Topologie - Mitschrieb

bei Prof. Dr. R. Dipper

Jan-Cornelius Molnar, Version: 15. Februar 2009 16:18

Inhaltsverzeichnis

0 Motivation

§1 Euler's Polyedersatz

0.1.1 **Vermutung** *Sei $\mathcal{P}$ ein Polyeder, dann gilt $v - e + f = 2$, wobei v (vertex) die Anzahl der Ecken, e (edge) die Anzahl der Kanten und f (face) die Anzahl der Flächen ist.* $\rtimes$

0.1.1 ist sicher falsch, wenn $\mathcal{P}$ aus mehreren Stücken (nicht zusammenhängend) zusammengesetzt ist. Von jedem Stück erhält man einen Beitrag 2 zur Formel $v - e + f$.

Bsp Ein Würfel, aus dessen Innerem ein kleiner Würfel entfernt wurde (keine zusammenhängende Fläche) $\rtimes$

Nehmen, wir also an, dass $\mathcal{P}$ zusammenhängend ist. Reicht das aus?

Bsp $\mathcal{P}_6$ ist zusammenhängend aber es gibt eine geschlossene Kurve auf der Oberfläche von $\mathcal{P}_6$, die diese nicht in zwei separate Flächen teilt. $\mathcal{P}_6$ ist vergleichbar mit einem Torus ("Autoreifen"). $\rtimes$

0.1.2 **Satz (Euler 1750)** *Sei $\mathcal{P}$ ein Polyeder mit folgenden Eigenschaften*

(a) *Je zwei Ecken von $\mathcal{P}$ können durch eine Folge von Kanten verbunden werden.*

(b) *Jeder geschlossene Streckenzug auf der Oberfläche von $\mathcal{P}$ teilt dieselbe in mindestens zwei getrennte Flächen.*

Dann ist $v - e + f = 2$ für $\mathcal{P}$. $\rtimes$

Euler bewies diesen Satz 1750 für konvexe Polyeder, Lhuilies 1813 zusätzlich für Polyeder vom Typ $\mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$ und schließlich Staudt 1847 die oben stehende Proposition.

Hier soll zunächst eine Beweisskizze genügen, dafür benötigen wir noch zwei Definitionen

Definition *(i) Ein Graph sind Ecken und Kanten, die die Ecken verbinden.*

(ii) Wege sind Ketten von Kanten so, dass aufeinanderfolgende Glieder der Kette eine gemeinsame Ecke besitzten.

(iii) Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken durch einen Weg verbunden werden können.

(iv) Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph, der keine geschlossenen Wege enthält. ⋊

» Man sieht leicht, dass für einen Baum T gilt $\nu(T) - e(T) = 1$.

Für einen Polyeder $\mathcal{P}$, sei $G = \{\text{Ecken}\} \cup \{\text{Kanten}\}$. Entfernen wir in G aus geschlossenen Wegen Kanten, erhalten wir einen Baum $T \subseteq G$.

Sei $\Gamma(T)$ der duale Graph von T, d.h. die Ecken von Γ sind die Seitenflächen von $\mathcal{P}$, dann gelten die folgenden Fakten:

(a) Γ ist zusammenhängend (zwei Ecken von G könnten nur durch einen geschlossenen Weg in T getrennt werden, aber T ist Baum).

(b) Γ ist Baum, denn ein geschlossener Weg in Γ würde wegen Bedingung b) in 0.1.2 $\mathcal{P}$ in mindestens zwei Teile teilen. Diese könnten dann nicht durch einen Weg in T verbunden werden, weil sie durch den geschlossenen Weg in Γ gehen müssen. Aber T ist zusammenhängend.

Es gilt also,

$$\begin{aligned}
&\nu(T) = \nu, \quad \nu(\Gamma) = f \\
&\nu(\Gamma) - e(\Gamma) = 1, \quad \nu(T) - e(T) = 1, \quad e(T) + e(\Gamma) = e \\
\Rightarrow &\nu - e + f = \nu(T) - e(T) - e(\Gamma) + \nu(\Gamma) = 1 + 1 = 2. \quad «
\end{aligned}$$

§2 Topologische Äquivalenz

0.2.1 **Definition** *Ein Homöomorphismus von einer Oberfläche O_1 auf eine Oberfläche O_2 (in $\mathbb{R}^3$) ist eine bijektive, stetige Abbildung $h : O_1 \to O_2$, deren Inverse ebenfalls stetig ist.* $\rtimes$

Intuitive Idee *Wir "deformieren" Oberflächen stetig. Wir dehnen und stauchen sie aber wir reißen sie niemals und wir identifizieren nie verschiedene Punkte.* $\rtimes$

0.2.2 **Definition** *Zwei Oberflächen O_1 und O_2 in $\mathbb{R}^3$ heißen topologisch äquivalent oder homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus von O_1 auf O_2 gibt. In diesem Fall schreiben wir $O_1 \cong O_2$.* $\rtimes$

Offensichtlich ist $\cong$ eine Äquivalenzrelation.

Nun können wir Euler's Satz allgemeiner formulieren

0.2.3 **Lemma** *Ein Polyeder $\mathcal{P}$, der die Bedingungen a) und b) in 0.1.2 erfüllt, ist topologisch äquivalent zur $\mathbb{S}^3$ (Kugeloberfläche).* $\rtimes$

Später zeigen wir die Umkehrung des obigen Satzes und erhalten damit den folgenden:

0.2.4 **Satz** *Ein Polyeder $\mathcal{P}$ ist genau dann topologisch äquiavlent zu $\mathbb{S}^3$ wenn $\mathcal{P}$ zusammenhängend ist und jeder geschlossene Streckenzug auf der Obefläche von $\mathcal{P}$ diese in mindestens zwei Teile teilt.* $\rtimes$

0.2.5 **Definition** *Die Zahl $v - e + f$ für einen Polyeder $\mathcal{P}$ mit v Ecken und e Kanten und f Seiten ist die Eulerzahl von $\mathcal{P}$.*

Folgender Satz ist der Beginn der modernen Topologie.

0.2.6 **Satz** *Topologisch äquivalente Polyeder haben dieselbe Eulerzahl.* $\rtimes$

Die Eulerzahl ist ein Beispiel für eine topologische Invariante, d.h. eine Größe, die für homöomorphe Räume gleich ist. Mit Hilfe von topologischen Invarianten kann man Räume unterscheiden.

Später werden wir die Eulerzahl für weitaus mehr topologische Räume definieren. Dazu sollten wir aber erst einmal definieren, was ein topologischer Raum überhaupt ist.

§3 Topologische Räume

Wir wollen Oberflächen "abgesehen von stetigen Deformationen" klassifizieren. Wir denken uns Oberflächen aus dehnbarem Material, das aufgeblasen, eingebeult, gedreht und verzwirbelt werden kann.

Betrachten wir das Möbiusband eingebettet in $\mathbb{R}^3$ stellen wir fest, dass kein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^3$ in sich existiert, der das einfach getwistete Möbiusband auf das mehrfach getwistete Möbiusband homöomorph abbildet, obwohl diese sehrwohl - als topologische Räume - homöomorph sind.

Daher sind wir daran interessiert, Oberflächen unabhängig von der Einbettung in den euklidischen $\mathbb{R}^3$ als topologische Räume durch interne Eigenschaften zu definieren. So sind einfach und mehrfach getwistete Möbuisbänder derselbe topologische Raum, nur verschieden eingebettet in den $\mathbb{R}^3$.

Dafür benötigen wir eine abstrakte Definition eines topoligschen Raumes. Mit "abstrakt" ist eine Definition gemeint, die alle Fälle umfasst, jedoch nicht zu abstrakt ist, sondern noch genügend Informationen enthält, so dass Stetigkeit definiert werden kann.

0.3.1 **Vorläufige Definition** *Ein topologischer Raum ist eine Menge X, so dass für jedes $x \in X$ ein nichtleeres System $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X existiert, dessen Elemente Umgebungen von x in X heißen und folgenden Axiomen genügen:*

(a) $A \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in A$

(b) $A, B \in \mathcal{U}_x \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}_x$

Endlich viele Durchschnitte von Umgebungen von x sollen wieder Umgebungen von x sein.

(c) $A \in \mathcal{U}_x, B \subseteq X : A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}_x$

Obermengen von Umgebungen sind Umgebungen.

(d) $A \in \mathcal{U}_x \Rightarrow A^\circ = \{z \in A : A \in \mathcal{U}_z\} \in \mathcal{U}_x$.

Die Menge $A^\circ = \{z \in A : A \in \mathcal{U}_z\}$ heißt Inneres oder offener Kern von A. Die Abbildung $\mathcal{T} : X \to \mathcal{PP}(X)$, $x \mapsto \mathcal{U}_x$ heißt Topologie auf X. ⋊

Bemerkung. $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$, d.h. $\mathcal{U}_x \in \mathcal{PP}(X)$. ⊸

Nun wollen wir Abbildungen zwischen topologischen Räumen betrachten. Damit wir Umgebungen in Bild- und Urbildraum unterscheiden können, bezeichnen wir das Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ in X im Folgenden mit $\mathcal{U}_x(X)$.

0.3.2 **Definition** *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann heißt f stetig in $x \in X$, falls*

$$f^{-1}(N) \in \mathcal{U}_x(X), \qquad \forall\, N \in \mathcal{U}_{f(x)}(Y).$$ ⋊

0.3.3 **Bsp** (a) Sei X Menge, dann ist $\mathcal{U}_x = \{X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die gröbste Topologie, die X hat.

(b) Sei X Menge, dann ist $\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ die feinste Topologie, die X hat. ⋊

0.3.4 **Definition** *Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Wir machen Y zum topologischen Raum durch folgenden Regel:*

Sei $y \in Y$, dann ist $\mathcal{U}_y(Y) = \left\{A \cap Y : A \in \mathcal{U}_y(X)\right\}$. ⋊

Umgebungen in Y entstehen als Schnitt von Umgebungen in X mit Y. Dass wir hier überhaupt von einem topologischen Raum sprechen können, zeigt das folgende Lemma

0.3.5 **Lemma** *Sei X topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann definiert $\mathcal{U}_y(Y)$ für $y \in Y$ eine Topologie auf Y, die Unterraum- oder Spurtopologie von y in X gennant wird.*

Trägt $Y \subseteq X$ die Spurtopologie bzgl. X, so heißt Y (topologischer) Unterraum von X. $\rtimes$

Bsp (a) Sei Q ein Quader, der aus der $\mathbb{S}^3$ Spähre herausragt, dann ist $\mathcal{U}_y(\mathbb{R}^3)$ 3-dimensional aber $\mathcal{U}_y(\mathbb{S}^2)$ nur noch 2-dimensional.

(b) Es gilt $A \in \mathcal{U}_x$ genau dann, wenn $x \in A^\circ$. Für den $\mathbb{R}^n$ ist

$$A^\circ = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;:\; \exists\, \delta > 0 : U_\delta(z) \subseteq A \right\}$$

und $U_\delta = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| < \delta\}$ der bekannte δ-Ball. $\rtimes$

Vorsicht: Ist $Y \subseteq X$ ein Unterraum, dann ist $U \in \mathcal{U}_y(Y) \Rightarrow U \in \mathcal{U}_y(X)$ im Allgemeinen falsch. Die Umkehrung $U \in \mathcal{U}_y(X), U \subseteq Y \Rightarrow U \in \mathcal{U}_y(Y)$ gilt aber. $\multimap$

0.3.6 **Lemma** *Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Unterraum, dann ist die natürliche Inklusion $\iota : Y \to X$ von Y in X stetig.*

In der Tat ist die Spurtopologie die gröbste Topologie (d.h. die Topologie mit den wenigsten Umgebungen) für die die Einbettung von ι stetig ist. $\rtimes$

Satz *Jede Oberfläche im $\mathbb{R}^3$ ist ein topologischer Raum, wenn wir sie mit der Spurtopologie versehen.* $\rtimes$

0.3.7 **Definition** *Zwei topologische Räume X und Y heißen topologisch äquivalent, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert.* $\rtimes$

0.3.8 **Definition** *Eine Fläche ("Oberfläche") ist ein topologischer Raum in welchem jeder Punkt (= Element) eine zum Einheitsvollkreis $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ homöomorphe Umgebung besitzt und für die je zwei Punkte auch verschiedene Umgebungen haben.* $\rtimes$

§4 Klassifikation von Flächen

Wir wollen eine Liste von Prototypen von Flächen angeben, die paarweise nicht homöomorph sind, so dass jede Fläche homöomorph zu genau einem dieser Prototypen ist.

Dabei beschränken wir uns auf Flächen mit den Eigenschaften

(a) zusammenhängend,

(b) kompakt,

(c) randlos.

Es gibt genau zwei Prototypen

1. Typ Eine Spähre mit n Henkeln ($n \in \mathbb{N}$) (orientierbare Flächen).

2. Typ Schneide aus einer Spähre n-Scheiben ($n \in \mathbb{N}$) und ersetzte die entstehenden Löcher durch Möbiusbänder, indem der Rand eines Möbiusbandes mit dem Rand eines Loches identifiziert wird (nicht orientierbare Flächen).

    $n = 1$ projektive Ebene,

    $n = 2$ kleinsche Flasche

0.4.1 **Satz** *Jede zusammenhängende kompakte Fläche ohne Rand ist homöomorph zu einer Fläche vom Typ 1 (orientierbar) oder Typ 2 (nicht orientierbar).* ⋊

Möbius hat diese Aussage für Typ 1 bereits 1861 bewiesen.

§5 Philosophischer Exkurs

Das höchste Ziel wäre eine Klassifikation aller topologischer Räume, doch dies ist hoffnungslos. Zwar ist es möglich, ein Konstruktionsverfahren anzugeben mit dem man alle nicht homöomophen topologischen Räume erhält. Es stellt sich jedoch oft als äußert kompliziert heraus, zwei topologische Räume auf Homöomorphie zu vergleichen. Später werden wir sehen, dass wir dieses Problem auf Invarianten zurückführen können aber auch hier ist es oft schwierig, diese für einen konkret gegebenen Raum zu bestimmen.

