, \frac{\partial \phi_1}{\partial y_k}(y_0) \right\}.$$

Dieser Raum hat die Dimension k *und es gilt,*

$$T_{x_0} := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial z_1}(z_0), \dots, \frac{\partial \phi_2}{\partial z_k}(z_0) \right\}. \quad \rtimes$$

» T_{x_0} ist der Aufspann der Spaltenvektoren in $\mathrm{D}\phi_1(y_0)$. Nun ist ϕ_1 ein C^1-Diffeomorphismus zwischen $U(x_0)$ und $K_1^{(k)}(y_0)$ und daher hat $\mathrm{D}\phi(y_0)$ maximalen Rang also k. Dies kann man auch so sehen,

$$\mathrm{id}_y = \phi_1^{-1} \circ \phi_1 : K_1^{(k)}(0) \to K_1^{(k)}(0).$$

Die Kettenregel besagt nun,

$$\mathrm{Id}_k = \mathrm{D}\phi_1^{-1}(\phi_1(y_0))\mathrm{D}\phi_1(y_0),$$

und Id_k hat Rang k, also haben die Faktoren auf der rechten Seite beide mindestens Rang k und damit ist $\operatorname{rg} \mathrm{D}\phi_1(y_0) \geq k$.
Daher sind die Spaltenvektoren in $\mathrm{D}\phi_1(y_0)$ linear unabhängig und T_{x_0} hat die Dimension k.

T_{x_0} ist auch unabhängig von der Wahl der Karte, denn seien $D_j = \phi_j^{-1}(U_1 \cap U_2)$, dann sind D_1, D_2 offen und $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ ist ein C^1 Diffeomorphismus zwischen D_2 und D_1. Somit kann man die Basisvektoren bezüglich ϕ_2 als Linearkombination von Basisvektoren bezüglich ϕ_1 darstellen,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial z_i}(z_0) &= \frac{\partial}{\partial z_i}(\phi_1 \circ (\phi^{-1} \circ \phi_2))(z_0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_j}(\phi_1^{-1} \circ \phi_2(z_0)) \frac{\partial(\phi_1^{-1} \circ \phi_2)_j}{\partial z_i}(z_0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_j}(y_0), \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial(\phi_1^{-1} \circ \phi_2)_j}{\partial z_i}(z_0).
\end{aligned}$$

Da beide Räume die gleiche Dimension k haben, sind sie gleich. «

4.9 **Orientierung von Karten** *Sei S eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit.*

1.) *Zwei Karten (ϕ_1, U_1), (ϕ_2, U_2) heißen gleich orientiert, falls*

$$\det\left(\frac{\partial(\phi_1^{-1} \circ \phi_2)_j}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}(z_0) > 0,$$

für ein $z_0 \in D_2 = \phi_2^{-1}(U_2)$ und damit für alle $z \in D_2$. (Die Determinante hängt stetig von z ab und ist immer $\neq 0$).

Zwei Karten heißen kompatibel, wenn sie gleich orientiert sind oder U_1 und U_2 leeren Schnitt haben.

2.) *Ein Atlas heißt orientiert, wenn alle Karten paarweise kompatibel sind.*

3.) *Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn sie mindestens einen orientierten Atlas besitzt.*

4.) *Zwei orientierte Atlanten $A(S)$ und $B(S)$ heißen kompatibel, falls der Atlas $C(S) := A(S) \cup B(S)$ orientiert ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierbaren Atlanten. Eine Äquivalenzklasse ist eine Orientierung von S.* $\rtimes$

Lemma *Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit hat genau zwei Orientierungen.* $\rtimes$

» Der Beweis ist eine gute Übung. «

4.10 **Ergänzung zu 4.3** *Im Fall $k = 1$ seien,*

$$K_1^{(k)} = (-1,1),\ K_{1,+}^{(k)} = [0,1),\ K_{1,-}^{(k)} = (-1,0].$$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, falls zu jedem $x \in S$, eine Karte (ϕ_x, U_x) existiert mit,

$$\phi_x : (-1,1) \to U_x, \quad \textit{oder } \phi_x : [0,1) \to U_x, \quad \textit{oder } \phi_x : (-1,0] \to U_x,$$

und die übrigen Voraussetzungen von 4.3 gelten.

x heißt Randpunkt, falls $\phi_x : K_{1,\pm}^{(k)} \to U_x$ und $\phi_x^{-1}(x) = 0$. $\rtimes$

4.11 **Bsp** 1.) $S = \{t - (1,1,1) : 0 \le t \le 3\}$ ist eine 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand und den Karten,

$$\begin{aligned} &\phi_1 : [0,1) \to S : y \mapsto 3y(1,1,1), && U_1 = \{t - (1,1,1) : t \in [0,3)\}, \\ &\phi_2 : (-1,0] \to S : z \mapsto 3(z+1)(1,1,1), && U_1 = \{t - (1,1,1) : t \in (0,3]\}. \end{aligned}$$

Damit ist $\{(\phi_1, U_1), (\phi_2, U_2)\}$ Atlas und es gilt,

$$\begin{aligned} &\phi_1^{-1} \circ \phi_2(z) = z + 1, \\ \Rightarrow\ &\frac{\partial(\phi_1^{-1} \circ \phi_2)}{\partial z}(z) = 1 > 0, \end{aligned}$$

also ist der Atlas orientiert.

Falls $\tilde{\phi}_2 : [0,1) \to S, z \mapsto 3(1-z)(1,1,1)$, dann ist $\tilde{A}(S) = \{(\phi_1, U_1), (\tilde{\phi}_2, \tilde{U}_2)\}$ ebenfalls Atlas aber nicht orientiert, denn

$$\frac{\partial(\phi_1^{-1} \circ \tilde{\phi}_2)}{\partial z}(z) = -1 < 0.$$

2.) Sei $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 2\right\}$, dann ist S orientierbar und ∂S sind zwei disjunkte Kreise. Durch eine Orientierung von S wird auch eine Orientierung von ∂S induziert (vgl. 4.12)

3.) Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

4.) Die Kleinsche Flasche ist ebenfalls nicht orientierbar. ■

4.12 **Definition/Satz** *Sei S orientierte C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $k \geq 2$ und $A(S)$ orientierter Atlas. Durch die Konstruktion 4.5 wird ein orientierter Atlas $A(\partial S)$ gegeben. Die dadurch definierte Orientierung von ∂S heißt verträglich mit der Orientierung von S.* ⋊

» Karten auf ∂S werden durch,

$$\tilde{\phi}_1 := \phi\big|_{\{y_1=0\}}, \quad \tilde{\phi}_2 := \phi\big|_{\{z_k=0\}},$$

gebildet. Dann ist $\tilde{U}_1 = U_1 \cap \partial S$ und $\tilde{U}_2 = U_2 \cap \partial S$, sowie $A(\partial S) = \{(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1), (\tilde{\phi}_2, \tilde{U}_2)\}$.

Zeige, dass $(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1)$ und $(\tilde{\phi}_2, \tilde{U}_2)$ kompatibel sind.

Sei $\psi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$. Wir wissen, dass $A(S)$ orientiert ist, d.h. $\det \mathrm{D}\psi > 0$. Da Randpunkte auf Randpunkte abgebildet werden, gilt

$$\begin{aligned}
&\psi(\ldots, z_k = 0) = (\ldots, 0)^t, && \Rightarrow \partial_j \psi_k(z_0) = 0, j = 1, \ldots, k-1, \\
&\psi(\ldots, z_k > 0) = (\ldots, > 0)^t, && \Rightarrow \partial_k \psi_k(z_0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Funktionaldeterminante,

$$\det \mathrm{D}\psi(z_0) = \det \begin{pmatrix} & & & * \\ & A & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & \partial_k \psi_k(z_0) \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \underbrace{\partial_k \psi_k(z_0)}_{\geq 0} \det A.$$

Nun ist aber $\det \mathrm{D}\psi(z_0) > 0$, also sind auch $\partial_k \psi_k(z_0) > 0$ und $\det A > 0$. Also gilt,

$$\det \left(\frac{\partial(\tilde{\phi}_1^{-1} \circ \phi_2)_i}{\partial z_j}(z_0) \right)_{i,j} = \det \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j}(z_0) \right)_{1 \leq i,j \leq k-1} > 0. \quad «$$

4.13 **Bsp** Sei $k = n = 2$ und $S = \overline{K_1^{(2)}(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) Ist $A(S)$ Atlas, der (ϕ, U) mit $\phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, $U = K_1^{(2)}(0)$ enthält, so ist die Orientierung von ∂S gegen den Uhrzeigersinn.

(ii) Ist $A(S)$ Atlas, der (ϕ, U) mit $\phi(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$, $U = K_1^{(2)}(0)$ enthält, so ist die Orientierung von ∂S im Uhrzeigersinn. ■

4.14 **Definition** *1.) Eine stückweise C^m-Mannigfaltigkeit S der Dimension 1 ist eine C^0 Mannigfaltigkeit der Dimension 1, die nach entfernen endlich vieler Punkte in endlich viele C^m Mannigfaltigkeiten zerfällt.*

2.) Eine stückweise C^m-Mannigfaltigkeit S der Dimension k ($k \geq 2$) ist eine C^0-Mannigfaltigkeit der Dimension k, die nach entfernen endlich vieler stückweiser C^m-Mannigfaltigkeiten der Dimension $k-1$ in endlich viele C^m-Mannigfaltigkeiten zerfällt. $\rtimes$

4.15 *Bemerkung.* In der Definition von Manngifaltigkeiten kann statt $K_1^{(k)}(0)$ auch $\mathbb{R}^k$ bzw. $W_1^{(k)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : \max\limits_{1 \leq i \leq k} |x_i| < 1 \right\}$ verwendet werden. $\multimap$

4-B Der Inhalt von Mannigfaltigkeiten

4.16 **Definition** *Sei $1 \leq k \leq n$, $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Der k-Inhalt des von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannten Parallelepipeds ist definiert durch,*

$$V^{(n)}(v_1, \dots, v_k) := \sqrt{\det(v_1, \dots, v_k)^*(v_1, \dots, v_k)}. \quad \rtimes$$

4.17 **Macht das Sinn?** *1.) Im Fall $k = n$ ergibt sich der Inhalt,*

$$\begin{aligned} V^{(k)}(v_1, \dots, v_k) &= \sqrt{\det(v_1, \dots, v_n)^*(v_1, \dots, v_k)} \\ &= \sqrt{\det(v_1, \dots, v_n)^* \det(v_1, \dots, v_k)} \\ &= |\det(v_1, \dots, v_n)|\,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir eine positive Antwort.

2.) *Im Fall $k = 1$ erhalten wir,*

$$V^{(1)}(v_1) = \sqrt{\det v_1^* v_1} = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \|v_1\|.$$

Auch hier stimmt der so definierte Inhalt mit dem bereits bekannten Inhalt überein.

3.) *Exemplarisch für Restfälle: $k = 2, n = 3$.*

(a) *Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ konjugiert in x_1, x_2 Ebene,*

$$v = (v_1, v_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, 0).$$

$$\begin{aligned} \det(v,w)^*(v,w) &= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \\ &= V^{(2)}(\tilde{v}, \tilde{w}), \end{aligned}$$

mit $\tilde{v} = (v_1, v_2)$ und $\tilde{w} = (w_1, w_2)$.

(b) *v, w allgemein*

Wähle $n \perp v, w$ mit $\|n\| = 1$ und Drehmatrix D so, dass $Dn = e_3$, dann liegen Dv und Dw in der x_1, x_2-Ebene. Für eine Drehmatrix ist $D^* = D^{-1}$, also erhalten wir,

$$\begin{aligned} V^{(3)}(v,w,n)^2 &= \det(v,w,n)^* \det(v,w,n) \\ &= \det(v,w,n)^* D^{-1} D \det(v,w,n) \\ &= \det D^{-1}(v,w,n)^* \det D(v,w,n) \\ &= \det(Dv, Dw, Dn)^* \det(Dv, Dw, Dn) \\ &= V^{(2)}(Dv, Dw)^2 = V^{(2)}(v,w). \end{aligned}$$

4.) *Sind $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear abhängig, dann haben die Matrizen $(v_1, \ldots, v_k)$ und $(v_1, \ldots, v_k)^*$ einen Rang $< k$. Dies gilt auch für das Produkt der Matrizen und somit ist die Determinante des Matrizenproduktes Null.*

5.) *Noch offen bleibt jedoch die Frage warum die Determinante immer ≥ 0 ist.*

4.18 **Korollar** *Ist S eine C^1-Mannigfaltigkeit, (ϕ, U) Karte auf S, $x_0 \in U$ und $y_0 := \phi^{-1}(x_0)$, so ist,*

$$\sqrt{\det\left(\mathrm{D}\phi(x_0)^*\mathrm{D}\phi(x_0)\right)},$$

der k-Inhalt des Parallelepipeds das von den Tangentenvektoren,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(y_0), \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(y_0),$$

aufgespannt wird. ⋊

4.19 **Definition** *Sei $1 \leq k \leq n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in C^1(D \to \mathbb{R}^n)$ injektiv. Für die k-dimensionale Manngifaltigkeit im $\mathbb{R}^n$,*

$$S := \{\varphi(y) : y \in D\} = \phi(D),$$

ist,

$$V^{(k)}(S) := \int_D \sqrt{\det(\mathrm{D}\varphi^*\mathrm{D}\varphi)}\,\mathrm{d}\mu = \int_D \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right\rangle_{i,j}}\,\mathrm{d}\mu,$$

der k-Inhalt von S.

Spezialfälle $k = 1$,

$$V^{(1)} := L \text{ Länge},$$

$k = 2$,

$$V^{(2)} := F \text{ Fläche},$$

$k = n$,

$$V^{(n)} := V \text{ Volumen.}$$ ⋊

4.20 **Bsp** 1.) $D = (0, 2\pi), \varphi(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$.

Der Kreisumfang beträgt daher,

$$
\begin{aligned}
V^1(\varphi(D)) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(-R\sin, R\cos t) \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} R\, \mathrm{d}t \; = 2\pi R.
\end{aligned}
$$

2.) $D = \left\{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 < 1\right\}, \varphi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 2y_1 + 3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
V^{(2)}(\varphi(D)) &= \int_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}\, \mathrm{d}y \; = \int_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{5}\mu(D) = \sqrt{5}\Pi. \quad ■
\end{aligned}
$$

4.21 *Bemerkung.* Sei $1 \le k \le n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in C^1(D \to \mathbb{R}^n)$ injektiv, $\phi \in C^1(D \to \phi(D))$ bijektiv und $\phi(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist

$$
S := \left\{\varphi \circ \phi^{-1}(z) : z \in \phi(D)\right\} = \varphi(D)
$$

die selbe Mannigfaltigkeit wie in 4.19 definiert. Es gilt

$$
\begin{aligned}
V^{(n)}(S) &= \int_{\phi(D)} \sqrt{\det(\partial_z(\varphi \circ \phi^{-1})(z)^* \partial_z(\varphi \circ \phi^{-1})(z))}\, \mathrm{d}z \\
&= \int_D \sqrt{\det(\partial_z(\varphi \circ \phi^{-1}(\phi(y))))^* (\partial_z(\varphi \circ \phi^{-1}(\phi(y))))}\, \left|\det \partial_y \phi(y)\right| \; \mathrm{d}y \\
&= \int_D \sqrt{\det \left(\partial_z \varphi(y)(\partial_y \phi^{-1})(\phi(y))\right)^* \left(\partial_z \varphi(y)(\partial_y \phi^{-1})(\phi(y))\right)}\, \left|\det \partial_y \phi(y \right. \\
&= \int_D \sqrt{\det \left(\partial_z \varphi(y) \left((\partial_y \phi(y)\right)^{-1}\right)^* \left(\partial_z \varphi(y) \left((\partial_y \phi(y)\right)^{-1}\right)}\, \left|\det \partial_y \phi(y)\right| \\
&= \int_D \sqrt{\det \left((\partial_y \phi(y)\right)^{-1^*} (\partial_z \varphi(y))^* \left(\partial_z \varphi(y) \left((\partial_y \phi(y)\right)^{-1}\right)}\, \left|\det \partial_y \phi(y)\right| \\
&= \int_D \sqrt{\det(\partial_z \varphi(y))^* (\partial_z \varphi(y))}\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

und dies entspricht gerade dem k-Inhalt aus 4.19. ⊸

4.22 **Definition** *Seien die Voraussetzungen wie in 4.19, dann ist das Integral von f über S definiert durch,*

$$\int_S f \, \mathrm{d}V^{(k)} := \int_D f \circ \varphi(y) \sqrt{\det\left(\mathrm{D}\varphi(y)^* \mathrm{D}\varphi(y)\right)} \, \mathrm{d}y \, .$$

Insbesondere gilt, $V^{(k)}(S) := \int_S 1 \, \mathrm{d}V^{(k)}$. ⋊

4-C Physikalische Integrale und Differentialformen

4.23 *Vereinbarung.* Im Folgenden seien $O, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(D \to O)$ injektiv und $\det\left(\mathrm{D}\varphi(y)^* \mathrm{D}\varphi(y)\right) \neq 0$ auf D, $S = \varphi(D)$ eine C^1-Mannigfaltigkeit. ⊸