Wir sind also mit zwei Problemen konfrontiert

1.) Finde alle nichthomöomorphen topologischen Räume. (Prototypen)

2.) Gegeben ist ein topologischer Raum X, zu welchem Prototyp ist dieser homöomoph? (Wiedererkennungsproblem)

Um diese Probleme zu lösen geht man wie folgt vor

zu 1.) Einschränkungen (kompakte Räume, kompakte bzw. zusammenhängende Flächen) können die Schwierigkeit alle zu finden reduzieren.

zu 2.) Topologische Invarianten, d.h. Größen, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben z.B. Eulerzahl, Zusammenhang oder Fundamentalgruppen. Wesentliche Eigenschaften der Räume lassen sich durch die Struktur der Gruppen beschreiben. Homoemorphe, zusammenhängende Räume haben beispielsweise isomorphie Fundamentalgruppen.

Folgenden Satz werden wir später beweisen:

0.5.1 **Satz** *Die Flächen von Typ 1 und Typ II in 0.4 haben alle verschiedene Fundamentalgruppen und sind daher paarweise nicht homöomorph.* ⋊

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

§1 Topologische Räume

Definition *Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T} : X \to \mathcal{P}\mathcal{P}(X)$, $x \mapsto U_x$. Sei $A \subseteq X$, dann heißt A offen in X (bezgl. $\mathcal{T}$), falls A Umgebung aller seiner Punkte ist.* ⋊

1.1.1 **Satz** *A ist offen in X genau dann, wenn $A = A^\circ$.* ⋊

1.1.2 **Satz** *Sei X topologischer Raum und sei $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ das System der offenen Teilmengen von X, dann gilt*

TOP 1 *$\mathcal{O}_X$ ist abgeschlossen gegenüber der Vereinigung, d.h. ist $\mathcal{I}$ Indexmenge, $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_X$, $i \in \mathcal{I}$, so ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_X$.*

TOP 2 *$\mathcal{O}_X$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Durchschnitten, d.h. ist $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_X$, $1 \le i \le k$, so ist $\mathcal{O}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{O}_k \in \mathcal{O}_X$.* ⋊

Bemerkung. Insbesondere sind $\bigcup_{i\in\varnothing} = \varnothing \in \mathcal{O}_X$ und $\bigcap_{i\in\varnothing} \mathcal{O}_i = X \in \mathcal{O}_X$. ⊸

1.1.3 **Satz** *Sei jetzt umgekehrt $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X (genannt "offene Mengen"), das abgeschlossen gegenüber endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen ist, d.h. TOP 1 und TOP 2 genügt.*

Für $x \in X$ und $U \subseteq X$ definieren wir: U ist Umgebung von X, falls es ein $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_X$ gibt mit $x \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subseteq U$.

Sei $U_x = \{U \subseteq X : U$ ist Umgebung von $X\}$. Dann definiert

$$\mathcal{T} : X \to \mathcal{P}(X),\ x \mapsto U_x,$$

eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X. Die offenen Mengen bezüglich $\mathcal{T}$ sind exakt die Mengen in $\mathcal{O}_X$. ⋊

Definition *Sei X Menge, $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, das TOP 1 und TOP 2 genügt, dann heißt $\mathcal{O}_X$ Topologie auf X* und *$(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{O}_X$ heißen offene Mengen.*
Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq X$, deren mengentheoretisches Komplement $X \setminus \mathcal{A}$ offen ist, heißt abgeschlossen in X. ⋊

Bemerkung. $\emptyset = X \setminus X \Rightarrow \emptyset$ ist abeschlossen.
$X = X \setminus \emptyset \Rightarrow X$ ist abeschlossen. ⊸

1.1.4 **Satz** *Sei X Menge und $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit*

TOP 1' $\mathcal{A}_X$ ist abgeschlossen gegenüber Durchschnitten,

TOP 2' $\mathcal{A}_X$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen.

Dann wird durch $\mathcal{O}_X = \{\mathcal{O} \subseteq X : X \setminus \mathcal{O} \in \mathcal{A}_X\}$ eine Topologie auf X definiert, deren System aus abgeschlossenen Teilmengen von X exakt $\mathcal{A}_X$ ist.

TOP 1' und TOP 2' sind in einem topologischen Raum mit offenen Mengen $\mathcal{O}_X$ und zugehörigen abgeschlossen Mengen $\mathcal{A}_X$ immer erfüllt. ⋊

Die Möglichkeiten Topologien auf Mengen zu definieren sind zahlreich - vielmehr zahllos. Glücklicherweise sind die drei Definitionen die wir bereits gesehen haben äquivalent.

1.1.5 **Topologische Räume** *Folgende Definitionen erzeugen äquivalente Topologien:*

(a) $\mathcal{T} : X \to \mathcal{P}\mathcal{P}(X), z \mapsto U_z$ *0.3.1,*

(b) $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ *mit TOP 1 und TOP 2 1.1.2,*

(c) $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ *mit TOP 1' und TOP 2' 1.1.4.* ⋊

Im Folgenden werden wir uns topologische Räume X immer zusammen mit $\mathcal{T}, \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{A}_X$ denken.

Definition *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist hausdorffsch, falls gilt: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es $U_1 \in U_x$ und $U_2 \in U_y$ mit U_1, U_2 offen und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Selbstverständlich sind nicht alle topologischen Räume auch hausdorffsch. Dies ist eine Eigenschaft, die wir explizit fordern müssen. Die meisten topologischen Räume, mit denen wir arbeiten werden, sind es aber. Eine Ausnahme bildet beispielsweise die Zariski Topologie, die in der algebraischen Topologie eine große Rolle spielt.

1.1.6 **Bsp**

1. Sei X Menge, dann wird durch $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mathcal{A}_X = \mathcal{O}_X$ die indiskrete Topologie definiert. Sie ist die gröbste Topologie auf X.

2. Sei X Menge, dann wird durch $\mathcal{O}_X = \mathcal{P}(X) = \mathcal{A}_X = \{U_x : x \in X\}$ die diskrete Topologie definiert. Sie ist die feinste Topologie auf X.

3. Sei (X, d) metrischer Raum und $x \in X$. Die "offene Kugel" $U_\delta(x)$ mit Radius $\delta > 0$ um x ist $U_\delta(x) = \{z \in X : d(x,z) < \delta\}$. Dann sind die δ-Kugeln um Elemente von X die offenen Mengen einer Topologie auf X. Diese nennt man die von d induzierte Topologie.

   » Beliebige Vereinigungen von δ-Kugeln um Elemente von X sind die offenen Mengen (TOP 1).

   Für TOP 2 genügt es zu zeigen, dass der Durchschnitt zweier offener Mengen wieder offen ist, denn seien $\bigcup_\alpha U_{\delta_\alpha}(x_\alpha)$, $\bigcup_\beta U_{\delta_\beta}(x_\beta)$ zwei offene Mengen in X, dann gilt

   $$\left(\bigcup_\alpha U_{\delta_\alpha}(x_\alpha)\right) \cap \left(\bigcup_\beta U_{\delta_\beta}(x_\beta)\right) = \bigcap_{\alpha,\beta} \left(\underbrace{U_{\delta_\alpha}(x_\alpha) \cup U_{\delta_\beta}(x_\beta)}_{\text{Vereinigung offener Kugeln}} \right).$$

   Sei nun $M = U_\delta(x) \cap U_\varepsilon(z)$ mit $\delta, \varepsilon > 0$, $x, y \in X$ und

   $$\rho_y = \min\{\delta - d(x,y), \varepsilon - d(z,y)\},$$

   dann ist $U_{\rho_y}(y) \subseteq U_\delta(x) \cap U_\varepsilon(z) = M$ und daher ist $M = \bigcup_{y \in M} U_{\rho_y}(y)$. «

4. **Definition** *Zwei Metriken d_1 und d_2 auf X heißen topologisch äquivalent, falls sie dieselbe Topologie auf X induzieren.* $\rtimes$

   Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die Metriken

a) $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p}$ für $p \geq 2$

b) $d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$.

topologisch äquivalent. Ihre Umgebungen sind

d_2) $U_\delta(x) :=$ offene Kugel um x mit Radius δ,

d_∞) $U_\delta(x) :=$ offener Würfel um x mit Kantenlänge 2δ.

5. Auf $\mathbb{R}$ besteht $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ aus Intervallen der Form $(-\infty, a), a \in \mathbb{R}$ zusammen mit $\emptyset, \mathbb{R}$.

$$\bigcap_{i=1}^{n}(-\infty, a_i) = (-\infty, b), b = \min_i a_i,$$
$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}}(-\infty, a_i) = (-\infty, b), b = \sup_i a_i.$$

$$Y_a = (-\infty, a]$$
$$U_i = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } a_i \text{ unbeschränkt,} \\ Y_b, & \text{falls } b = \max_i a_i \text{ existiert,} \\ X_b = (-\infty, b), & \text{sonst, mit } b = \sup a_i. \end{cases}$$

6. **Definition** *Sei X Menge, dann heißt $A \subseteq X$ kofinit, falls $X \setminus A$ endlich ist.*

Sei $\mathcal{O}$ die leere Menge zusammen mit der Menge der kofiniten Teilmengen auf X. Eine leichte Übung zeigt, dass $\mathcal{O}$ wirklich eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt kofinite Topologie auf X. ⋊

Bemerkung. Ist X endlich, so ist die kofinite Topologie die diskrete. ⊸

7. Sei $(X, \leq)$ linear geordnet. Für $a \in X$ seien

$$K_a = \{x \in X : x < a\}, \; G_a = \{x \in X : x > a\}.$$

$\mathcal{B}$ bestehe aus endlichen Durchschnitten von Mengen K_a und G_b. $\mathcal{O}$ bestehe aus beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$.
Dann ist $\mathcal{O}$ abgeschlossen gegenüber endlichen Durschnitten und beliebigen Vereinigungen, d.h. $\mathcal{O}$ ist Topologie auf X, genannt Ordnungstopologie auf X.

8. Sei $y = x^2$ die Normalparabel, die Gleichung lässt sich auch schreiben als $f(x, y) = y - x^2$. Dann ist die Parabel gerade die Nullstellenmenge von f.

   Sei K Körper, $X = K^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K \times \dots \times K : \alpha_i \in K\}$ und f aus dem Polynomring $K[x_1, \dots, x_n]$ in den Variablen $x_1, \dots, x_n$.

   Dann definiert f eine Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^n$ gegeben durch

$$f = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} x^{\underline{i}}, \quad \lambda_i \text{ fast alle } 0,$$
$$\tilde{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} \alpha^{\underline{i}} \in K.$$

   Solche Abbildungen von $K^n \to K^n$ heißen polynomial. Die Menge

$$Y = (K)^{K^n} = \{f : K^n \to K : f \text{ ist Abbildung}\},$$

   wird zur K-Algebra durch

$$f, g \in Y : (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

   Man sieht leicht, dass

$$\sim\colon K[x_1, \dots, x_n] \to Y, \ f \mapsto \tilde{f} \in Y$$

   ein K-Algebrahomomorphismus ist mit der Menge der polynomialen Abbildungen von $K^n \to K$ als Bild.

   Behauptung *Ist K unendlich, dann ist $\sim$ injektiv, d.h.*

$$\ker \sim = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \ \forall \ \alpha_i \in K\}. \quad \rtimes$$

» Der Beweis wird in der Algebra Vorlesung geführt. «

Sei nun K unendlich, $p \in K[x_1, \dots, x_n]$. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ ist Nullstelle von p, falls $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. Sei

$$z(p) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n : p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\},$$

dann ist für $p(x, y) = y - x^2 \in K[x, y]$ der Graph der Standardparabel gleich $z(p)$.

Allgemeiner: Sei $Y \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ eine Familie von Polynomen, dann ist

$$z(I) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \ \forall\ f \in Y\} \subseteq K^n.$$

Solche Teilmengen des K^n heißen algebraisch.

Umgekehrt: Sei $A \subseteq K^n$ algebraisch, $p \in K[x_1, \dots, x_n]$, dann ist

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(A) = \{p : p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0,\ \forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A\}, \\ &\mathcal{N}(A) \trianglelefteq K[x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Sei $A \subseteq B$ algebraische Teilmenge von K^n, dann gilt $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Seien $Y_1 \subseteq Y_2$ Teilmenen von $K[x_1, \dots, x_n]$, dann ist analog $z(Y_2) \subseteq z(Y_1)$.

Sind $Y_i, i \in \mathcal{I}$ Teilmenen von $K[x_1, \dots, x_n]$, so ist

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} z(Y_i) = z\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} Y_i\right),$$

also sind beliebige Durchschnitte von algebraischen Mengen algebraisch.

Seien $Y_1, \dots, Y_m \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ wir definieren

$$\prod_{i=1}^{m} Y_i = \{p_1 \cdots p_m : p_i \in Y_i\},$$

dann ist das Nullstellengebilde $\bigcup\limits_{i=1}^{m} z(Y_i) = z(\prod_i Y_i)$, d.h. endliche Vereinigungen von algebraischen Mengen sind algebraisch.

Also haben wir eine Topologie auf K^n. Die algebraischen Mengen mit $\emptyset$ und K^n sind die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie, diese wird Zariski Topologie genannt, nach dem Erfinder.

Bemerkung. Die abgeschlossenen Mengen in der Zariski Topologie sind "dünn", die offenen "fett". Eine offene Menge ist in keiner echten abgeschlossenen Teilmenge von K^n enthalten.