4.24 **Definition** *Sei $n = 3, k = 1$ und $F \in C(O \to \mathbb{R})$. Dann ist die Arbeit längs S im Kraftfeld F gegeben durch,*

$$\begin{aligned}
A &:= \int_S \langle F, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)} \\
&= \int_{[a,b]} \left\langle F \circ \varphi(y), \frac{\varphi'(y)}{\|\varphi'(y)\|} \right\rangle \sqrt{\det(\varphi_1'(y))^2 + \ldots + (\varphi_n'(y))^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{[a,b]} \langle F \circ \varphi(y), \varphi'(y) \rangle \, \mathrm{d}y \\
&= \int_D F_1 \circ \varphi(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + F_2 \circ \varphi(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + F_3 \circ \varphi(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \, \mathrm{d}y \, ,
\end{aligned}$$

mit dem Tangenteneinheitsvektor t_0. ⋊

Achtung. Ändert man die Orientierung von S (geht man "rückwärts"), so ändert sich das Vorzeichen von A. ⊸

4.25 **Definition** *Sei $n = 3, k = 2$ und $V \in C(O \to \mathbb{R}^n)$. Der Fluss von V durch die Fläche S ist definiert durch,*

$$\begin{aligned}
F &:= \int_S \langle V, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(2)} \\
&= \int_D \left\langle V \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\rangle \frac{1}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\|} \det\left(\mathrm{D}\varphi(y)^* \mathrm{D}\varphi(y)\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_D V_1 \circ \varphi(y) \det \frac{\partial \varphi_2 \varphi_3}{\partial y} + V_2 \circ \varphi(y) \det \frac{\partial \varphi_3 \varphi_1}{\partial y} + V_3 \circ \varphi(y) \det \frac{\partial \varphi_1 \varphi_2}{\partial y} \, \mathrm{d}y \, ,
\end{aligned}$$

mit dem Normaleneinheitsvektor n_0. ⋊

4.26 **Definition** *Sei* $n = 3$, $k = 3$ *und* $\rho \in C(O \to \mathbb{R})$. *Die in* S *verteilte Masse mit Dichte* ρ *hat die Gesamtmasse,*

$$M = \int_S \rho \, \mathrm{d}V^{(3)} = \int_D \rho \circ \varphi(y) \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \mathrm{d}y\,. \quad \rtimes$$

4.27 **Definition** *1.) Eine Differentialform der Ordnung* k *in* O *oder kurz* k*-Form in* O *ist eine Abbildung,*

$$\omega : \{k\text{-dimensionale Mannigfaltigkeiten in } O\} \to \mathbb{R},$$

symbolisch gegeben durch

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

wobei die $a_{i_1 \cdots i_k}$ *stetige Abbildungen auf* O *sind.*

Wir definieren,

$$\omega(S) := \int_S \omega = \int_D \sum \ldots \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\varphi(y)) \det \left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\,.$$

Aus Kompatibilitätsgründen sei für $k = 0$ *und* $S = \{x_1, \ldots, x_l\}$ *endliche Menge, ein* 0*-Form eine Abbildung* $O \to \mathbb{R}$ *gegeben durch,*

$$\omega(S) = \sum_{j=1}^{l} a(x_j).$$

2.) Eine k*-Form ist von der Klasse* C^m $m \in \mathbb{N}_0$, *falls* $a_{i_1, \ldots, a_k} \in C^m(O \to \mathbb{R})$ *sind.* $\rtimes$

4.28 **Bsp** Siehe 4.25: $V \in C(O \to \mathbb{R}^n)$,

$$\omega = V_1 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + V_2 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_3 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,$$

dann ist der Fluss durch S gegeben als $F(S) = \omega(S)$. ■

4.29 **Korollar** *Falls $k \geq 2$ und,*

$$\omega = a(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_{i_k},$$

und es gilt j, l mit $i_j = i_l$, dann ist $\omega = 0$, d.h. $\omega(S) = 0$, für alle k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten S.

Insbesondere ist $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = 0$. ⋊

» In der Funktionaldeterminante treten zwei identische Splaten auf, also gilt

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial y}\right) = 0. \quad «$$

4.30 **Lineare Struktur** *Sind ω_1, ω_2 k-Formen in O und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist die k-Form $c_1 \cdot \omega_1 + c_2 \cdot \omega_2$ definiert durch,*

$$(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)(S) := c_1\omega_1(S) + c_2\omega_2(S).$$

Dann gilt,

$$\begin{aligned} c_1\omega_1(S) + c_2\omega_2(S) &= \int_D \sum\sum \left(c_1 a_{i_1,\ldots,i_k} \det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right)\right) \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_D \sum\sum \left(c_2 b_{i_1,\ldots,i_k} \det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right)\right) \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Damit bildet die Menge der k-Formen auf O einen linearen Raum über $\mathbb{R}$. ⋊

4.31 **Korollar** *Falls $k \geq 2$ gilt $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$.* ⋊

» Wir betrachten dazu die Funktionaldeterminanten,

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_l}, \ldots, \varphi_{i_m})}{\partial y}\right) = -\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_m}, \ldots, \varphi_{i_l})}{\partial y}\right). \quad «$$

4.32 **Bsp** Sei $\omega = 1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + 1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1$, dann ist $\omega = 0$. ■

Diese Situation ist natürlich unbefriedigend, da man für die k-Form 0 zahlreiche von 0 verschiedene Darstellungen findet. Wir wollen daher “gute Koordinaten” einführen, so dass wenn alle Koeffizienten der k-Form positiv sind, auch das Integral einen positiven Wert ergibt.

4.33 **Definition** *Es sei $\mathcal{I}_k = (i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k$ Dann heißt $\mathcal{I}$ wachsender Index. Sei*

$$\mathcal{G}^{(k)} = \{\mathcal{I}_k : \mathcal{I}_k \text{ wachsender Index}\},$$

die Menge der wachsenden Indizes. Wir schreiben

$$\mathrm{d}x_I := \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Eine solche k-Form heißt k-Grundform im $\mathbb{R}^n$. $\rtimes$

4.34 **Satz** *1.) Ist $\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} a_I \,\mathrm{d}x_I = 0$, so folgt $a_I = 0$ für alle $I \in \mathcal{G}^k$.*

2.) Jede k-Form in O besitzt eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} a_I \,\mathrm{d}x_I,$$

d.h. $(a_I : I \in \mathcal{G}^k)$ sind Koordinaten von ω.

Die Abbildung $\omega \mapsto a_I \in \mathcal{G}^k$ ist linear und bijektiv als Abbildung von der Menge der k-Formen auf O auf die Menge der $\binom{n}{k}$-Tupel von stetigen Funktionen auf O. $\rtimes$

» 1.) Sei $\omega = 0$. Angenommen $\exists\, x \in \Omega, I_0 \in \mathcal{G}^k : a_{I_0}(x_0) > 0$. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$a_{I_0}(x_0) \ge \frac{1}{2} a_{I_0}(x),$$

für $x \in U_\delta(x_0)$. Sei $D = K_\delta^k(0)$, $\varphi(y) = x_0 + \sum_{j=1}^{k} y_j e_{jk}$, wobei $I_0 = (j_1, \dots, j_k)$, dann gilt

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right) = 0,$$

für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ und $(i_1, \dots, i_k) \ne I_0$. Da für $i_l \in \mathbb{N}_0$ mit $(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k) \ne I_0$ gilt,

$$\varphi_{i_l} = (x_0)_{i_l}, \quad \text{konstant},$$

ist mindestens eine der Spalten 0. Daher ist

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{\partial y}\right) = \det E = 1,$$

$$\Rightarrow \omega(S) = \int_D a_{I_0}(\varphi(y))\,\mathrm{d}y > 0. \ \lightning$$

2.) Die Eindeutigkeit folgt direkt aus 4.33. Um die Existenz zu zeigen, sortiere alle Summanden so um, dass die Indizes aufsteigen (ändert lediglich das Vorzeichen). «

4.35 **Nachtrag** *Ist ω eine k-Form in O und sind $S = \varphi(O) = \varphi(\tilde{O})$ zwei gleich orientierte Darstellungen der k-dimensionalen Mannigfaltigkeit S, so ist $\omega(S)$ unabhängig von der gwählten Darstellung.* ⋊

» Mit Kettenregel nachrechnen, wie in 4.21. «

4-D Rechnen mit Differentialformen

4.36 **Multiplikation** *1.) Sind $k, l \geq 1$ und*

$$\omega_1 = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} a_I \,\mathrm{d}x_I,$$

$$\omega_2 = \sum_{J \in \mathcal{G}^k} b_J \,\mathrm{d}x_J,$$

so ist

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} \sum_{J \in \mathcal{G}^k} a_I b_J \,\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J,$$

eine $k + l$-Form. Das Produkt von ω_1 und ω_2.

2.) Im Fall $k = 0$, also $\omega_1 = f$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := f \cdot \omega_2 = \sum_{J \in \mathcal{G}^k} f \cdot b_J \,\mathrm{d}x_J. \quad ⋊$$

4.37 **Satz** *Die Multiplikation ist assoziativ und distributiv über der Addition in beiden Richtungen,*

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3. \quad \rtimes$$

» Nachrechnen (Rudin). «

4.38 **Differentiation** *1.) Falls $\omega = f$ eine 0-Form in O der Klasse C^1 ist, dann ist*

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_i} f) \,\mathrm{d}x_i,$$

die Ableitung von ω.

2.) Falls $k \geq 1$ und $\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} a_I \,\mathrm{d}x_I$ eine k-Form in O der Klasse C^1 ist, gilt

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{I \in \mathcal{G}^k} \mathrm{d}a_I \,\mathrm{d}x_I = \sum_{I \in \mathcal{G}^k} \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_i} a_I) \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_I.$$

Ist ω eine k-Form der Klasse C^m, so ist $\mathrm{d}\omega$ eine $k+1$-Form der Klasse C^{m-1}. $\rtimes$

4.39 **Bsp** (a) Sei $f \in C^1(O \to \mathbb{R})$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\omega = f$, dann gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f \,\mathrm{d}x_i.$$

Sei $D = (a, b)$ und $\varphi(D) = S$ eine C^1-Mannigfaltigkeit, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega\,(S) &= \int_D \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)(\varphi(y)) \partial\varphi_i \,\mathrm{d}y \\
&= \int_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} (f \circ \varphi)(y) \,\mathrm{d}y = f \circ \varphi(b) - f \circ \varphi(a) \\
&= \omega(\varphi(b)) - \omega(\varphi(a)) = \omega(\partial S).
\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass $\mathrm{d}\omega\,(S) = \omega(\partial S)$ allgemein gilt.

(b) Sei $k = 3$,

$$\begin{aligned} \omega &= V_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + V_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + V_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \\ &= V_1 \, dx_2 \wedge dx_3 - V_2 \, dx_1 \wedge dx_3 + V_3 \, dx_1 \wedge dx_2 . \end{aligned}$$

Aus 4.25 wissen wir, $\omega(S) = \int_S \langle V, n_0 \rangle \, dV^{(3)}$ ist der Fluss durch S.

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_{x_1} V_1 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \partial_{x_2} V_2 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \partial_{x_3} V_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \operatorname{div} V \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 . \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$d\omega\,(S) = \int_D (\operatorname{div} V)(\varphi(y)) \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy = \int_S (\operatorname{div} V)(y) \, dy \, .$$

4.40 **Satz** *1.)* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
$d(c\omega) = c \, d\omega$.

2.) Sei ω_1 k-Form, ω_2 eine l-Form der Klasse C^1, so gilt die Produktregel,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 .$$

3.) Ist ω eine k-Form der Klasse C^2, dann gilt die Poincare Identität,

$$d^2 \omega = 0. \quad \rtimes$$

» 1.) Folgt direkt aus der Definition.

2.) Sei $\omega_1 = a_I \, dx_I$ und $\omega_2 = b_J \, dx_J$. Aus der Definition folgt,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = a_I b_j \, dx_I \wedge dx_J .$$

Um die eindeutige Darstellung von $dx_I \wedge dx_J$ zu erreichen, wäre noch ein Umsortieren notwendig, was aber lediglich einen Faktor -1 ändern würde.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}(a_I b_j)\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= b_J \left(\sum_{k=1}^{n} (\partial_{x_k} a_I)\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_I \right) \wedge \mathrm{d}x_J \\
&\quad + (-1)^k a_I \left(\sum_{k=1}^{n} (\partial_{x_k} b_J)\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_J \right) \wedge \mathrm{d}x_I \\
&= \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2 .
\end{aligned}
$$

3.) a) $\omega = f$ ist eine 0-Form, dann folgt,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)\,\mathrm{d}x_i, \\
\mathrm{d}^2\omega &= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{x_j}\partial_{x_i} f)\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = 0,
\end{aligned}
$$

denn nach dem Satz von H.A. Schwartz ist $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f$ und falls $j > i$ ist $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = -\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, also heben sich die Summanden weg.

b) Sei $k \geq 1$, $\omega = a_I\,\mathrm{d}x_I = a_I \wedge \mathrm{d}x_I$, dann folgt

$$
\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x_I + a_I \wedge \mathrm{d}^2 x_I = \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x_I,
$$

denn $\mathrm{d}^2 x_I = \mathrm{d}(\mathrm{d}x_I) = \sum_i (\partial_{x_i} 1)\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_I = 0$.

$$
\mathrm{d}^2\omega = \underbrace{\mathrm{d}^2 a_I}_{=0} \wedge \mathrm{d}x_I + \mathrm{d}a_I \wedge \underbrace{\mathrm{d}^2 x_I}_{=0} = 0. \quad «
$$

4.41 **Bsp** 1.) $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2$ kann nicht Ableitung einer Nullform kein, denn

$$
\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2 \neq 0.
$$

2.) $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}\omega = 0$. Rate $\Omega := \frac{1}{2}x_1^2 + c$ ist Nullform und $\mathrm{d}\Omega = \omega$.

4-E Zerlegung der Eins

Bisher sind wir in unserer Definition von $\omega(S)$ davon ausgegangen, dass eine Karte existiert, die ganz S erfasst. Dies ist jedoch nur ein selten auftretender Spezialfall. Um die Definition zu verallgemeinern benötigen wir ein Zerlegung der Eins, eine Menge von Funktionen $\{\psi_i\}$ deren Summe $\sum_i \psi_i(x) = 1$ für jedes $x \in S$. Damit ist es uns möglich, ω lokal in eine endliche Summe zu zerlegen und $\omega(S)$ als Integral über die Summanden zu definieren, ohne die Mannigfaltigkeit S vorher in disjunkte Stücke zerlegen zu müssen.

4.42 **Lemma** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, sowie $K \cap M = \varnothing$. Dann gilt,*

$$\operatorname{dist}(K, M) = \inf\{\|x - y\| : x \in K, y \in M\} > 0,$$

und das Infimum ist ein Minimum. $\rtimes$

» Sei (x_n) Folge in K und (y_n) Folge in M, so dass $\|x_n - y_n\| \to d(K, M)$.
K ist kompakt, also hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x \in K$.

$$\|y_{n_k}\| \le \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k}\|,$$

also ist (y_{n_k}) beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_l}})$ mit Grenzwert $y \in M$, da M abgeschlossen ist. Es gilt daher

$$\|x - y\| = \lim_{l \to \infty} \left\| x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}} \right\| = d(K, M). \quad «$$

4.43 **Definition** *Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Der Träger (Support) von ψ ist definiert als*

$$\operatorname{supp} \psi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \neq 0\}}. \quad \rtimes$$

4.44 **Satz** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ eine offene Überdeckung von M mit beliebiger Indexmenge $\mathcal{A}$. Dann existiert eine abzählbare Menge von Funktionen $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:*

(i) $\forall\ j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n : 0 \le \psi_j(x) \le 1,$

(ii) $\forall\ j \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \psi_j$ *ist kompakt und es existiert ein* $\alpha \in \mathcal{A} : \operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_\alpha$,

(iii) $\forall\ x \in M : \operatorname{card} \left\{ j \in \mathbb{N} : \psi_j(x) \neq 0 \right\} < \infty$,

(iv) $\forall\ x \in M : \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$.

Die Familie (ψ_j) *heißt Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung* (O_α). $\rtimes$

4.45 **Lemma** *1.) Die Funktion*

$$g_1(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

ist $C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *und* $\operatorname{supp} g_1 := [0, \infty)$.

2.) $g_2(x) := g_1(1 - \|x\|^2)$ *für* $x \in \mathbb{R}^n$, *dann gilt* $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *und* $\operatorname{supp} g_2 := K_1^{(n)}(0)$.

3.) $g_3(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} g_2 \,\mathrm{d}\mu} g_2(x)$. *Dann gilt zusätzlich* $\int_{\mathbb{R}^n} g_3 \,\mathrm{d}\mu = 1$.