Zwei offene, nichtleere Teilmengen haben demnach nichtleeren Schnitt. Insbesondere ist die Zariski Topologie nicht hausdorffsch. $\multimap$

Die algebraische Geometrie studiert algebraische Teilmengen des K^n mit Hilfe der Zariski Topologie, artet dabei aber schnell in Ringtheorie aus. Das ist auch der Grund dafür, dass viele Geometer behaupten, die algebraische Topologie sei keine Geometrie sondern Algebra. $\rtimes$

1.1.7 **Definition** *Sei X Menge und $\mathcal{O}_X$ Topologie auf X.*

(a) *$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ heißt Basis von $\mathcal{O}_X$, falls alle Mengen in $\mathcal{O}_X$ aus Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ bestehen, d.h. $\forall\ \mathcal{O} \in \mathcal{O}_X\ \exists\ \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}, i \in \mathcal{I} : O = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_i$.*

Bsp $\{U_\delta(x) : \delta > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ ist eine Basis der natürlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$, ebenso die abzählbare Menge $\{U_\delta(x) : 0 < \delta \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n\}$. $\rtimes$

Der Begriff "Basis" ist hier nicht so scharf zu sehen, wie in der linearen Algebra.

(b) *$S \subseteq \mathcal{O}_X$ heiß Subbasis von $\mathcal{O}_X$, falls alle Mengen in $\mathcal{O}_X$ aus Vereinigungen von endlichen Durschnitten von Mengen in S bestehen.* $\rtimes$

1.1.8 **Satz** *Sei X Menge, $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei*

(a) $\mathcal{B} = \left\{ A \subseteq X :\ \exists\ S_1, \dots, S_n \in S, k \in \mathbb{N} : A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i \right\}$.

(b) $\mathcal{O}_X = \left\{ A \subseteq X :\ \exists\ \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}, i \in \mathcal{I} : A = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_i \right\}$.

Dann ist $\mathcal{O}_X$ Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$ und Subbasis S, die von S erzeugte Topologie auf X. Dabei ist $\mathcal{O}_X$ eindeutig durch S bestimmt. $\rtimes$

Insbesondere erzeugt jede nichtleere Teilmenge der $\mathcal{P}(X)$ als Subbasis eine Topologie auf X.

Bsp 1.) $\mathcal{O}_X$ ist für einen topologischen Raum Basis und Subbasis.

2.) Offene Kugeln (Würfel) im $\mathbb{R}^n$ bilden eine Basis.

3.) Offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ mit rationalem Radius bilden eine Basis.

4.) Die Menge der offenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$ deren Radius und Mittelpunktskoordianten rational sind (das sind abzählbar viele) ist eine Basis.

5.) $S = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ ist Subbasis von $\mathbb{R}$. $\rtimes$

1.1.9 **Definition** *Seien $\mathcal{O}_X$ und $\tilde{\mathcal{O}}_X$ Topologien auf X, dann heißt $\tilde{\mathcal{O}}_X$ feiner als $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_X$ gröber als $\tilde{\mathcal{O}}_X$, falls $\mathcal{O}_X \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_X$ ist.* $\rtimes$

1.1.10 **Lemma** *Sei X Menge*

(a) *Die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist die eindeutig bestimmte gröbste Topologie auf X und die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$ ist die eindeutig bestimmte feinste Topologie auf X. $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(b) *Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{O}_X$ die von S erzeugte Topologie auf X, dann ist $\mathcal{O}_X$ die gröbste Topologie, die S als Teilmenge enthält.*

(c) *Seien $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{O}_1$ bzw. $\mathcal{O}_2$ die von S_1 bzw. S_2 erzeugte Topologie auf X. Dann ist $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$. Ist $S_2 \subseteq \mathcal{O}_1$, so ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

1.1.11 **Definition** *Sei X topologischer Raum, $A \subseteq X$, dann heißt $x \in X$,*

(a) *Berührpunkt (BP) von A ($\in \mathrm{BP}(A)$), falls gilt $U \cap A \neq \emptyset,\ \forall\ U \in \mathcal{U}_x$.*

Klar: $x \in A \Rightarrow x$ BP von A.

(b) *Häufungspunkt (HP) von A ($\in \mathrm{HP}(A)$), falls $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset,\ \forall\ U \in \mathcal{U}_x$.*

Klar:

1.) *HPs sind BPs* ($\mathrm{HP}(A) \subseteq \mathrm{BP}(A)$).

2.) *Jeder Punkt von A ist BP von A aber nicht notwendigerweise HP.*

3.) *Ist $a \notin A$ aber ein BP von A, so ist a ein HP von A.*

Also ist $\mathrm{BP}(A) = A \cup \mathrm{HP}(A)$.

(c) *isoliert in A, falls $x \in A$ und $x \notin \mathrm{HP}(A)$.*

(d) *innerer Punkt von A, falls A Umgebung von x ist und damit A eine offene Umgebung von x enthält.*

(e) *Randpunkt von A, falls $x \in \mathrm{BP}(A)$ und $A^c = X \setminus A$.*
$\{$Randpunkte von $A\} = \partial A =$ Rand von A. $\rtimes$

1.1.12 **Definition** *Sei $A \subseteq X$ und X topologischer Raum*

(a) *Die Menge der inneren Punkte von A heißt innerer Kern von A und wird mit A° bezeichnet. (Siehe 0.3.1).*

(b) $A \cup \mathrm{HP}(A) = \mathrm{BP}(A) = \overline{A}$ *heißt abgeschlossene Hülle von A.* $\rtimes$

1.1.13 **Lemma** *Sei X topologischer Raum, $A \subseteq X$*

(a) *$\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq B \subseteq X,\\ B \in \mathcal{A}_X}} B$$

Insbesondere ist $\overline{A} \in \mathcal{A}_X$. In der Tat ist $\overline{A}$ die eindeutig bestimmte kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält.

(b) *A° ist die eindeutig bestimmte größte offene Menge von X, die in A enthalten ist und daher insbesondere offen.*

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{C \subseteq A,\\ C \in \mathcal{O}_X}} C.$$

(c) $\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. $\rtimes$

» (a) Sei $D = \bigcap\limits_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ B\in\mathcal{A}_X}} B$. Wir wollen zeigen, dass $D = \overline{A}$. Dann ist $D \in \mathcal{A}_X$ und damit die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Somit folgt aus $\overline{A} = D \Rightarrow$ Rest von 1)

"$\supseteq$": Sei also $a \in \overline{A}$. Ist $a \in A \Rightarrow a \in D$, weil $A \subseteq D$. Sei $a \notin A$, dann ist a ein HP von A (nach Definition).
Wäre $a \notin D$, so wäre $a \in X \setminus D = D^c$. Nun ist $D^c \in \mathcal{O}_X$ als Komplement einer abgeschlossenen Menge D. Also ist wegen $a \in D^c$, D^c eine offene Umgebung von a nach 1.1.1 und 1.1.3. Dann ist aber $A \cap D^c \subseteq D \cap D^c = \emptyset$ und a wäre kein HP von A. ↯

Also ist $a \in D$.

"$\subseteq$": Sei $x \in D$, $x \notin A$, denn sonst ist $x \in \overline{A}$ so oder so. Sei x kein BP von A also $x \notin \overline{A}$, dann gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$. Da nach 1.1.3 jede Umgebung von x eine offene Umgebung von x enthält, ist U ohne Einschränkung offen und A ist daher in der abgeschlossenen Menge $U^c = X \setminus U$ enthalten. Also kommt U^c als eine der Mengen B im Durchschnitt $D = \bigcap_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ B\in\mathcal{A}_X}} B$ vor und ist $D \subseteq U^c$. Wegen $x \in U$ ist $x \notin U^c$ und daher $x \notin D$. ↯

Also $x \in \overline{A}$.

(b) Übung.

(c) Nach Definition ist $\partial A = \{\text{BP von } A\} \cap \{\text{BP von } A^c\}$, $A^c = X \setminus A$. Sei $x \in \partial A$, dann ist $x \in \overline{A}$. Wäre $x \in A^\circ$, so gäbe es eine offene Umgebung U von x mit $U \subseteq A^\circ \subseteq A$. Dann ist aber $U \cap A^c = \emptyset$ und x ist kein BP von A^c. Also ist $x \notin A^\circ$.

Also ist $\partial A \subseteq \overline{A} \setminus A^\circ = \{a \in A : a \notin A^\circ\}$. Sei $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$. Dann ist insbesondere $x \in \overline{A}$ und daher BP von A. Wir haben z.Z. dass $x \in \overline{A}^c$.

Sei $x \notin \overline{A}^c$. Dann gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap A^c = \emptyset$. Dann ist $U \subseteq A$. Also ist $A \in \mathcal{U}_x$ und daher $x \in A^\circ$. ↯

Also ist $x \in \overline{A}^c$ und daher ist $x \in \overline{A} \cap \overline{A}^c = \partial A$. «

1.1.14 **Definition** *Sei X topologischer Raum, $A \subseteq X$*

(a) *A heißt dicht in X, falls $\overline{A} = X$ ist.*

(b) *A heißt nirgends dicht in X, falls $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.* $\rtimes$

Bsp (a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind beide dicht in $\mathbb{R}$, da jedes offene Intervall um eine rationale bzw. irrationale Zahl, irrationale bzw. rationale Zahlen enthält. So sind die rationalen bzw. irrationalen Zahlen HP von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Komplement einer dichten Teilmenge nicht zwingend nirgends dicht ist.

(b) In der Zariskitopologie auf K^n (K = unendlicher Körper) ist jede offene Teilmenge $\neq \emptyset$ dicht in K^n und jede abgeschlossene Teilmenge $\neq X$ nirgends dicht in X. $\rtimes$

1.1.15 **Satz** *Sei X topologischer Raum und $A, B \subseteq X$, dann gilt*

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad \rtimes$$

§2 Stetige Abbildungen

Seien X, Y topologische Räume

Erinnerung an Definition 0.3.2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, falls gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ für alle $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$. f heißt stetig, falls f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. $\multimap$

1.2.1 **Lemma** *Sei $f : X \to Y$ Abbildung, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(a) *f ist stetig.*

(b) $\forall\, x \in X,\ \forall\, V \in \mathcal{U}_{f(x)}\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x : f(U) \subseteq V$.

(c) *Sei $V \in \mathcal{O}_Y$, dann ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$.*

(d) *Sei $B \in \mathcal{A}_Y$, dann ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$.* $\rtimes$

1.2.2 *Bemerkung.* Seien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}'_X$ zwei Topologien auf X, dann ist

$$\mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}'_X),\ x \mapsto x,$$

genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}'_X \subseteq \mathcal{O}_X$, d.h. $\mathcal{O}_X$ feiner als $\mathcal{O}'_X$ ist. ⊸

1.2.3 **Lemma** *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig.* ⋊

» Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Sei $V \in \mathcal{O}_Z$, dann ist $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Y$ und damit ist $(f \circ g)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{O}_X$. Also ist $g \circ f$ stetig. «

Bemerkung. Sei $B \subseteq X$. In 0.3.4 definierten wir die Spurtopologie auf B (über Umgebungen). Dann ist das System $\mathcal{O}_B, \mathcal{A}_B$ in der Spurtopologie auf B gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_B &= \{O \cap B : O \in \mathcal{O}_X\}, \\ \mathcal{A}_B &= \{A \cap B : A \in \mathcal{A}_X\}. \end{aligned}$$ ⊸

1.2.4 **Bezeichnung** *Sei $A \subseteq X$. Wir schreiben $A \le X$, wenn wir A mit der Spurtopologe versehen und sagen A ist Unterraum von X.* ⋊

1.2.5 **Lemma** *Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$. Dann ist die Einschränkung*

$$f|_A : A \to Y,$$

stetig auf A. ⋊

» $f|_A^{-1}(V) = \{x \in A : f|_A(x) = f(x) \in V\} = f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{O}_A.$ «

1.2.6 *Bemerkung.* Die Umkehrabbildung ist Inklusionserhalten und daher gilt,

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

Daher muss man $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ lediglich für eine (Sub)-Basis der Topologie auf Y nachprüfen, um die Stetigkeit von f zu überprüfen. ⊸

Bemerkung. $f : X \to Y$ induziert $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),\ A \mapsto f^{-1}(A)$. Siehe Mengenlehre. $\multimap$

1.2.7 **Definition** *$f : X \to Y$ heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn gilt*

$$f(A) \in \mathcal{O}_Y \text{ bzw. } \in \mathcal{A}_Y, \text{ für jedes } A \in \mathcal{O}_Y \text{ bzw. } \in \mathcal{A}_Y. \quad \rtimes$$

1.2.8 **Definition** *Eine bijektive Abbildung heißt Homöomorphismus, wenn $f : X \to Y$ und $f^{-1} : Y \to X$ stetig sind oder äquivalent, wenn f stetig und offen bzw. abgeschlossen ist.*

Wir schreiben $X \cong Y$, falls ein Homöomorphismus von X nach Y existiert. $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume. $\rtimes$

Beachte: Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Homöomorphismus, so ist eine Bijektion gegeben durch $f : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y,\ U \mapsto f(U)$. $\multimap$

§3 Initiale und finale Topologien

Im Folgenden sei $\mathcal{I}$ stets Indexmenge und $i \in \mathcal{I}$.

1.3.1 **Definition/Lemma**

(a) *Sei X Menge, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologischer Raum und sei $f : X \to Y$ Abbildung. Dann ist durch*

$$\mathcal{O}_X = \left\{ f^{-1}(U) \subseteq X : U \in \mathcal{O}_Y \right\},$$

eine Topologie auf X definiert. Diese ist die eindeutig bestimmte gröbste Topologie auf X, so dass f stetig ist und heißt Initialtopologie auf X bezüglich f. Ist f surjektiv, so ist f offen bezüglich der Initialtopologie auf X.