4.) Für $\delta > 0$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *sei,*

$$\psi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} g_3\left(\frac{x}{\delta}\right),$$

dann ist $\psi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}), \psi_\delta \ge 0, \operatorname{supp} \psi_\delta = \overline{K_\delta(0)}$, *sowie*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\delta \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^n \psi_\delta(\delta y) \mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g_3(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = 1. \quad \rtimes$$

» Die Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Konstruktion. «

4.46 **Lemma** *Sei* $O \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $K \subseteq O$ *kompakt, dann existiert ein* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *mit* $\varphi \ge 0, \operatorname{supp} \varphi \subseteq O$ *kompakt,* $\varphi(x) = 1$ *für* $x \in K$. $\rtimes$

» Sei $\delta := \frac{1}{4} d(K, \mathbb{R}^n \setminus O)$ bzw. $\delta = 1$, falls $O = \mathbb{R}^n$, dann ist $0 < \delta < \infty$. Setzte

$$K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \le \delta\} \subseteq O,$$

dann erfüllt folgende Abbildung die Behauptung,

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_\delta}(y) \psi_\delta(x - y) \,\mathrm{d}y,$$

denn $\operatorname{supp} \psi_\delta(x - \cdot) = K_\delta(x)$ und für $x \in K$ ist $K_\delta(x) \subseteq K_\delta$. $\operatorname{supp} \varphi$ ist beschränkt, denn $\varphi(x) = 0$, falls $d(K_\delta, x) > \delta$. «

4.47 **Lemma** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq O$ kompakt. Dann existiert ein $O' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq O' \subseteq \overline{O'} \subseteq O$.* ⋊

» Sei $\delta := \frac{1}{4} d(K, \mathbb{R}^n \setminus O)$ bzw. $\delta = 1$, falls $O = \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt $O' := \bigcup\limits_{x \in K} K_\delta^{(n)}(x)$ die Behauptung. «

4.48 **Lemma** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\{O_1, \ldots, O_n\}$ offene Überdeckung von K, dann existieren $O'_1, \ldots, O'_k$ offen mit,*

$$\overline{O'_j} \subseteq O_j,$$

beschränkt und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N O'_j$. ⋊

» $K_1 := K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=2}^N O_j\right)$ ist kompakt und $K_1 \subseteq O_1$. Wähle nach 4.47 O'_1 mit $K_1 \subseteq O'_1 \subseteq \overline{O}'_1 \subseteq O_1$, dann überdecken $\{O'_1, O_2, \ldots, O_N\}$ K. Fahre fort mit O_2. «

» *Beweis von Satz 4.44* a) M ist kompakt.

Dann gibt es endlich viele $\alpha_j \in A$ mit $M \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N O_{\alpha_j}$. Wähle nach 4.48 O'_{α_j} offen mit $M \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^N O'_{\alpha_j}$ und $\overline{O}'_{\alpha_j} \subseteq O_{\alpha_j}$ kompakt. Dann existieren nach 4.46 $\varphi_{\alpha_j} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit $\varphi_{\alpha_j} \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi_{\alpha_j} \subseteq O_{\alpha_j}$ kompakt und $\varphi_{\alpha_j} = 1$ auf $\overline{O}'_{\alpha_j}$.

Setze für $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^N \varphi_{\alpha_j}(x)} \varphi_{\alpha_j}(x), & \sum\limits_{j=1}^N \varphi_{\alpha_j}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann sind die geforderten Eigenschaften von 4.44 erfüllt, denn

(i) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ \ \forall\ j = 1, \ldots, N \ : \ 0 \leq \psi_j(x) \leq 1$,

(ii) Klar.

(iii) Klar, denn es gibt nur endlich viele j.

(iv) Sei $x \in M$, dann existiert ein $\alpha_j \in A$ mit $\varphi_{\alpha_j} = 1$ auf O'_{α_j} also ist $\sum_j \varphi_{\alpha_j} \geq 1$ und daher gilt,

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) = \frac{1}{\sum_j \varphi_{\alpha_j}} \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1.$$

$\partial \operatorname{supp}\left(\sum_{j=1}^{N} \varphi_{\alpha_j}\right)$ bildet jedoch eine Problemzone, denn es ist nicht garantiert, dass ψ_j dort C^∞ ist. Wende daher 4.46 auf $K = M$, $O = \bigcup_{j=1}^{N} O'_{\alpha_j} \subseteq \operatorname{supp} \sum_j \varphi_{\alpha_j}$ an und erhalte $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$, $\varphi = 1$ auf M, $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O'_{\alpha_j}$. Insbesondere ist $\varphi = 0$ in der Problemzone.

Setze $\tilde{\psi}_j = \varphi \psi_j$, dann hat $\left\{\tilde{\psi}_j : j = 1, \ldots, N\right\}$ alle gewünschten Eigenschaften.

b) M ist offen.

Sei $M_j := \left\{x \in M : \|x\| \leq j \text{ und } d(x, \mathbb{R}^n \setminus M) \geq \frac{1}{j}\right\}$, dann ist $M = \bigcup_{j=1}^{\infty}$ und die M_j sind kompakt.

Für festes j ist $\left\{O_\alpha \cap \left(M^\circ_{j+1} \cap (\mathbb{R}^n \setminus M_{j-2})\right)\right\}$ eine offene Überdeckung von $M_j \setminus M^\circ_{j-1}$.

Nach a) existiert eine endliche Zerlegung der 1 $\left\{\psi_{j_k} : k = 1, \ldots, N_j\right\}$ bezüglich dieser Überdeckung.

Setze $\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_j} \psi_{j_k}(x)$. Nach Konstruktion existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U(x)$, so dass die Summe in $U(x)$ endlich ist, daher ist $\sigma \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Außerdem ist $\sigma(x) > 0$ für $x \in M$ und daher ist $\left\{\frac{\psi_{j_k}}{\sigma} : j \in \mathbb{N} \wedge k = 1, \ldots, N_j\right\}$ eine Zerlegung der 1.

c) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beliebig.

M ist Teilmenge von $O := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$. Nach b) existiert daher eine Zerlegung der Eins für O. Diese können wir auf M einschränken. «

4-F Satz von Stokes

4.49 **Definition** *Eine Mannigfaltigkeit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.* $\rtimes$

4.50 **Bsp** 1.) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist kompakt, $\partial S = \emptyset$.

2.) $S_2 = K_1^{(n)}(0)$ ist nicht kompakt, $\partial S_2 = \emptyset$.

3.) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1 \wedge x_1 \leq 0\}$ ist kompakt,

$$\partial S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0 \wedge x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\right\}. \quad \rtimes$$

4.51 **Definition** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $S \subseteq O$ k-dimensionale, kompakte, orientierte C^1-Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $\{(\phi_1, U_1), \ldots, (\phi_M, U_N)\}$.*

Seien $O_1, \ldots, O_N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $O_j \cap S = U_j$, dann ist $\{O_1, \ldots, O_N\}$ offene Überdeckung von S. Sei $\psi_1, \ldots, \psi_N$ eine dazugehörige Zerlegung der Eins. Für eine k-Form ω in O definieren wir,

$$\int_S \omega := \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \psi_j \omega = \sum_{j=1}^N \int_D \psi_j(\phi_j(y)) \sum_{I \in G^k} a_I \det\left(\frac{\partial \phi_j(y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\,. \quad \rtimes$$

Bemerkung. Die Zerlegung der 1 ist endlich, da S kompakt ist, eine endliche offene Überdeckung ist hierfür noch nicht ausreichend. ⊸

4.52 **Satz** *Die Definition von $\int_S \omega$ ist unabhängig von der Wahl der O_j und der Zerlegung der Eins.* $\rtimes$

» Seien O_j und ψ_j wie vorausgesetzt, $\tilde{O}_j \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{O}_j \cap S = U_j$ und $\{\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_N\}$ die dazugehörige Zerlegung der Eins.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \int_{U_j} 1 \cdot \psi_j \omega &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \left(\sum_{l=1}^N \tilde{\psi}_l\right) \cdot \psi_j \omega \overset{!}{=} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{U_l} \tilde{\psi}_l \psi_j \omega \\ &= \sum_{l=1}^N \int_{U_l} \left(\sum_{j=1}^N \psi_j\right) \tilde{\psi}_l \omega,\end{aligned}$$

wobei das Integral über U_j gleich dem über U_l ist, da $\operatorname{supp} \tilde{\psi}_l \subseteq U_l$. «

4.53 **Satz** *Die Definition $\int_S \omega$ ist unabhängig vom Atlas $A(S)$, solange die Orientierung nicht geändert wird.* $\rtimes$

» Seien $A(S)$ und (ψ_j) wie vorausgesetzt, $\tilde{A}(S) := \left\{(\tilde{\phi}_j, \tilde{U}_j) : j = 1, \ldots, M\right\}$ und $\{\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_M\}$ die entsprechende Zerlegung der Eins.

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \psi_j \omega = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \int_{U_j} \tilde{\psi}_l \psi_j \omega \stackrel{!}{=} \sum_{l=1}^{N} \int_{\tilde{U}_l} \psi_l \omega,$$

da $\operatorname{supp} \tilde{\psi}_l \psi_j \subseteq U_j \cap \tilde{U}_l$ und (ϕ_j, U_j), $(\tilde{\phi}_l, \tilde{U}_l)$ gleich orientiert sind, ist U_j durch $\tilde{U}_l$ nach entsprechender Koordinatentransformation ersetzbar. «

4.54 **Definition** *Sei S eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $A(S) = \{(\phi_1, U_1), \ldots, (\phi_N, U_N)\}$. Im Unterschied zu 4.3 sollen als Definitionsbereiche von ϕ_j zugelassen sein: $K_1^{(n)}(0)$ oder $K_{1,-}^{(n)}(0) := \left\{x \in K_1^{(n)}(0) : x_1 \leq 0\right\}$. Sei $A(S)$ so sortiert, dass $\phi_1, \ldots, \phi_l$ auf $K_{1,-}^{(n)}(0)$ und $\phi_{l+1}, \ldots, \phi_N$ auf $K_1^{(n)}(0)$ definiert sind. Dann ist*

$$A(\partial S) = \{(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1), \ldots, (\tilde{\phi}_l, \tilde{U}_l)\}$$

mit

$$\tilde{\phi}(y_1, \ldots, y_{k-1}) := \phi_j(0, y_1, \ldots, y_{k-1}),$$
$$\tilde{U}_j = \tilde{\phi}_j(K_1^{n-1}(0)),$$

ein orientierter Atlas von ∂S. Die so definierte Orientierung von ∂S heißt verträglich mit der Orientierung von S.

Ist $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ Zerlegung der Eins wie in 4.53, so passt sie auch zum Atlas $A(\partial S)$ und es gilt,

$$\int_{\partial S} \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^{l} \int_{\tilde{U}_j} \psi_j \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^{l} \int_{\partial U_j} \psi \tilde{\omega},$$

für jede $k-1$-Form $\tilde{\omega}$. Hierbei wird jedes U_j als Mannigfaltigkeit mit Karte (ϕ_j, U_j) betrachtet. $\rtimes$

4.55 **Satz von Stokes** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le k \le n-1$, ω eine k-Form in O der Klasse C^1. Sei $S \subseteq O$ eine kompakte orientierte $(k+1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega. \quad \rtimes$$

» Sei $k \ge 1$.

Vereinfachung. Sei ohne Einschränkung $\omega = a\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_k}$.

Lokalisierung. Seien $A(S)$, $A(\partial S)$ und die Zerlegung der Eins wie in 4.54, insbesondere sei der Definitionsbereich von $\varphi_j = K_{1,-}^{(k+1)}(0)$ für $j = 1, \ldots, l$.

$$\begin{aligned}
\int_S \mathrm{d}\omega &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \psi_j \,\mathrm{d}\omega \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \mathrm{d}(\psi_j \omega) - \sum_{i=1}^N \underbrace{\sum_{j=1}^N \int_{U_j} (\partial_{x_i} \psi_j) a \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_k}}_{=0, \text{ da } \sum_j \psi_j = 1} \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \mathrm{d}(\psi_j \omega)
\end{aligned}$$

Spezialfall. Wir zeigen nun,

$$\int_{U_j} \mathrm{d}(\psi_j \omega) = \begin{cases} \int_{\partial U_j} \psi_j \omega, & 1 \le j \le l, \\ 0, & j = l+1, \ldots, N, \end{cases}$$

dann gilt

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^l \int_{\partial U_j} \psi_j \omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Sei nun j fest,

$$\begin{aligned}
\varphi_j(y) &= (g_1(y), \ldots, g_n(y)) \\
D &= \begin{cases} K_{1,-}^{(k+1)}(0), & j \le l, \\ K_1^{(k+1)}(0), & j \le l, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{U_j} \mathrm{d}(\psi_j \omega) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{U_j} \partial_{x_i}(\psi_j \omega)\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_D \partial_{x_i}(\psi_j a)(\varphi_j(y)) \det\left(\frac{\partial(g_i, g_{i_1}, \ldots, g_{i_k})}{\partial(y_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})}\right) \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Wir können nun die Determinante nach der 1. Zeile Laplace entwickeln und dann die Kettenregel anwenden und erhalten,

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{n} \int_D \Big(\partial_{x_i}(\psi_j a\Big)\,(\varphi_j(y))\, \frac{\partial g_i}{\partial y_\nu} \underbrace{\left|\frac{\partial(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k})}{\partial(\ldots, \cancel{y_\nu}, \ldots)}\right|}_{:=\det(\ldots)} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \int_D \partial_{y_\nu}(\psi_j a)(\varphi_j(y) \det(\ldots)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Nun können wir das Integral mit Fubini über D^ν und I_ν aufteilen, wobei

$$
I_\nu = \begin{cases} \left[-\sqrt{1 - ||y^{(\nu)}||^2}, 0\right], & 1 \le \nu \le l, \\ \left[-\sqrt{1 - ||y^{(\nu)}||^2}, \sqrt{1 - ||y^{(\nu)}||^2}\right], & l+1 \le \nu \le k+1, \end{cases}
$$

und erhalten somit,

$$
= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu+1} \int_{D^\nu} \int_{I_\nu} \partial_{y_\nu}(\psi_j a(\varphi_j(y)) \det(\ldots)\, \mathrm{d}y\,. \tag{*}
$$

Für das innere Integral über I_ν sich durch partielle Integration,

$$
\ldots = (\psi_j a)(\varphi_j(y)) \det(\ldots)|_{I_\nu} - \int_{I_\nu} \partial_{y_\nu}(\psi_j a)(\varphi_j(y))(\partial_{y_\nu} \det(\ldots))\, \mathrm{d}y^{(\nu)}.
$$

Somit ist der 2. Summand Null und der erste Summand ist nur ungleich Null, für $y_1 = 0$, also $\nu = 1$, da $\operatorname{supp} \psi_j \subseteq U_j$ und daher ψ_j auf dem Rand verschwindet. Das Integral hat somit den Wert

$$
\begin{aligned}
(*) &= (-1)^{1+1} \int_{D^1} (\psi_j a)(\varphi_j(y)) \det(\ldots)\, \mathrm{d}y^{\nu} \\
&= \int_{\partial U_j} \psi_j \omega. \quad \text{«}
\end{aligned}
$$

4.56 *Bemerkungen.* 1.) Im Fall $k = 0$, $\omega = f(x)$, $\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x)\,\mathrm{d}x_j$.

Vereinfachung: $S = \varphi([a,b])$, $\partial S = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}\omega &= \int_{y=a}^{b} \sum_{j=1}^{n} \left((\partial_j f(x))(\varphi(y)) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{y=a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} (f \circ \varphi)(y)\,\mathrm{d}y \\ &= f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) =: \int_{\partial S} \omega\end{aligned}$$

Orientierung von ∂S: $\varphi(b)$ bekommt $+$, $\varphi(a)$ bekommt $-$.

2.) Der Satz von Stokes gilt auch, falls $S \subseteq O$ abgeschwächt wird zu $S = \overline{O}$.
⋊

4-G Anwendungen

4.57 **Satz von Gauß-Ostrogradski** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte orientierte C^2-Mannigfaltigkeit der Dimension n ($k = n - 1$), $f \in C^1(S \to \mathbb{R}^n)$. Dann gilt,*

$$\int_S \operatorname{div} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial S} \langle f, n_0 \rangle\,\mathrm{d}V^{(2)},$$

wobei $\langle \nabla, f \rangle = \operatorname{div} f = \partial_1 f_1 + \ldots + \partial_n f_n$, n_0 ins Äußere von S weisender Normaleneinheitsvektor auf ∂S. ⋊

» Wir zeigen nur den Fall $n = 3$. Seien

$$\begin{aligned}\omega_1 &:= f_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,\\ \omega_2 &:= f_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3,\\ \omega_3 &:= f_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

dann ist $\mathrm{d}\omega_j = (-1)^{j-1} \partial_{x_j} f_j\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ und es gilt,

$$\int_S d(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) = \int_S \operatorname{div} f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \int_S \operatorname{div} f\,\mathrm{d}\mu$$

Sei $\left\{\phi_j, U_j \,:\, 1 \le j \le N\right\}$ Atlas von ∂S, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) = \sum_{j=1}^{N} \int_{K_1^2(0)} \Big(& f_1(\varphi_j(y)) \det\left(\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial y}\right) \\ &- f_2(\varphi_j(y)) \det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}{\partial y}\right) \\ &+ f_3(\varphi_j(y)) \det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial y}\right) \Big) \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Der Normalenvektor in $\varphi(y)$ ist gegeben durch,

$$\begin{aligned} n(y) &:= \begin{pmatrix} \det\left(\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial y}\right) \\ -\det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_3)}{\partial y}\right) \\ \det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial y}\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}, \\ ||n(y)|| &= \sqrt{\det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}^{*} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}. \end{aligned}$$

Das Integral über ∂S hat somit den Wert,

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) &= \sum_{j=1}^{N} \int_{K_1^2(0)} \left\langle f(\varphi(y)), \frac{n(y)}{||n(y)||}\right\rangle ||n(y)|| \,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi_j(K_1^2(0))} \langle f, n_0\rangle \,\mathrm{d}V^{(2)}. \quad \text{«}\end{aligned}$$

Bemerkung zur Orientierung von $n(y)$. S hat besitzt einen orientierten Atlas, also ist ϕ mit den anderen Karten kompatibel, die anderen Karten sind so orientiert, dass $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}\mu$ und

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \phi}{\partial y_3}\right\}$$

ist rechtsorientiert ($\det\{\ldots\} > 0$) und daher ist auch

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \phi}{\partial y_3}, \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial y_3}\right\}$$

rechtsorientiert, also ist $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial y_3}, \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\right\rangle > 0$ und $\frac{\partial \phi}{\partial y_1}$ zeigt nach außen, also auch $\frac{\partial \phi}{\partial y_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial y_3}$. ⊸