(b) *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, Y Menge und $f : X \to Y$ Abbildung. Dann wird durch*

$$\mathcal{O}_Y = \left\{ U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \right\},$$

eine Topologie auf Y definiert. Sie ist die eindeutig bestimmte feinste Topologie auf Y, so dass $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig ist. Sei heißt die finale Topologie auf Y bezüglich f. Ist f injektiv, so ist f offen bezüglich der finalen Topologie. ⋊

Natürlich kann man diese Definition noch verallgemeinern:

1.3.2 **Definition/Lemma** (a) *Sei X Menge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ ein System von topologischen Räumen und $f_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Sei $S_i = \left\{f_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}_i\right\}$ die Menge der Urbilder offener Mengen unter f_i und $S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i$ die Vereinigung aller dieser Mengen, dann bildet S eine Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}_X$. Diese ist die gröbste Topologie für die alle $f_i : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y_i, \mathcal{O}_i)$ stetig sind.*

$\mathcal{O}_X$ heißt Initialtopologie bezüglich den Abbildungen f_i. Sind die f_i alle surjektiv, dann sind sie auch offen.

(b) *Sei Y Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ein System von topologischen Räumen und seien $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Die finale Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y bezüglich den Abbildungen f_i ist definiert durch $U \subseteq Y$ ist offen genau dann, wenn $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$.* ⋊

1.3.3 **Bsp** Sei X topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}_X$.

(a) Sei $A \subseteq X$, dann ist die Spurtopologie die Initialtopologe auf A bezüglich der natürlichen Inklusionsabbildung $\iota : A \to X$, denn

$$\mathcal{O}_A = \left\{\iota^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}_X\right\} = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}_X\}.$$

(b) **Definition** *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ sei $\overline{x} = \{z \in X : z \sim x\}$ die Äquivalenzklasse. Sei $\overline{X} = \{\overline{x} : x \in X\} = X/\sim$ und $\pi : X \to \overline{X}$, $x \mapsto \overline{x}$ Abbildung von X auf $\overline{X}$. Wir versehen $\overline{X}$ mit der finalen Topologie bezüglich π. Diese heißt dann Quotiententopologie auf $\overline{X}$ und $(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ heißt Quotientenraum von X bezüglich $\sim$.*

Beachte: $\mathcal{O}_{\overline{X}} = \left\{\overline{A} \subseteq \overline{X} : \left\{a \in X : \overline{a} \in \overline{A}\right\} \in \mathcal{O}_X\right\} = \left\{\overline{A} \subseteq \overline{X} : A \in \mathcal{O}_X\right\}.$

(c) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ⋊

§4 Topologische Summen und Produkte

1.4.1 **Definition** *Sei $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ und $\mathcal{I}$ Indexmenge. Sei $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ das karthesische Produkt der Menge X_i,*

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i \ : \ f(i) \in X_i \right\}^{1}.$$

Die initiale Topologie $\mathcal{O}_X$ auf X bezüglich der Projektionen p_i,

$$p_i : X \to X_i,\ (x_j)_{j\in\mathcal{I}} \mapsto x_i, \quad i \in \mathcal{I},$$

mit p_i surjektiv, heißt Produkttopologie. Eine Basis von $\mathcal{O}_X$ besteht aus karthesischen Produkten $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ mit $\mathcal{B}_i \in \mathcal{O}_i$ und $\mathcal{B}_i = X_i$ für fast alle $i \in \mathcal{I}$. ⋊

Beachte: Für $i \in \mathcal{I}$ und $\mathcal{B}_i \in \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{X_i}$ ist,

$$p_i^{-1}(\mathcal{B}_i) = \prod_{j\in\mathcal{I}} C_j \text{ mit } C_j = \begin{cases} X_j, & \text{für } i \neq j \in \mathcal{I}, \\ \mathcal{B}_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\prod_{j\in\mathcal{I}} X_j \to X_i \supseteq \mathcal{B}_i \in \mathcal{O}_i,\ (x_j)_{j\in\mathcal{I}} \mapsto x_i,$$

$$p_i^{-1}(\mathcal{B}_i) = \prod_{j\in\mathcal{I}} C_j \supseteq \prod_{j\in\mathcal{I}} X_j \text{ mit } C_j = \begin{cases} \mathcal{B}_i, & i = j, \\ X_j, & i \neq j. \end{cases}$$

Also: Die offenen Mengen in der Produkttopologie $\mathcal{O}_X$ auf $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ bestehen aus Vereinigungen von endlichen Durchschnitten solcher Teilmengen * von X.

$$\bigcap_{k=1}^{l} A_{i_k} = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l} = \prod_{j\in\mathcal{I}} D_j,$$

mit

$$D_j = \begin{cases} \mathcal{B}_{i_\nu}, & \text{für } j = i_\nu, \\ X_j, & \text{für } j \neq i_\nu, \nu = 1, \ldots, l. \end{cases} \quad ⊸$$

Die Produkttopologie $\mathcal{O}_X$ auf $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ besteht aus Vereinigungen von Mengen der Form $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ mit $\mathcal{B}_i \in \mathcal{O}_i$ und $\mathcal{B}_i = X_i$ für fast alle $i \in \mathcal{I}$.

Die Topologie $\mathcal{O}_X$ auf $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ mit $B \in \tilde{\mathcal{O}}_X \Leftrightarrow B$ ist Vereinigung von Mengen der Form $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ mit $\mathcal{B}_i \in \mathcal{O}_i \ \forall \ i \in \mathcal{I}$ ist echt feiner als die Produkttopologie auf X, falls $\mathcal{I}$ unendlich ist.

1.4.2 **Bsp** (a) $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologe ist das topologische Produkt von n Faktoren $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie. (Basis ist $\prod_{i=1}^{n} O_i$ mit O_i offenem Intervall in $\mathbb{R} \mathrel{\hat{=}}$ inneres eines n-dimensionalen Quaders)

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung, schreibe $f = (f(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, d.h. als Element von $\prod_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_\alpha$ mit $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, : \, f \text{ ist Abbildung}\} \\ &= \text{kartesisches Produkt von } |\mathbb{R}| \text{ vielen Kopien von } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Versieht man die Faktoren $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ mit der natürlichen Topologie, so ist die Produkttopologe auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die der punktweisen Konvergenz.

$$\begin{aligned} (f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : U_{\varepsilon,\alpha}(f) &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, : \, \left| f(\alpha) - g(\alpha) \right| < \varepsilon\} \\ &= p_g^{-1}(U_\varepsilon(\alpha))) \end{aligned}$$

für $p_x : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}_\alpha, \ f \mapsto f(\alpha)$ die natürliche Projektion. ⋊

1.4.3 **Satz** *Das topologische Produkt $(X, \mathcal{O}_X)$ mit $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, ($X_i$ topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}_i, i \in \mathcal{I}$) und $\mathcal{O}_X$ der Produkttopologie auf X erfüllt zusammen mit den natürlichen Projektionen $p_j : X = \prod_{\in \in \mathcal{I}} X_i \to X_j$ die folgende universelle Eigenschaft:*

Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologischer Raum und $f_i : Y \to X_i, i \in \mathcal{I}$ seien Abbildungen. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : Y \to X$ mit $f_i : p_i \circ f, \ \forall \ i \in \mathcal{I}$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\exists\,!f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & X \arrow[dl, "p_i"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

Weiter ist f stetig genau dann, wenn alle $f_i = p_i \circ f$ stetig sind. $\rtimes$

» $f : Y \to X, y \mapsto (f_i(y))_{i\in\mathcal{I}} \in X$ (wegen $f_i(y) \in X_i$).

Die Existenz und die Eindeutigkeit von f ist die universelle Eigenschaft des karthesischen Produkts ist gerade die universelle Eigenschaft der Initialtopologe mit der wir hier X versehen haben. (Produkttopologie = Initialtopologe bezüglich der $p_i, i \in \mathcal{I}$) «

Finales Gegenstück zum topologischen Produkt ist die topologische Summe.

1.4.4 **Definition** *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i), i \in \mathcal{I}$ topologische Räume. Sei X die disjunkte Vereinigung $\dot{\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}} X_i$ (z.B. indem man X_i mit $X \cup \{i\}$ identifiziert). Offene Mengen in $\tilde{X}_i$ haben die Form $O \times \{i\}$ mit $O \in \mathcal{O}_i$.*

Für $i \in \mathcal{I}$ sei $j_i : X_i \to X = \dot{\bigcup}_{j\in\mathcal{I}} X_j$ die natürliche Einbettung.

Die Summentopologie auf X ist die finale Topologie auf X bezüglich der Einbettung $j_i : X_i \to X, (i \in \mathcal{I})$. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt topologische Summe der $X_i (i \in \mathcal{I})$.

Bezeichnung: $(X, \mathcal{O}_X) = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} (X_i, \mathcal{O}_i)$.

Beachte: Für $i \in \mathcal{I}$ und $U \subseteq X$ ist $j_i^{-1}(U) = U \cap X_i$. Daher ist nach Definition 1.3.2 der finalen Topologie eine Menge $U \subseteq X$ offen in $(X, \mathcal{O}_X)$ genau dann, wenn $j_i^{-1}(U) = U \cap X_i \in \mathcal{O}_i, \ \forall\ i \in \mathcal{I}$. $\rtimes$

1.4.5 **Satz** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologische Summe der topologischen Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Dann sind die Inklusionen $j_i : X_i \to X$ stetig und offen und (X, O) hat die folgende universelle Eigenschaft:*

(a) *Jede Familie $f_i : X_i \to Y$ (Y Menge) von Abbildungen induziert eindeutig eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f_i = f \circ j_i$:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\exists\,!f"] & & Y \\
& X_i \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) *f ist stetig genau dann, wenn $f_i = f \circ j_i$ stetig ist ($f : X \to Y, x \mapsto f_i(x) \Leftrightarrow x \in X_i \subseteq X$). So ist klar warum man die Vereinigung braucht, sonst wäre X nicht eindeutig platziert.* ⋊

» Übung. «

Die Summentopologie ist weniger interessant als die Produkttopologie, da sich für sie kaum allgemeine Sätze beweisen lassen.[2]

Pholosophische Bemerkung. In der topologischen Summe stehen die Teile X_i einfach nebeneinander, X ist "unzusammenhängend" (später). Erst wenn die Teile X_i geeignet "zusammengenäht" werden (Surgery), d.h. an geeigneten Stellen identifiziert und dann zum 2. Mal die finale Topologie auf dem Quotienten (Quotiententopologie) genommen wird, entstehen interessante topologische Räume. ⊸

§5 Exkurs: Analysis ohne Metrik

Wir wollen kurz darauf eingehen, wie man den Begriff der Konvergenz in der Analysis topologisch begründen kann. Nicht alle Formen von Konvergenz lassen sich mithilfe von Metriken ausdrücken. Beispielsweise für die punktweise Konvergenz einer Funktion in einem Funktionenraum benötigen wir ein allgemeineres Konzept. Dieses liefert uns die Topologe.

[2] Entweder sind diese trivial oder falsch.

1.5.1 Definition/Lemma (a) *Sei X Menge, ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Filter, falls es folgenden Eigenschaften genügt:*

F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

F2) $U_1, U_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Durchschnitten.

F3) $U \in \mathcal{F}$ *und* $U \subseteq V \subseteq X \Rightarrow V \in \mathcal{F}$.
Jede Obermenge von U ist in $\mathcal{F}$ enthalten.

Bsp $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $z \in X$, dann ist das System $\mathcal{U}_z$ ein Filter auf X. ⋊

(b) *Ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Filterbasis, falls gilt:*

FB1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$,

FB2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{B} : V \subseteq B_1 \cap B_2$.
Endliche Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{B}$ enthalten eine Menge aus $\mathcal{B}$.

(c) *Ist $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ Filterbasis, so ist*

$$\mathcal{F} = \{V \subseteq X \,:\, \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subseteq V\},$$

Filter auf X, der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. ($\mathcal{F}$ beseteht aus der Menge der Obermengen von Elementen aus $\mathcal{B}$). ⋊

» Klar! «

1.5.3 Definition *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum X konvergiert gegen den Punkt $z \in X$, falls $\mathcal{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_z$ von z, d.h. $\mathcal{U}_z \subseteq \mathcal{F}$.*

Insbesondere konvergiert $\mathcal{U}_z \to z$. ⋊

1.5.4 **Bsp** (a) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in X. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $M_m = \{a_n : n \geq m\}$ das m-te Endstück der Folge,

$$\mathcal{M} = \{M_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Dann ist $\emptyset \neq \mathcal{M}$, $\emptyset \notin \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen über endlichen Durchschnitten, denn

$$(M_m \cap M_n) = M_{\max\{m,n\}}$$

und erfüllt daher FB1 und FB2, d.h. $\mathcal{M}$ erzeugt einen Filter,

$$\mathcal{F} = \{U \subseteq X : \exists\, m \in \mathbb{N} : M_m \subseteq U\}.$$

Diesen Filter nennt man den Endstückfilter der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problem *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie. Dann konvergiert der Endstückfilter einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.* ⋊

1.5.5 **Definition** *In $(X, \mathcal{O}_X)$ konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn der Endstückfilter der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.* ⋊

(b) In der diskreten Topologie besteht der Umgebungsfilter von $x \in X$ aus allen Umgebungen von x, in der indiskreten Topologie nur aus X selbst.

In der indiskreten Topologie konvergiert daher jede Folge gegen jeden Punkt von X. In der diskreten Topologie konvergieren nur Umgebungsfilter.

(c) Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$, so ist $\{A\}$ eine Filterbasis. Der davon erzeugte Filter besteht aus allen Obermengen von A. Er wird Hauptfilter von A genannt. Im Allgemeinen konvergiert er nicht, (aber z.B. für $A = \{X\}$, $x \in X$.)