4.58 **Physikalische Interpretation**

$$\int_{\partial S} \langle f, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(2)}$$

ist der Fluss durch ∂S und dieser entspricht nun,

$$\int_S \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\mu,$$

dem Fluss aus S hinaus. ⋊

Bsp Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x$, dann ist $\operatorname{div} f = 3$. Aus jeder Kugel $K_1^{(3)}(x_0)$ ist der Fluss

$$\int_{K_1^{(3)}(x_0)} \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\mu = 4\pi. \quad \blacksquare$$

4.59 **Greensche Formel** *Seien $\varphi, \psi \in C^2(S \to \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int_S \psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \, \mathrm{d}V^{(2)},$$

wobei $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$ *und* $\frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = \mathrm{D}_{n_0}\varphi := \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + hn_0) - \varphi(x_0)}{h}$. ⋊

» Da $\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi = \langle \nabla, (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \rangle$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_S (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) \, \mathrm{d}\mu &= \int_S \operatorname{div}(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial S} \langle \psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(3)} \\
&= \int_{\partial S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \, \mathrm{d}V^{(2)},
\end{aligned}$$

da $\langle \nabla\varphi, n_0 \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}$. «

4.60 **Integralsatz von Stokes** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakte, orientierte C^2-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ($k = 1$, $n = 3$), $f \in C^1(S \to \mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$\int_S \langle \nabla \times f, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(2)} = \int_{\partial S} \langle f, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)},$$

wobei t_0 der Tangenteneinheitsvektor an ∂S passend orientiert zu n_0 ist.

» Sei $\omega := f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + f_3\,\mathrm{d}x_3$, dann folgt mit 4.24,

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} \langle f, t_0\rangle \,\mathrm{d}V^{(1)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= -\partial_{x_2} f_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 - \partial_{x_3} f_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_{x_1} f_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&\quad - \partial_{x_3} f_2\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_{x_1} f_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_{x_2} f_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= (\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (\partial_{x_1} f_3 - \partial_{x_3} f_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&\quad + (\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3
\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von 4.57 folgt,

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_S \langle \operatorname{rot} f, n_0\rangle \,\mathrm{d}V^{2}. \quad «$$

4.61 **Bsp**

$$f(x_1,x_2,x_3) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S := \left\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \wedge x_3 \geq 0\right\}.$$

Der Integralsatz von Stokes besagt nun, dass

$$\int_S \langle \operatorname{rot} f, n_0\rangle \,\mathrm{d}V^{(2)} = \int_{\partial S} \langle f, t_0\rangle \,\mathrm{d}V^{(1)}.$$

Frage Wie muss man ∂S orientieren, dass es zu n_0 passt?

Eine Karte, die die Richtung von n_0 liefert wäre beispielsweise,

$$\begin{aligned}
\phi_1(x_1,x_2) &= (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}), \\
U_1 &= \operatorname{im} \phi_1.
\end{aligned}$$

Gesucht ist nun eine dazu passende Parametrisierung des Randes. Eine Karte die den Rand beinhaltet wäre,

$$\begin{aligned}\phi_2(\varphi,\vartheta) &= (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta),\\ U_2 &= \operatorname{im}\phi_2.\end{aligned}$$

ϕ_1 und ϕ_2 sind verträglich, denn

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1}\circ\phi_2(\varphi,\vartheta) &= (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta),\\ \Rightarrow\ \det(\dots) &= \begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} = \cos\varphi\sin\vartheta > 0,\end{aligned}$$

da $\vartheta > 0$ im Schnitt $U_1\cap U_2$. Die verträgliche Parametrisierung des Randes erhalten wir durch

$$\tilde{\phi}(\varphi) := \phi_2(\varphi,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0).$$

Für $0\le\varphi\le 2\pi$ erhalten wir so den ganzen Rand.

$$\Rightarrow \int_{\partial S}\langle f, t_0\rangle\,\mathrm{d}v^{(1)} = \int_{\varphi=0}^{2}\pi \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \big(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\big)\right\rangle \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

Der Integralsatz von Stokes besagt nun, dass für jede andere Mannigfaltigkeit $\tilde{S}$ mit demselben Rand ∂S gilt,

$$\int_{\tilde{S}}\langle \operatorname{rot} f, n_0\rangle\,\mathrm{d}V^{(2)} = 2\pi. \quad ■$$

4.62 **Definition** *Sei $O\subseteq\mathbb{R}^3$ offen, $v\in C(O\to\mathbb{R}^3)$. Falls eine Funktion $U\in C^1(O\to\mathbb{R})$ existiert mit $v=\nabla U$, dann heißt U Potential von v und v heißt Gradientenfeld.* ⋊

Bemerkung. Existiert ein solches U, dann ist es natürlich nicht eindeutig da man beliebige Konstanten addieren kann. ⊸

4.63 **Satz** *Sei v ein Gradientenfeld und S ein Weg von x_1 nach x_2, dann entspricht die Arbeit entlang S der Potentialdifferenz von x_2 nach x_1. Insbesondere ist die Arbeit wegunabhängig.* ⋊

» Sei $v = \nabla U$, $x_1, x_2 \in O$, $S = \varphi([0,1])$, $\varphi(0) = x_1$ und $\varphi(1) = x_2$. Die Arbeit längs S ist definiert als,

$$
\begin{aligned}
\int_S \langle v, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)} &= \int_0^1 \langle v(\varphi(y)), \varphi'(y) \rangle \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} U(\varphi(y)) \, \mathrm{d}y \\
&= U(\varphi(1)) - U(\varphi(0)) = U(x_2) - U(x_1). \quad «
\end{aligned}
$$

4.64 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, $v \in C^1(O \to \mathbb{R}^3)$. Dann sind äquivalent,*

(i) *v ist Gradientenfeld.*

(ii) $\operatorname{rot} v = 0$ *in* O.

» *Beweisskizze* (i)⇒(ii): $\nabla \times v = \nabla \times (\nabla U) = 0$.

(ii)⇒(i): Wähle $x_0 \in O$ fest. Zu $x_0 \in O$ wähle $S = \varphi([0,1])$ mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi(1) = x$.

Setze $U(x) = \int_S \langle v, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)}$.

a) $U(x)$ ist unabhängig vom gewählten Weg:

Sei $\tilde{S} = \tilde{\varphi}([0,1])$ ein weiterer Weg und ϕ eine C^2-Homotopie zwischen S und $\tilde{S}$.Betrachte die Mannigfaltigkeit $\phi([0,1] \times [0,1])$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\operatorname{im} \phi} \langle \operatorname{rot} v, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(2)} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial \operatorname{im} \phi} \langle v, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)} \\
&= \int_S \langle v, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)} - \int_{\tilde{S}} \langle v, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)}.
\end{aligned}
$$

b) Wir können S so wählen, dass

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} U(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(U(x + h e_j) - U(x) \Big) \\
&\overset{!}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \Big\langle v(x + y e_j), e_j \Big\rangle \, \mathrm{d}y \; = v_j(x).
\end{aligned}
$$

Also ist $\nabla U = v$.

4-H Koordinateninvariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten

4.65 **Definition** *Sei L linearer Raum über $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $\dim L < \infty$. Eine alternierende Differentialform vom Grad k oder k-Form ist eine multilinear alternierende Abbildung $D : L^k \to \mathbb{R}$. Eine 0-Form ist eine Konstante.*

$$\mathcal{D}_k := \{D \,:\, D \text{ ist } k\text{-Form auf } L\}. \quad ⋊$$

Bemerkungen. Spezialfall $D \in \mathcal{D}_2$, dann ist $D(v_1, v_2) = -D(v_2, v_1)$.

Ist $k > \dim L$, dann ist $D = 0$ denn k Vektoren sind dann linear abhängig. ⊸

4.66 **Satz** *Für $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_k$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei,*

$$(D_1 + D_2)(v_1, \dots, v_k) = D_1(v_1, \dots, v_k) + D_2(v_1, \dots, v_k),$$
$$(\lambda D_1)(v_1, \dots, v_k) = \lambda D_1(v_1, \dots, v_k).$$

Dann ist $\mathcal{D}_k$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

» Folgt direkt aus der Definition. «

4.67 **Alternierendes Produkt** *Seien $D_1 \in \mathcal{D}_k$, $D_2 \in \mathcal{D}_l$. Dann setzen wir*

$$(D_1 \wedge D_2)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in \sigma_{k+l}} D_1(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) D_2(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}).$$

Dann ist $(D_1 \wedge D_2) \in \mathcal{D}_{k+l}$. Im Fall $k = 0$, d.h. $D_1 = c$ ist $D_1 \wedge D_2 = cD_2$.