(d) Es kann durchaus vorkommen, dass ein Filter gegen mehrere Punkte eines topologischen Raumes konvergiert. (z.B. in der indiskreten Topologie)

(e) Sei X topologischer Raum, dann ist $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A\}$ mit $X \setminus A$ endlich bzw. abzählbar ein Filter, falls X unendlich bzw. überabzählbar ist. Ob er konvergiert hängt von der Topologie ab. $\rtimes$

Bemerkung zu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Man kann $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ als Menge von Folgen $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ identifizieren. Mit der Produkttopologie erhalten wir die Umgebungen

$$U_{\varepsilon,x} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\},$$

für $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}$. Es gibt keine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, die diese Umgebungen so erzeugen könnte. Die Umgebungen sind die der punktweisen Konvergenz. $\multimap$

2 Weitere Grundbegriffe

§1 Trennungs- und Abzählbarkeitsaxiome

Sei nun X topologischer Raum mit $\mathcal{O}_X, \mathcal{A}_X, \mathcal{T} : X \to \mathcal{PP}(X)$. Für $y \in X$ sei $U(y) \in \mathcal{U}_y$.

2.1.1 **Fragen** (a) *Wann ist der Grenzwert eines konvergenten Filters auf X eindeutig?*

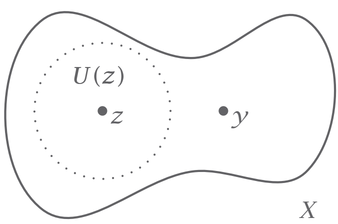
(b) *Wann kann man zwei Punkte $y, z \in X$ ($z \neq x$) durch Umgebungen trennen?*

(c) *Wann kann man Punkte $y, z \in Y$ durch eine stetige reelle Funktion trennen, d.h. $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $f(z) \neq f(y)$?* ⋊

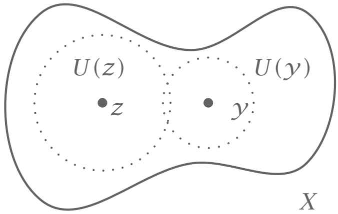
Um diese Fragen zu beantworten brauchen wir einen Begriff der "Nähe". Dazu führen wir die Trennungsaxiome ein.

Definition *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum mit $\mathcal{A}_X$, dann ist X ein T_i-Raum, falls $(X, \mathcal{O}_X)$ das Axiom T_i erfüllt:*

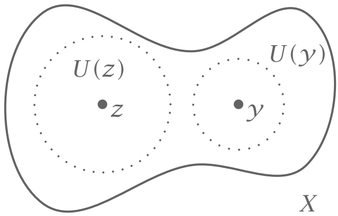
T_0 *Zu je zwei Punkten $z \neq y$ hat einer der Punkte eine Umgebung, die den anderen Punkt nicht enthält.*



T_1 *Zu je zwei Punkten $z \neq y \in X$ gibt es Umgebungen $U(z) \in \mathcal{U}_z$ und $U(y) \in \mathcal{U}_y$ mit $y \notin U(z)$ und $z \notin U(y)$.*

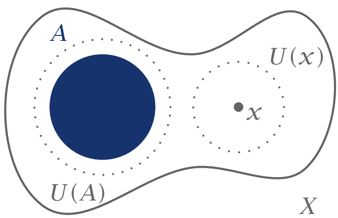


T_2 *Zu zwei Punkten $z \neq y$ in X gibt es disjunkte Umgebungen, d.h. es gibt $U(z) \in \mathcal{U}_z$ und $U(y) \in \mathcal{U}_y$ mit $U(z) \cap U(y) = \emptyset$.*

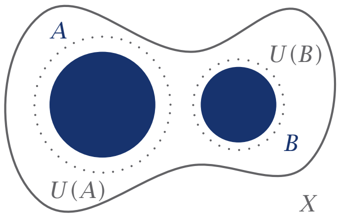


Dieses Axiom ist äquivalent dazu, dass X ein Hausdorffraum ist.

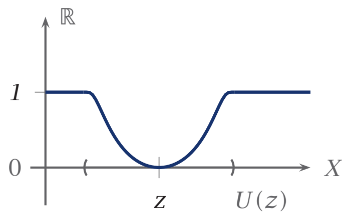
T_3 *Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \in \mathcal{A}_X$ und jedem Punkt $z \in X$ mit $z \notin A$ gibt es $U(A) \in \mathcal{O}_X$, $U(x) \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in U(x)$, $A \subseteq U(A)$ so, dass $U(x) \cap U(A) = \emptyset$ ist.*



T_4 *Zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \in \mathcal{A}_X$ gibt es offene Mengen $U(A), U(B) \in \mathcal{O}_X$ mit $A \subseteq U(A)$, $B \subseteq U(B)$ und $U(A) \cap U(B) = \emptyset$.*



T_{3a} *Zu jedem $z \in X$ und jeder offenen Umgebung $U(z) \in \mathcal{U}_z$ von z gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(z) = 0$ und $f(y) = 1$ für alle $y \in X$ mit $y \notin U(z)$.*



T_5 *Zu je zwei Mengen $A, B \subseteq X$ mit $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ gibt es disjunkte offene Obermengen.* $\rtimes$

2.1.2 **Definition** *X ist hausdorffsch bzw. Hausdorffraum, wenn gilt*

$$\forall\ y, z \in X : y \neq z\ \exists\ U(z) \in \mathcal{U}_z, U(y) \in \mathcal{U}_y : U(z) \cap U(y) = \emptyset. \quad \rtimes$$

2.1.3 **Definition** (a) *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt T_i-Raum, falls X eines der Axiome T_i, $(i = 0, 1, 2, 3, 3a, 4, 5)$ erfüllt.*

(b) *$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt regulär, wenn X ein T_1 und T_3 Raum ist.*

(c) $(X, \mathcal{O}_X)$ *heißt vollständig regulär, wenn X ein T_1 und T_{3a} Raum ist.*

(d) $(X, \mathcal{O}_X)$ *heißt normal, falls X ein T_1- und ein T_4-Raum ist.*

(e) $(X, \mathcal{O}_X)$ *heißt vollständig normal oder normal erblich, falls X ein T_1- und ein T_5-Raum ist.* ⋊

2.1.4 **Satz** $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. ⋊

2.1.5 **Satz** *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein T_1-Raum genau dann, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind (und damit auch alle endlichen Teilmengen von X).* ⋊

» "⇒": Sei X ein T_1-Raum und sei $z \in X$. Dann gibt es zu jedem $y \in X \setminus \{z\}$ eine offene Umgebung $U(y)$ mit $z \neq U(y)$. Folglich ist $y \in X \setminus \{z\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{z\}} U(y)$. Also ist $\{x\} = X \setminus (X \setminus \{z\})$ abgeschlossen.

"⇐": Seien $z, y \in X$, $z \neq y$, $\{z\}, \{y\} \in \mathcal{A}_X$. Dann sind $U(z) = X \setminus \{z\}$ und $U(y) = X \setminus \{y\}$ Umgebungen von z bzw. von y und mit $y \notin U(z)$, $z \notin U(y)$. Also gilt T_1. «

2.1.6 **Korollar** *normal ⇒ regulär ⇒ $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.* ⋊

2.1.7 *Bemerkung.* Es gilt sogar vollständig normal ⇒ normal ⇒ vollständig regulär ⇒ regulär. ⊸

2.1.8 **Satz** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum.*

(a) *Ist X normal und $A \in \mathcal{A}_X$, so ist $(A, \text{Spurtopoloige})$ normal.*

(b) *Ist X ein T_1- und T_5-Raum, so ist jeder Unterraum von X normal (daher auch normal erblich).* ⋊

» Hausaufgabe. «

2.1.9 **Satz** *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist hausdorffsch (d.h. T_2-Raum) genau dann, wenn jeder konvergente Filter in X gegen genau einen Punkt von X konvergiert. Insbesondere sind die Grenzwerte konvergenter Folgen in Hausdorffräumen eindeutig bestimmt.* ⋊

» “⇒”: Sei $\mathcal{F}$ Filter auf X und konvergiere $\mathcal{F}$ gegen die Punkte $z, y \in X$. D.h. $U_z \subseteq \mathcal{F}$ und $U_y \subseteq \mathcal{F}$.

Angenommen $z \neq y$ seien $U(z) \in U_z, U(y) \in U_y$ mit $U(z) \cap U(y) = \emptyset$. (Existenz wegen T_2) Dann ist $U(z), U(y) \in \mathcal{F}$ wegen $U_z, U_y \subseteq \mathcal{F}$ aber dann ist auch $\emptyset \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ abgeschlossen gegenüber Durchschnitten. ϟ

Also ist $z = y$.

“⇐”: Sei das T_2 Axiom nicht erfüllt, dann gibt es Punkte $z, y \in X$, $z \neq y$ so, dass für alle $U(z) \in U_z, U(y) \in U_y$ gilt $U(z) \cap U(y) = \emptyset$. Das System aller dieser Teilmengen $U(z) \cap U(y)$ erfüllt FB1 und FB2. Sei $\mathcal{F}$ der von diesen Mengen erzeugte Filter. $U(z) \in U_z, U(y) \in U_y : U(z) \supseteq U(z) \cap U(y) \subseteq U(y)$, also ist $U(z), U(y) \in \mathcal{F}$, also ist $U_z, U_y \in \mathcal{F}$.

Damit konvergiert $\mathcal{F}$ gegen z und y, der Grenzwert ist also nicht eindeutig. ϟ
«

2.1.10 **Satz** *Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig und sei Y hausdorffsch. Dann ist der Graph $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in Y\}$ abgeschlossen in der Produkttopologie $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$.* ⋊

» Sei $(x, y) \in X \times Y$ mit $(x, y) \notin G$. Dann ist $y \neq f(x) = z \in Y$. Y ist T_2 also gilt

$$\exists\ U(y), U(z) \text{ mit } U(y) \cap U(z) = \emptyset.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $U(y), U(z) \in \mathcal{O}_X$, da jede Umgebung eines Punktes eines topologischen Raumes eine offene Umgebung des Punktes enthält.

Da f stetig ist, existiert eine Umgebung $V(x) \in \mathcal{U}_x$ mit

$$f(V(x)) \subseteq U(f(x)) = U(z),$$

also ist auch $U(y) \cap f(V(x)) = \emptyset$ und $V(x) \times U(y)$ ist eine offene Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ in der Produkttopologie, die G nicht trifft. Daher ist das Komplement $(X \times Y) \setminus G$ offen in $X \times Y$ und folglich ist G abgeschlossen. «

2.1.11 **Satz** *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ist hausdorffsch genau dann, wenn die Diagonale*

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\} \subseteq X \times X,$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ *in der Produkttopologie ist.* $\rtimes$

» Die Diagonale ist der Graph der Identität und id ist Homöomorphismus, wenn die Topologien gleich sind. «

Wie wir bereits gesehen haben, enthält jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine nichtleere offene Umgebung $\mathcal{O}_X \ni O \subseteq U$. Für abgeschlossene Umgebungen ist diese Aussage im Allgemeinen falsch.

2.1.12 **Satz** *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

i) X *ist ein* T_3*-Raum.*

ii) Sei $x \in X$*. Dann enthält jede offene Umgebung von* x *eine abgeschlossene Umgebung von* x*.*

ii) gilt insbesondere für normale Räume, da diese das T_1 *und das* T_3 *Axiom erfüllen.* $\rtimes$

» i)⇒ii): Sei $z \in X$ und sei $U(z) \in \mathcal{U}_z \cap \mathcal{O}_X$. Dann ist $A = X \setminus U(z) \in \mathcal{A}_X$.

Wegen T_3 gilt: Es gibt $V_A \in \mathcal{O}_X,\ A \subseteq V_A$ und $W(z) \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{U}_z$ mit $W(z) \cap V_A = \emptyset$.

$W(z) \subseteq X \setminus V_A \in \mathcal{A}_X \Rightarrow \overline{W(z)} \subseteq X \setminus V_A$. Also ist $\overline{W(z)}$ eine abgeschlossene Umgebung von z, die A nicht trifft (da sie $V(A) \supseteq A$ nicht trifft).

$(z \in W(z) \subseteq \overline{W(z)} \subseteq X \setminus V_A \subseteq X \setminus A = U(z))$

ii)⇐i): Sei $z \in X$, $A \in \mathcal{A}_X$ mit $z \notin A$. Dann gilt $z \in X \setminus A = B \in \mathcal{O}_X$. Nach Vorraussetzung ii) gibt es eine abgeschlossene Umgebung $V(z) \in \mathcal{U}_z \cap \mathcal{A}_z$ mit $z \in V(z) \subseteq B = X \setminus A$. In $V(z)$ gibt es aber eine offene Umgebung $U(z)$ von z und wir haben:

$$z \in U(z) \subseteq \overline{U(z)} \subseteq V(z) \subseteq B = X \setminus A.$$

Also ist $A \subseteq X \setminus V(z) \in \mathcal{O}_X$ $z \in U(z)$ also gilt $U(z) \cap X \setminus V(z) = \emptyset$. «

Motivation: Bisher haben wir den Konvergenzbegriff nur in Zusammenhang mit Folgen verwendet, dies sind jedoch abzählbare Mengen, denn die Menge der Endstückfilter besitzt eine abzählbare Basis. Aus der Analysis kennen wir einen weiteren Konvergenzbegriff, die Folgenstetigkeit. Diese ist nicht ohne Weiteres auf beliebige topologische Räume übertragbar.

2.1.13 **Definition** (a) *Eine Filterbasis U des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_x$ von $x \in X$ heißt Umgebungsbasis von X.*

So: $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{P}(X)$, jedes Element von U ist Umgebung von x und jede Umgebung von x enthält ein Element von U als Teilmenge.

Bsp $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_X = \{A \in \mathcal{U}_x : A \text{ ist offen.}\} = \{\text{offene Umgebungen von } X\}$ ist Umgebungsbasis von $\mathcal{U}_x$. ⋊

(b) *X erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

Bsp Für den $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie und $z \in \mathbb{R}^n$ ist,

$$\{U_\varepsilon(z) : 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\},$$

Umgebungsbasis. ⋊

(c) *X erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn X eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{O}_X$ besitzt.* ⋊

Bemerkung. Das 2. Abzählbarkeitsaxiom impliziert das 1., denn ist $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{O}_X$, dann ist $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}_x$ Umgebungsbasis von z.

2.1.14 **Bsp** (a) Jeder metrische Raum X (mit induzierter Topologie) erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, da

$$U = \left\{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\right\},$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von $x \in X$ bildet.

(b) Der $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, denn

$$\left\{U_{y_n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n\right\},$$

ist Basis der Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$.

(c) Ein überabzählbares topologisches Produkt $\prod\limits_{i \in \mathcal{I}} X_i$ ($\mathcal{I}$ überabzählbare Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologischer Raum für jedes $i \in \mathcal{I}$) erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom nicht, es sei denn die X_i tragen die indiskrete Topologie. ⋊

» Hausaufgabe. «

Bemerkung. In einem T_2-Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, kann man Filterkonvergenz vollständig auf Konvergenz von Folgen zurückführen. ⊸

2.1.15 **Definition** *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ Abbildung. Dann heißt f folgenstetig, falls gilt:*

Konvergiert die Folge (x_n) in X gegen $x \in X$, so konvergiert die Folge der Bilder $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x) \in Y$.

Kurzform: $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. ⋊

2.1.16 **Satz** *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ Abbildung, dann gilt*

1.) Ist f stetig, so ist f folgenstetig.

2.) Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom und ist f folgenstetig, so ist f stetig. ⋊

2.1.17 **Satz** *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ Abbildung, $z \in X$, dann ist f stetig in z genau dann, wenn $f(\mathcal{U}_z)$ gegen $f(z)$ konvergiert.* ⋊

» Übung. «

§2 Zusammenhang und Wegzusammenhang

2.2.1 **Satz** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ offen. Sei $\mathcal{O}_A$ die Spurtopologie auf A und sei $Y \subseteq A$, dann ist $Y \in \mathcal{O}_A$ genau dann, wenn $Y \in \mathcal{O}_X$.* $\rtimes$

» "$\Rightarrow$": Gilt für beliebige $A \subseteq X$ wegen $Y = A \cap Y$ nach 1.2.3.

"$\Leftarrow$": $Y \in \mathcal{O}_A \Rightarrow \ \exists\, Z \in \mathcal{O}_X : Y = Z \cap A \Rightarrow Y \in \mathcal{O}_X$. «

2.2.2 **Satz** $A \in \mathcal{O}_X \Rightarrow \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_X \cap \mathcal{P}(A)$.

$A \in \mathcal{A}_X \Rightarrow \mathcal{A}_A = \mathcal{A}_X \cap \mathcal{P}(A)$. $\rtimes$

Gibt es auch außer der leeren Menge und dem ganzen Raum X Mengen A mit $A \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{A}_X$?

2.2.3 **Satz** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen in X. Dann ist $A^c \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{A}_X$ und $A^c = X \setminus A$. Seien $\mathcal{O}_A$ bzw. $\mathcal{O}_B$ Spurtopologie von A bzw. A^c als Teilmengen von X. Dann ist $\mathcal{O}_X$ die Summentopologie auf der disjunkten Vereinigung $A \dot\cup A^c$.* $\rtimes$

» Sei $A \in \mathcal{O}_X$, dann ist $A^c \in \mathcal{A}_X$ und sei $A \in \mathcal{A}_X$, dann ist $A^c \in \mathcal{O}_X$, also ist $A^c \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{A}_X$. Nach 2.2.2 gilt

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_X \cap \mathcal{P}(A), \ \mathcal{O}_{A^c} = \mathcal{O}_X \cap \mathcal{P}(A^c),$$
$$\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_X \cap \mathcal{P}(A), \ \mathcal{A}_{A^c} = \mathcal{A}_X \cap \mathcal{P}(A^c).$$

Sei $U \in \mathcal{O}_X$, $U_1 = U \cap A$, $U_2 = U \cap A^c$ und

$$U_1 \cap U_2 = (U \cap A) \cup (U \cap A^c) = U \cap (A \cup A^c) = U,$$

also ist

$$\mathcal{O}_X = \{U_1 \cup U_2 \ : \ U_1 \in \mathcal{O}_A, U_2 \in \mathcal{O}_B\},$$

und dies ist genau die Summentopologie der disjunkten Vereinigung $A \cup B$, wenn $A, \ A^c$ die Spurtopologie tragen.

Also ist $X = A \dot\cup A^c$. «

2.2.4 **Definition** *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ *heißt zusammenhängend, wenn* X *nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen geschrieben werden kann.* ⋊

2.2.5 *Bemerkung.* Der topologische Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $\mathcal{O}_X \cap \mathcal{A}_X = \{\emptyset, X\}$ und genau dann, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ nicht als topologische Summe zweier echter Teilräume geschrieben werden kann. ⊸

2.2.6 **Lemma** *Seien* $A, B \leq (X, \mathcal{O}_X)$ *und* $A \subseteq B \Rightarrow A \leq B$ *bzw.* $B \leq A, A \leq X \Rightarrow B \leq X$.

Sei $A \subseteq B \leq X$ *und* $(X, \mathcal{O}_X)$ *topologischer Raum. Dann stimmt die Spurtopologie von* A *als Teilmenge von* B *mit* A *als Teilmenge von* X *überein.* ⋊

» Sei $\mathcal{O}_A$ die Spurtopologie von A als Teilmenge von X und $\tilde{\mathcal{O}}_A$ die Spurtopologie A also Teilmenge von B.

Zu zeigen ist nun, dass $\mathcal{O}_A = \tilde{\mathcal{O}}_A$:

$$\begin{aligned} U \in \tilde{\mathcal{O}}_A &\Leftrightarrow \ \exists\, W \in \mathcal{O}_B : U = A \cap W, \\ W \in \mathcal{O}_B &\Leftrightarrow \ \exists\, Z \in \mathcal{O}_X : W = Z \cap B, \\ \Rightarrow U &= A \cap W = A \cap Z \cap B = A \cap Z \in \mathcal{O}_A. \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\mathcal{O}}_A \subseteq \mathcal{O}_A$. Ist $U \in \mathcal{O}_A$, so gibt es ein $V \in \mathcal{O}_X$ mit

$$U = A \cap V = A \cap V \cap B \in \tilde{\mathcal{O}}_A,$$

da $V \cap B \in \mathcal{O}_B$. «

Das Bilden von Unterräumen ist also transitiv.

2.2.7 **Definition** *Eine Teilmenge* A *von* $(X, \mathcal{O}_X)$ *heißt zusammenhängend, wenn* $(A, \mathcal{O}_A)$ *zusammenhängend ist.* ⋊

2.2.8 **Korollar aus 2.2.6** *Seien* $A, B \leq X$ *und* X *topologischer Raum mit* $A \subseteq B$*, dann ist* A *als Unterraum von* B *genau dann zusammenhängend, wenn* A *als Unterraum von* X *zusammenhängend ist.* ⋊

2.2.9 **Satz** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum und sei $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ mit $\mathcal{I}$ Indexmenge eine Familie zusammenhängender Teilräume von X.*

$A_i \leq X$ mit Spurtopologie O_i für $i \in \mathcal{I}$.

Sei $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \neq \varnothing$, dann ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$ ebenfalls zusammenhängend. ⋊

» Ohne Einschränkung können wir A gleich ganz X setzen. Sind $U, V \in \mathcal{O}_X$ mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \varnothing$ und $i \in \mathcal{I}$, so ist $A_i \cap U, A_i \cap V \in \mathcal{O}_i$ und

$$A_i = A_i \cap X = A_i \cap (U \cup V) = (A_i \cap U) \cup (A_i \cap V),$$
$$(A_i \cap U) \cap (A_i \cap V) = A_i \cap (U \cap V) = A_i \cap \varnothing = \varnothing.$$

Nach Voraussetzung ist A_i zusammenhängend, es gilt also $A_i \cap U = \varnothing$ oder $A_i \cap V = \varnothing$ und $A_i \cap V = A_i$ oder $A_i \cap U = A_i$.

Ohne Einschränkung sei $(A_i \cap U) = A_i,\ (A_i \cap V) = \varnothing$. Dann ist

$$\varnothing \neq \bigcap_{j\in\mathcal{I}} A_j \subseteq A_i \subseteq U,$$

dann folgt,

$$\forall\ i \in \mathcal{I} : A_i \cap U \supseteq \bigcap_{j\in\mathcal{I}} A_j \neq \varnothing,$$

wie oben gilt daher $\forall\ i \in \mathcal{I} : A_i \subseteq U$.

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \subseteq U \Rightarrow U = X$ und $V = \varnothing \Rightarrow A = X$ ist zusammenhängend. «

2.2.10 **Definition/Lemma** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Definiere $\sim$ auf X durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ A \leq X : A$ ist zusammenhängend und $x, y \in A$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.* ⋊

» (a) Sei $x \in X, A = \{x\}$, dann ist $\mathcal{O}_A = \{\varnothing, \{x\}\}$ zusammenhängend, also ist $x \sim x$. (Reflexivität)

(b) Die Symmetrie ist offensichtlich.

(c) Sei $x \sim y$ und $y \sim z$ $(x, y, z \in X)$. Dann gibt es zusammenhängende Unterräume $A, B \subseteq X$ mit $x, y \in A$ und $y, z \in B$.

Da $A \cap B \ni y \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Also ist nach 2.2.9 $A \cup B$ zusammenhängend aber $x, z \in A \cup B$ also gilt $x \sim z$. (Transitivität) «

2.2.11 **Definition** *Die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ von 2.2.10 heißen Zusammenhangskomponenten. Ist $x \in X$, so ist die Zusammenhangskomponente von X, die x enthält, gerade die Vereinigung alle zusammenhängender Teilmengen von X, die x enthalten. Diese ist nach 2.2.9 zusammenhängend und daher die eindeutig bestimmte maximale zusammenhängende Teilmenge von X, die x als Element enthält.* $\rtimes$

2.2.12 **Satz** *Sei A zusammenhängende Teilmenge des topologischen Raumes X. Dann ist $\overline{A}$ zusammenhängend. Da Zusammenhangskomponenten maximale zusammenhängende Teilmengen von X sind, sind sie insbesondere abgeschlossen in X.*

» Ohne Einschränkung können wir $\overline{A} = X$ annehmen. Seien $U, V \in \mathcal{O}_X$ mit $U \cup V = \overline{A} = X$ und $U \cap V = \emptyset$.

Seien $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$. Dann sind $U', V' \in \mathcal{O}_A$.

$$A = X \cap A = (U \cup V) \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A) = U' \cup V'.$$

Klar: $U' \cap V' = \emptyset$. A zusammenhängend $\Rightarrow U' = \emptyset$ oder $V' = \emptyset$.

Ohne Einschränkung können wir $U' = \emptyset$ annehmen. Sei $z \in U$. Dann ist $U \in \mathcal{U}_z$, weil U offen in X ist. Wegen $z \in \overline{A}$ ist z BP von A und wir haben andererseits $U' = U \cap A = \emptyset$. ↯wegen 1.1.12. Also ist A zusammenhängend. «

2.2.13 **Korollar** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum und $Z \subseteq X$ Zusammenhangskomponente, dann ist $Z \in A_X$.* $\rtimes$

Leider sind Zusammenhangskomponenten im Allgemeinen nicht offen, unter Zusatzvoraussetzungen erhalten wir jedoch ein positives Ergebnis.

2.2.14 **Korollar** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum mit nur endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Dann ist X die topologische Summe seiner Zusammenhangskomponenten.* $\rtimes$

» Seien $Z_1, \dots, Z_k$ Zusammenhangskomponenten, dann ist $Z_2 \cup \dots \cup Z_k = X \setminus Z_1$ und daraus folgt, dass $Z_2 \cup \dots \cup Z_k$ abgeschlossen ist, also ist $Z_1 \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{A}_X$ analog folgt dies für die Z_i. «

2.2.15 **Definition** *Ein topologischer Raum, dessen Zusammenhangskomponenten nur aus je einem Punkt bestehen heißt total unzusammenhängend.* $\rtimes$

Bsp $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend in jeder Topologie. $\rtimes$

2.2.16 *Bemerkung.* (a) Diskrete Räume sind total unzusammenhängend.

(b) $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ mit Spurtopologie ist total unzusammenhängend. $\multimap$

2.2.17 **Übung** *Ist $A \leq \mathbb{R}$ zusammenhängend, $x, y \in A$, dann ist $[x, y] \subseteq A$.* $\rtimes$

2.2.18 **Definition** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum. Ein Weg φ in X ist eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X$. Dabei heißet $\varphi(0)$ Anfangs- und $\varphi(1)$ Endpunkt des Weges φ. Man sagt φ ist Weg von $\varphi(0)$ nach $\varphi(1)$.* $\rtimes$

Es ist anschaulich klar was gemeint ist. Die uns bekannte Vorstellung eines "Weges" ist jedoch mit Vorsicht zu genießen, da sich diese oft auf den $\mathbb{R}^2$ bezieht und dieser nicht gerade der allgemeinste topologische Raum ist.

2.2.19 **Definition** *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt wegzusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg von x nach y existiert, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.* $\rtimes$

Sei nun die Situation folgende: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ seien topologische Räume und $(A, \mathcal{O}_A), (B, \mathcal{O}_B) \leq (X, \mathcal{O}_X)$, sowie $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(\alpha) = g(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in A \cap B$.

Sei nun

$$F : A \cup B \to Y,\ \alpha \mapsto \begin{cases} f(\alpha), & \alpha \in A \\ g(\alpha), & \alpha \in B, \end{cases}$$

$C = A \cup B$ mit Spurtopologie $\mathcal{O}_C$ in X.