4.68 **Bsp** Seien $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_1$, dann ist

$$(D_1 \wedge D_2)(v_1, v_2) = D_1(v_1)D_2(v_2) - D_1(v_2)D_2(v_1). \quad ■$$

4.69 **Basis** *Sei $\{e_1, \dots, e_N\}$ Basis von L, $k \le N$,*

$$\mathrm{d}x_j(v) := v_j, \text{ für } v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j,$$
$$G^{(k)} := \{I = (i_1, \dots, i_k) \,:\, 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le N\},$$
$$\mathrm{d}x_I := \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Offensichtlich ist $\mathrm{d}x_j \in \mathcal{D}_1$ *und* $\mathrm{d}x_I \in \mathcal{D}_k$ *für* $I \in G^{(k)}$*.*

$$\mathcal{B}_k = \left\{ \mathrm{d}x_I : I \in G^{(k)} \right\},$$

ist eine Basis von $\mathcal{D}_k$*. Insbesondere ist* $\dim \mathcal{D}_k = \binom{N}{k}$*.*

» *Beweisskizze* 1.) Lineare Unabhängigkeit $\mathrm{d}x_j(e_i)\delta_{ij}$ also gilt,

$$\mathrm{d}x_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & (j_1, \dots, j_k) = I, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle aufsteigenden Indizes $(j_1, \dots, j_k) \in G^{(k)}$. Sei $\sum_{I \in G^{(k)}} \alpha_I \, \mathrm{d}x_I = 0$, dann ist

$$0 = \sum_{I \in G^{(k)}} \alpha_I \, \mathrm{d}x_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \alpha_{j_1, \dots, j_k}$$

und daher ist $\mathcal{B}_k$ linear unabhängig.

2.) Zeige $\operatorname{span}\{\mathcal{B}_k\} = \mathcal{D}_k$.

Sei $k = 2$ und $D \in \mathcal{D}_2$.

$$\begin{aligned} D(v, w) &= D\Big(\sum_j v_j e_j, \sum_i w_i e_i\Big) = \sum_j \sum_i \underbrace{v_j w_j D(e_j, e_i)}_{=0 \text{ für } i=j} \\ &= \sum_{1 \le j < i \le N} D(e_j, e_i)(v_j w_i - v_i w_j) \\ &= \sum_{1 \le j < i \le N} D(e_j, e_i) \underbrace{(\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i)}_{= \mathrm{d}x_I}(v, w) \end{aligned}$$

Analog folgt für $k \in \mathbb{N}$,

$$D = \sum_{I \in G^{(k)}} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \, \mathrm{d}x_I. \quad «$$

4.70 **Satz** *Sei* $1 \le k \le n$*,* ω k*-Form über* $\mathbb{R}^n$*. Sei* $L \leqslant \mathbb{R}^n$ k*-dimensionaler Unterraum,* $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_k\}$ *Basis von* L*,* $w_1, \dots, w_k \in L$ *mit Koordinatenvektoren* $v_1, \dots, v_k$ *bezüglich* $\mathcal{B}$*,*

$$v_j = (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}), \quad w_j = \sum_{i=1}^{k} v_{ji} f_i.$$

Dann gilt,

$$\omega(w_1,\dots,w_k) = \det(v_1,\dots,v_k)\,\omega(f_1,\dots,f_k).$$

D.h. ω definiert ein in L "orientiertes Volumen", falls $\omega \neq 0$ in L. ⋊

» Sei $k = 1$, $\mathcal{B} = \{f_1\}$, $w = \lambda f_1$, $\omega = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \,\mathrm{d}x_j$.

$$\omega(w) = \omega(\lambda f_1) = \lambda\omega(f_1) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\mathrm{d}x_j(f_1)}_{=f_{1j}} = \lambda \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, f_1 \right\rangle .$$

Sei nun allgemein $\omega\big|_L$ k-Form auf L.

$\tilde\omega(w_1,\dots,w_k) = \det(v_1,\dots,v_k)$ ist k-Form über L.
$\dim L = k$, dann ist $\dim \mathcal{D}_k = 1$ und $\omega\big|_L = 0$ oder $\omega\big|_L = c\tilde\omega$, also gilt

$$\omega(f_1,\dots,f_k) = c\tilde\omega(f_1,\dots,f_k) = c\det E_k = c. \quad «$$

4.71 **Korollar** *Sei $\{e_1,\dots,e_k\}$ Basis des $\mathbb{R}^n$,*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ji} e_i, \quad j = 1,\dots,k,$$
$$I = (i_1,\dots,i_k) \in G^{(k)}.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}x_I(v_1,\dots,v_k) = \det \begin{pmatrix} v_{1i_1} & \dots & v_{ki_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1i_k} & \dots & v_{ki_k} \end{pmatrix}. \quad ⋊$$

» *Beweisskizze* Für $v \neq i_1,\dots,i_k$ ist $\mathrm{d}x_I(\dots,e_v,\dots) = 0$. Setze $\tilde v_j = \sum\limits_{\mu=1}^{k} v_{ji_\mu} e_{i_\mu}$.
Dann ist

$$\mathrm{d}x_I(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{d}x_I(\tilde v_1,\dots,\tilde v_k) \overset{4.70}{=} \det \begin{pmatrix} v_{1i_1} & \dots & v_{ki_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1i_k} & \dots & v_{ki_k} \end{pmatrix} \underbrace{\mathrm{d}x_I(e_{i_1},\dots,e_{i_k})}_{=1}.$$

4.72 **Vorläufige Definition** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\omega : O \to \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, d.h. jedem $x \in O$ wir eine k-Form $\omega(x)$ über $\mathbb{R}^n$ zugeordnet. (k-Formen-Feld) FÜr eine kompakte Mannigfaltigkeit $S = \varphi(D) \subseteq O$ der Dimension k ist*

$$\int_S \omega := \int_D \omega(\varphi(y))(\partial_{y_1}\varphi, \dots, \partial_{y_k}\varphi)\,\mathrm{d}y\,.$$

In $\varphi(y)$ ist der Tangentialraum an S, $T_{\varphi(y)}S = \langle \partial_1\varphi, \dots, \partial_k\varphi \rangle$.

4.73 *Bemerkung.* Diese Definition ist sehr allgemein, sie erfordert lediglich eine Karte (φ, U) und ein k-Formen-Feld. Insbesondere ist sie auch im unendlich dimensionalen Fall gültig. ⊸

4.74 **Korollar** *Ist $\omega(x) = \sum_{I \in G^{(k)}} a_I(x)\,\mathrm{d}x_I$. Dann gilt*

$$\int_S \omega = \sum_{I \in G^{(k)}} \int_D a_I(\varphi(y)) \det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right).$$

Insbesondere ist $\int_S \omega$ definiert, falls a_I stetig. ⋊

»

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(y))(\partial_{y_1}\varphi, \dots, \partial_{y_k}\varphi) &= \sum_I a_I(\varphi(y))\,\mathrm{d}x_I\left(\partial_{y_1}\varphi, \dots, \partial_{y_k}\varphi\right) \\ &\overset{4.71}{=} \sum_I a_I(\varphi(y)) \det(\dots)\end{aligned}$$ «

4.75 *Bemerkung.* Aus dem Transformationssatz folgt, dass die rechte Seite für verschiedene Karten gleich ist, wenn sie kompatibel sind. ⊸

Dies ermöglicht eine endgültige Definition.

4.76 **Definition** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^m-Mannigfaltigkeit, T_xS der Tangentialraum von S im Punkt $x \in S$.*

Eine Abbildung $\omega : S \to \mathcal{D}_k(T_xS)$, $x \mapsto \omega(x)$ heißt k-C^m-Form auf S, falls

$$\omega(x) = \sum_{I \in G^{(k)}} a_I(x)\,\mathrm{d}x_I,$$

mit $a_I \in C^m(S \to \mathbb{R})$. ⋊

4.77 **Bsp** Sei $S = O = \mathbb{R}^n$, d.h. in jedem $x \in O$ gilt $T_x S = \mathbb{R}^n$. Für $f \in C^1(O \to \mathbb{R})$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle + o(\|x - x_0\|).$$

$$\begin{aligned}
\langle f'(x_0), v \rangle &= \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_i} f)(x_0)\, \mathrm{d}x_j(v) =: \mathrm{d}f(v), \\
\mathrm{d}f &:= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f\, \mathrm{d}x_j, \\
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) + \mathrm{d}f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.78 **Definition** *Sei S orientierte C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension k, ω eine k-C^0-Form auf S mit* $\operatorname{supp} \omega$ *kompakt. Endlich viele Karten $(\phi_1, U_1), \ldots, (\phi_N, U_N)$ überdecken* $\operatorname{supp} \omega$. *Wähle $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ als dazu passende Zerlegung der Eins. Definiere*

$$\int_S \omega := \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \psi_j \omega = \sum_{j=1}^{N} \int_D \psi_j(\phi_j(y)) \omega(\phi_j(y))(\partial_{y_1} \phi_j, \ldots, \partial_{y_k} \phi_j)\, \mathrm{d}y\,.$$