Offensichtlich ist F wohldefiniert, die Frage nach der Stetigkeit erfordert jedoch eine nähere Betrachtung. Für $V \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \{\alpha \in C : F(\alpha) \in V\} \\ &= \{\alpha \in A : f(\alpha) \in V\} \cup \{\alpha \in A : g(\alpha) \in V\} \\ &= f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V). \end{aligned}$$

Klar ist, dass $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_A$ und $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_B$, da f und g stetig sind, damit ist $F^{-1}(V)$ offen in C.

Im Allgemeinen müssen $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_A$ und $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_B$ aber nicht notwendigerweise offen in C sein, denn

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= O_1 \cap A, \\ g^{-1}(V) &= O_2 \cap B. \end{aligned}$$

Sind aber $A, B \in \mathcal{O}_X$, dann folgt $A \cup B \in \mathcal{O}_X$ und mit 2.2.1 folgt, dass folgt $f^{-1}(V), g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_C$.

Analog dazu argumentiert man für $A, B \in \mathcal{A}_X$.

Damit haben wir folgenden Satz gezeigt

2.2.20 **Satz** *Seien X, Y topologische Räume, $A, B \leq X$ beide offen bzw. abgeschlossen in X und $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(\alpha) = g(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in A \cap B$. Sei*

$$F : A \cup B \to Y,\ \alpha \mapsto \begin{cases} f(\alpha), & \alpha \in A \\ g(\alpha), & \alpha \in B, \end{cases}$$

dann ist F stetig auf $A \cup B$. $\rtimes$

2.2.21 **Korollar** *Sei X topologischer Raum und $\alpha : [0,1] \to X$, $\beta : [0,1] \to X$ seien Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Dann wird durch folgende Regel,*

$$\gamma : [0,1] \to X,\ t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ein Weg von $\alpha(0)$ nach $\beta(1)$ definiert. $\rtimes$

» Die Abbildungen

$$[0,\frac{1}{2}] \to [0,1],\ t \mapsto 2t \text{ und } [\frac{1}{2},1] \to [0,1],\ t \mapsto 2t-1,$$

sind stetig. Also sind auch

$$\tilde{\alpha} : [0,\frac{1}{2}] \to X,\ t \mapsto \alpha(2t) \text{ und } \tilde{\beta} : [\frac{1}{2},1] \to [0,1],\ t \mapsto \beta(2t-1),$$

stetig. Außerdem ist $\tilde{\beta}(\frac{1}{2}) = \beta(-1+2\frac{1}{2}) = \beta(0) = \tilde{\alpha}(\frac{1}{2})$. Also stimmen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ auf $\left\{\frac{1}{2}\right\} = [0,\frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2},1]$ überein.

Somit ist nach 2.2.20 die Abbildung

$$\gamma : [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1] \to X,\ t \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(t) = \alpha(2t), & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{\beta}(t) = \beta(2t-1), & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

stetig und daher Weg von $\alpha(0)$ nach $\beta(1)$.

2.2.22 **Definition/Lemma** *Sei X topologischer Raum. Definiere $x \sim y$ für $x,y \in X$, falls ein Weg von x nach y existiert. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Wegzusammenhangskomponenten, X ist die disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten. Die Wegzusammenhangskomponente, die $x \in X$ enthält besteht aus allen Punkten $z \in X$, die mit x durch einen Weg in X verbindbar sind. Sie ist der größte wegzusammenhängende Teilraum von X, der $x \in X$ als Punkt enthält.* ⋊

» $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, denn

(a) Sei $x \in X$. Dann ist die konstante Funktion $\alpha : [0,1] \to X,\ t \mapsto x,\ \forall\ t \in [0,1]$ ein Weg von x nach x Also ist $x \sim x$. (Reflexivität)

(b) Sei $x \sim y$ mit $x,y \in X$ und α Weg von x nach y. Dann wird durch $\beta : [0,1] \to X,\ t \mapsto \alpha(1-t)$ ein Weg von y nach x definiert, also ist $y \sim x$. (Symmetrie)

(c) Dies ist gerade Korollar 2.2.21. «

Warnung: Im Gegensatz zu Zusammenhangskomponenten sind Wegzusammenhangskomponenten nicht zwingend abgeschlossen in X. ⊸

2.2.23 **Lemma** *Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist zusammenhängend bezüglich der Spurtopologie auf I.* $\rtimes$

» Angenommen $I = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \in \mathcal{O}_I$. Sei $a \in A$ und $b \in B$ und ohne Einschränkung sei $a < b$. Sei $s = \inf\{x \in B : a < x\}$. Dann gibt es nach Definition des Infimums in jeder Umgebung von s Punkte von B. Wegen $I = A \cup B$ ist $s \in A$ oder $s \in B$. Ist $s \in A$, dann folgt $\exists\, V \in \mathcal{U}_s : I \supseteq V$ und $V \subseteq A$. Aber dann ist $V \cap B = \emptyset$. ↯
Also ist $s \in B$ aber $(a, s) \subseteq A$, sonst wäre s nicht Infimum. Da $B \in \mathcal{O}_I$ enthält B eine Umgebung V von s, d.h. eine offene Umgebung der Form $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ von $s \in \mathbb{R} \cap I$. Daher gibt es ein $x \in I : a < x < s$ mit $x \in B$ im Widerspruch dazu, dass s Infimum ist. Daraus folgt die Behauptung. «

2.2.24 **Satz** *Sei X topologischer Raum, ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.* $\rtimes$

» Seien $\emptyset \neq A, B \in \mathcal{O}_X$ gegeben mit $A \cup B = X$ und $A \cap B = \emptyset$, $x \in A$, $y \in B$ und $\alpha : [0,1] \to X$ Weg von x nach y. Dann ist

$$\emptyset = \alpha^{-1}(A \cap B) = \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B),$$

sowie

$$\alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(X) = [0,1].$$

Weil α stetig ist, sind $\alpha^{-1}(A)$ und $\alpha^{-1}(B) \in \mathcal{O}_I$. Wegen $x \in A$, $y \in B$ sind $\alpha^{-1}(A)$ und $\alpha^{-1}(B) \neq \emptyset$. Also lässt sich I in eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen zerlegen. ↯ «

2.2.25 *Bemerkungen.*

1.) Da Homöomorphismen offene (abgeschlossene) Mengen bijektiv übertragen, ist klar, dass Zusammenhang eine topologische Invariante ist. Ebenso ist Wegzusammenhang eine topologische Invariante, denn sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg und $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so ist $f \circ \alpha : [0,1] \to Y$ ein Weg in Y von $f \circ \alpha(0)$ nach $f \circ \alpha(1)$.

2.) Es gilt sogar: Ist $f : X \to Y$ stetige Abbildung und ist X zusammenhängend, so ist $\operatorname{im} f = f(X)$ zusammenhängend. Unter stetigen Abbildungen sind Bilder von zusammenhängenden Räumen zusammenhängend.

3.) Damit folgt mit 2.2.17 sofort der

Zwischenwertsatz *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ zusammenhängender topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \operatorname{im} f$ mit $a < b$, dann ist $[a, b] \subseteq \operatorname{im} f$, d.h. f nimmt jeden Wert zwischen a und b an.* ⋊

4.) Die Umkehrung von 2.2.24 ist im Allgemeinen falsch. Hier ist ein Beispiel für einen zusammenhängenden Raum, der nicht wegzusammenhängend ist:

Sei $X = f((0, \infty))$ mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sin 1/x)$. X ist als Bild der stetigen Abbildung f definiert und auf dem Intervall $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also auch $\overline{X} = X \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$.

$\overline{X}$ ist nicht wegzusammenhängend, denn sei $\alpha : [0, 1] \to \overline{X}$ ein Weg von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nach $(\frac{1}{\pi}, 0) = \alpha(1)$.

Die Projektionen $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a$ und $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto b$ sind stetig, also auch die Kompositionen $p_1 \circ \alpha$ und $p_2 \circ \alpha$ von $[0, 1] \to \mathbb{R}$.

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt daher $p_1 \circ \alpha$ alle Werte zwischen 0 und $1/\pi$ an, also insbesondere die Werte $\frac{2}{(2n+1)\pi}$ für $n = 2, 3, \ldots$

Daher nimmt dort $p_2 \circ \alpha$ die Werte $\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$ und somit die Werte ± 1 in jeder Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ an.

Es gibt also kein $\delta > 0$ so, dass $[0, \delta)$ durch $p_2 \circ \alpha$ ganz in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ abgebildet wird. Alle offenen Umgebungen von $(0, 0)$ in $\overline{X}$ sind aber von der Form $[0, \delta)$ mit $\delta > 0$ und somit ist $p_2 \circ \alpha$ nicht stetig. ↯

2.2.26 **Satz** *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und ist X wegzusammenhängend, so auch $\operatorname{im} f = f(X)$.* ⋊

» 1.) Sei X wegzusammenhängend und $a, b \in Y$. Ohne Einschränkung ist $\operatorname{im} f = Y$. Dann folgt $\exists\ u, v \in X$ mit $f(u) = a$ und $f(v) = b$ und $\alpha : [0, 1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = u$ und $\alpha(1) = v$. Dann ist $f \circ \alpha : [0, 1] \to Y$ stetig und daher Weg von $f \circ \alpha(0) = f(0) = a$ nach $f \circ \alpha(1) = f(v) = b$. Also ist Y wegzusammenhängend.

2.) Sei Y nicht zusammenhängend, $Y = A \dot\cup B$ mit $A, B \in \mathcal{O}_Y$, dann ist

$$X = f^{-1}(A) \dot\cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(Y),$$

disjunkte Vereinigung der offenen, nichtleeren Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$. Also ist auch X nicht zusammenhängend. ↯ «

2.2.27 **Bsp** Da $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie zusammenhängend ist, gilt der Zwischenwertsatz. Dann ist $f : X \to Y$ stetig, X zusammenhängend und seien $x, y \in X$ mit $f(x) = a$, $f(y) = b$ mit $a < b$. Sei $a < c < b$. Angenommen $c \notin \operatorname{im} f$, dann ist

$$\underbrace{f^{-1}(-\infty, c)}_{\in \mathcal{O}_X} \cap \underbrace{f^{-1}(c, \infty)}_{\in \mathcal{O}_X} = \emptyset \text{ und } f^{-1}(-\infty, c) \cup f^{-1}(c, \infty) \supseteq f^{-1}(\operatorname{im} f) = X.$$

Also haben wir eine disjunkte Zerlegung von X in nichtleere offene Teilmengen. ↯

Versieht man dagegen $\mathbb{R}$ mit der von den Intervallen $[a, b)$ erzeugten Topologie. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$ stetig, da $f^{-1}(0) = (-\infty, 0)$ und $f^{-1}(1) = [0, \infty)$ beide offen und abgeschlossen sind.

$$\begin{aligned} [0, \infty) &= \bigcup_{b > 0} [0, b) \Rightarrow [0, \infty) \text{ offen,} \\ &\Rightarrow (-\infty, 0) = \mathbb{R} \setminus [0, \infty) \text{ ist abgeschlossen,} \\ (-\infty, 0) &= \bigcup_{a <} [a, 0) \text{ ist offen.} \end{aligned}$$ ⋊

2.2.28 **Definition** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, dann heißt X lokal zusammenhängend (lokal wegzusammenhängend), falls jede offene Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zusammenhängende (wegzusammenhängende) Umgebung von x enthält.* ⋊

§3 Kompaktheit

2.3.1 **Definition** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist ein System $(U_i)_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{O}_X$ von offenen Teilmengen U_i von X, so dass $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$.* ⋊

Bemerkung. Die obige Definition ist äquivalent zu $A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}}(U_i \cap A)$, da $U_i \cap A \in \mathcal{O}_A$ und $(A, \mathcal{O}_A) \le (X, \mathcal{O}_X)$. ⊸

2.3.2 **Definition** *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt quasikompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von A eine endliche Auswahl $V_1, \ldots, V_k$ mit $V_j \in (U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ gibt, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_j$.*

In diesem Fall sagen wir auch, dass A die Heine-Borellsche Überdeckungseigenschaft besitzt.

Ein quasikompakter T_2-Raum heißt kompakt. ⋊

Bemerkung. Ob A als Teilmenge von X oder als topologischer Raum mit Spurtopologie $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}_X\}$ quasikompakt ist, ist ein und dasselbe. ⊸

2.3.3 **Satz** *(Quasi-)Kompaktheit ist eine topologische Invariante.* ⋊

» Trivial. «

Damit kommen wir unserem Ziel, der Unterscheidung zweier topologischer Räume bis auf Homöomorphie, ein ganzes Stück näher, denn es stellt sich äußerst schwierig heraus, direkt zu zeigen, dass es keinen Homöomorphismus zwischen zwei Räumen gibt, unterscheiden sich die Räume jedoch bezüglich (Quasi-) Kompaktheit, dann sind sie nicht homöomorph.

2.3.4 **Satz**

(a) *Sei X kompakt und $X \supseteq A \in \mathcal{A}_X$, dann ist A kompakt.*

(b) *Sei X ein topologischer T_2-Raum und A kompakte Teilmenge von X, dann ist $A \in \mathcal{A}_X$.*

Eine Teilmenge eines kompakten Raumes ist also genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. ⋊

» (a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und X kompakt, dann folgt $X \setminus A \in \mathcal{O}_X$. Sei nun $(U_i)_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{O}_X$ eine offene Überdeckung von A, dann ist

$$X = A \cup (X \setminus A) \subseteq (U_i)_{i\in\mathcal{I}} \cup (X \setminus A)$$

eine offene Überdeckung von X, also gibt es $V_1, \dots, V_k \in (U_i)_{i\in\mathcal{I}}$, so dass $X = \left(\bigcup_{j=1}^k V_j\right) \cup X \setminus A$. Wegen $A \subseteq X$ und $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$ folgt, dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_j$. Also ist A kompakt.

(b) Sei X topologischer T_2-Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Sei $x \in X \setminus A$ und $y \in A$, dann existieren offene Umgebungen $U_y(x)$ und $U(y)$ von x bzw. y mit $U_y(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Dabei bildet $\bigcup_{y\in A} U(y)$ eine offene Überdeckung von A und da A kompakt ist, existieren somit endlich viele $y_1, \dots, y_k$, sodass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U(y_i)$. Sei $U_{y_j}(x) = V_j \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_X$, dann ist V_j offene Umgebung von x mit $V_j \cap U(y_j) = \varnothing$ und damit ist $U = \bigcap_{j=1}^k V_j$ eine offene Umgebung von x und $U \cap U(y_j) = (\bigcap_{j=1}^k V_j) \cap U(y_j) = \varnothing$ für $j = 1, \dots, k$. Also gilt

$$U \cap A \subseteq U \cap \left(\bigcup_{j=1}^k U(y_j)\right) = \bigcup_{j=1}^k \underbrace{\left(U \cap U(y_j)\right)}_{=\varnothing} = \varnothing.$$

U ist also eine Teilmenge von $X \setminus A$, somit enthält $X \setminus A$ mit jedem Punkt $x \in X \setminus A$ auch eine Umgebung von x und ist daher offen in X, also ist A abgeschlossen. «

2.3.5 **Satz** *Ein kompakter Raum ist normal.* ⋊

» Hausaufgabe (siehe 2.3.4). «

2.3.7 **Satz von Tychonoff** *Ein topologisches Produkt von beliebig vielen (quasi-) kompakten Räumen ist (quasi-) kompakt.* ⋊

» 1.) Das topologische Produkt von Hausdorffräumen $X_\alpha (\alpha \in \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A}$ Indexmenge ist ein T_2-Raum. Denn seien $x = (x_\alpha)$ und $y = (y_\alpha)$ Elemente von $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ mit $x \neq y$, dann gibt es ein $\beta \in \mathcal{A}$ mit $x_\beta \neq y_\beta$ und $x_\beta, y_\beta \in X_\beta$. Weil X_β ein T_2-Raum ist, finden wir offene disjunkte Umgebungen U von x_β und V von y_β. Dann sind $p_\beta^{-1}(U)$ und $p_\beta^{-1}(V)$ offene Umgebungen von x bzw. y mit $p_\beta^{-1}(U) \cap p_\beta^{-1}(V) = p_\beta^{-1}(U \cap V) = p_\beta^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, also ist X ein T_2-Raum.

2.) Wir zeigen nun, dass das topologische Produkt zweier (quasi-)kompakter Räume (quasi-)kompakt ist. Per Induktion folgt dann der Satz für endliche topologische Produkte.

Seien also X, Y topologische Räume und $Z = X \times Y$ ihr topologisches Produkt. Sei $(U_i)_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{O}_Z$ eine offene Überdeckung von Z. Da jede offene Menge von Z eine Vereinigung von offenen Mengen einer Basis der Topologie $\mathcal{O}_Z$ sind, können wir annehmen, dass die U_i Elemente einer Basis von $\mathcal{O}_Z$ sind, d.h. $U_i = A_i \times B_i$ mit $A_i \in \mathcal{O}_X$ und $B_i \in \mathcal{O}_Y$ für $i \in \mathcal{I}$.

Sei $x \in X$. Wir betrachten $\{x\} \times Y = \{(x, y) \in Z : y \in y\} \leq Z$. Eine leichte Übung zeigt, dass die Abbildung $p_Y\big|_{\{x\}\times Y} : \{x\} \times Y \to Y$ ein Homöomorphismus ist.

Da Y kompakt ist, ist $\{x\} \times Y$ ebenfalls kompakte Teilmenge von Z und $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ überdeckt ganz $X \times Y$, also auch die kompakte Teilmenge $\{x\} \times Y$. Wir finden daher $U_1^x, \dots, U_k^x$ in dem System der $\{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ mit $k = k_x \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{\nu=1}^k U_\nu^x$.

Ohne Einschränkung ist für $1 \leq \nu \leq k$ der Durchschnitt $U_\nu^x \cap (\{x\} \times Y) \neq \emptyset$, sonst kann U_ν^x aus der endlichen Überdeckung entfernt werden.

$$U_\nu^x = A_\nu \times B_\nu,\ A_\nu = A_{j\nu},\ U_\nu^x = U_{j\nu} \text{ mit } A_\nu \in \mathcal{O}_X \text{ und } B_\nu \in \mathcal{O}_Y.$$

Dann ist $x \in A_\nu,\ \forall\ \nu = 1, \dots, k$, also ist $\bigcap_{\nu=1}^k A_\nu$ eine offene Überdeckung von X.

Nach Konstruktion der Produkttopologie ist $A^x \times Y = \bigcup_{\nu=1}^k U_\nu^x$. Nun ist $x \in A^x \in \mathcal{O}_X$ und daher ist $X = \bigcup_{x \in X} A^x$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in X$, sodass $X = \bigcup_{j=1}^n A^{x_j}$ ist.

Wir haben daher $X \times Y = (A^{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (A^{x_n} \times Y)$ und daraus folgt, dass $X \times Y = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{\nu=1}^n A_\nu^{x_j} \times B_\nu^{x_j} = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{\nu=1}^k U_\nu^{x_j}$.

Wir haben daher endlich viele U_i mit $i \in \mathcal{I}$ gefunden, die ganz $X \times Y$ überdecken, d.h. $X \times Y$ ist quasikomapkt.

3.) Der Fall für topologische Produkte von endlich vielen (quasi-)kompakten topologischen Räumen folgt per Induktion wegen $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z$ für topologische Produkte.

4.) Für unendliche topologische Produkte (quasi-)kompakter Räume ist das Ergebnis kontraintuitiv und äquivalent zum Zorn'schen Lemma. Wir verschieben den Beweis auf das Ende der Vorlesung. «

Die Umkehrung von Satz 2.3.7 gilt ebenfalls und folgt leicht aus folgendem Satz:

2.3.8 **Satz** *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X quasikompakt, so auch $f(X) = \operatorname{im} f$. Ist Y darüber hinaus T_2-Raum, so ist $f(X)$ kompakt.* ⋊

» Sei $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Wegen $f^{-1}(f(X)) = X$ ist dann $X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(U_i)$ ebenfalls offene Überdeckung von X.

Also gibt es $V_1, \ldots, V_k \in \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ mit $X = \bigcup_{\nu=1}^{k} f^{-1}(V_\nu)$ also ist $f(X) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} V_\nu$ und damit ist $f(X)$ quasikompakt.

Ist Y ein T_2-Raum, so auch der Unterraum $f(X)$ und daher ist $f(X)$ kompakt. «

2.3.9 **Korollar**

(a) *Sei das topologische Produkt $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ der topologischen Räume X_i quasikompakt, dann ist X_i quasikompakt für alle $i \in \mathcal{I}$.*

(b) *Sei das topologische Produkt $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ der topologischen Räume X_i ein T_2-Raum, dann ist X_i ein T_2-Raum für alle $i \in \mathcal{I}$.* ⋊

» (a) Sei $i \in \mathcal{I}$, dann ist $p_i : X \to X_i$ stetig und surjektiv, also ist $p_i(X) = X_i$ quasikompakt (nach 2.3.8).

(b) Hausaufgabe. «

2.3.10 **Korollar** *Ein topologisches Produkt ist genau dann quasikompakt, wenn es alle Faktoren sind.* ⋊

2.3.12 **Satz** *Eine Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* ⋊

» “$\Leftarrow$”: Dies ist gerade der Überdeckungssatz von Heine-Borell aus der Analysis.

“$\Rightarrow$”: Sei X kompakt. Nach 2.3.4 ist X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Betrachte die offenen Kugeln um 0 mit Radius $k \in \mathbb{N}$

$$B(k) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\},$$

dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \leq 1} B(k)$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, genügen endlich viele dieser Kugeln. Da diese ineinanderliegen, finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $X \subseteq B(k)$ ist. Dann ist X beschränkt. «

2.3.13 **Korollar** *Sei X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ beschränkt und nimmt sein Minimum und Maximum an.* ⋊

» $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, also kompakt und damit nach 2.3.12 abgeschlossen und beschränkt. Daher sind $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$. «

2.3.14 **Satz** *Sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y ein T_2-Raum, dann ist f ein Homöomorphismus.* ⋊

» $Y = f(X)$ ist kompakt nach 2.3.8. Zu zeigen ist, dass $g = f^{-1} : Y \to X$ stetig ist. Sei also $B \subseteq X$ offen. Zu zeigen ist, dass $g^{-1}(B) \in \mathcal{O}_Y$. Nun ist $A = X \setminus B$ abgeschlossen und daher kompakt nach 2.3.4. Also ist auch

$$f(A) = g^{-1}(A) = g^{-1}(X \setminus B) = Y \setminus g^{-1}(B)$$

kompakt und daher abgeschlossen in Y. Also ist $g^{-1}(B)$ offen in Y und g ist stetig. «

2.3.15 **Definition** *Sei X ein T_2-Raum, Y ein topologischer Raum. Für eine kompakte Teilmenge K von X und $U \in \mathcal{O}_Y$ sei,*

$$M(K, U) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq U\}.$$

Die von $\{M(K, U) : K \subseteq X \text{ kompakt}, U \in \mathcal{O}_Y\}$ erzeugte Topologie der Menge

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y : f \textit{ ist stetig}\},$$

heißt kompakt offene Topologie. $C(X, Y)$ zusammen mit dieser Topologie wird mit $C_{C,O}(X, Y)$ bezeichnet. ⋊

2.3.16 **Probleme** (a) *Seien $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}_Y$, $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist*

$$M(K, U_1) \cap \dots \cap M(K, U_k) = M(K, U_1 \cap \dots \cap U_k).$$

(b) *Sei $K \subseteq X$ kompakt, U_i mit $i \in \mathcal{I}$ offene Mengen in Y, dann ist*

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} M(K, U_i) \subseteq M(K, \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i).$$

(c) *Sei $K \subseteq L \subseteq X$ kompakt, $U \in \mathcal{O}_Y$, dann ist $M(L, U) \subseteq M(K, U)$.* ⋊

2.3.17 **Probleme** *Sei X kompakt und $Y = \mathbb{R}$.*

(a) *Eine Subbasis der kompakt offenen Topologie auf $C(X, \mathbb{R})$ ist gegeben durch*

$$\{M(K, (a, b)) : K \subseteq X \text{ kompakt}, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(b) *Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann bilden die Mengen*

$$\{f + \varphi : \varphi \in M(X, (-\varepsilon, \varepsilon))\},$$

eine Basis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_f$. ⋊

» 1.) Es genügt zu zeigen, dass für $K \subseteq X$ kompakt und $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, $M(K, O)$ Vereinigung von endlichen Schnitten von Mengen aus der Subbasis ist oder äquivalent dazu, dass für $f \in M(K, O)$ eine kompakte Menge $K_i \subseteq X$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, k$ existiert, so dass

$$f \in \bigcup_{i=1}^{k} M(K_i, (a_i, b_i)) \subseteq M(K, O).$$

O ist offen in $\mathbb{R}$, also gibt es $a_i, b_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit

$$O = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (a_i, b_i) \text{ und } K \subseteq f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (a_i, b_i)) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(a_i, b_i).$$

Nun ist $f^{-1}(a_i, b_i) \in \mathcal{O}_X$, also gibt es eine endliche Anzahl von Intervallen mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(a_i, b_i)$, da K kompakt ist.

Es folgt, dass $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i)$ und wir können annehmen, dass

- die Intervalle paarweise disjunkt sind.
- $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $a_i, b_i \in [a, b]$, da $f(K)$ kompakt ist.

$f(K)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, da kompakt, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon].$$

Sei $K_i = f^{-1}([a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]) \cap K$. $f^{-1}([a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon])$ ist abgeschlossen in X, also ist K_i abgeschlossen in K und es gilt $K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$.

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i=1}^{k} M(K_i, (a_i, b_i)) \subseteq M(K, O), \\ &f(K_i) \subseteq (a_i, b_i), \ \forall \ i = 1, \dots, k, \\ &\Rightarrow f(\bigcup_{i=1}^{k} K_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (a_j, b_i) \subseteq O. \end{aligned}$$

Weiter ist $f(K_i) \subseteq [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon] \subseteq (a_i, b_i)$, d.h. $f \in M(K_i, (a_i, b_i))$ für alle $i = 1, \dots, k$.

2.) Wir wollen nun zeigen, dass die ε-Schläuche um f eine Basis des Umgebungsfilters um f bilden. Dazu zeigen wir

(a) Ist $U \in U_f$ in $C_{C,O}(X, \mathbb{R})$, dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass der ε-Schlauch um f Teilmenge von U ist.

(b) Alle ε-Schläuche um f sind Umgebungen von f.

(a) Sei $f \in C(X, \mathbb{R})$ und $U \in U_f$, dann gibt es kompakte Mengen K_i und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} M(K_i, (a_i, b_i)) \subseteq U.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ wie in 1.) gewählt so, dass $f(K_i) \subseteq [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]$, dann ist der ε-Schlauch um f in $\bigcap_{i=1}^{k} M(K_i, (a_i, b_i)) \subseteq U$ enthalten.

(b) Wir suchen $K_i \in X$ kompakt und $O_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ mit

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} M(K_i, O_i) \subseteq \{f + \varphi : \varphi \in M(X, (-\varepsilon, \varepsilon))\},$$

Sei also $x \in X$. Dann ist $O(x) := f^{-1}(f(x) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x) + \frac{\varepsilon}{3})$ offen und es gilt $X = \bigcup_{x \in X} O(x)$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{n} O(x_i)$. Sei $A(x) = f^{-1}([f(x) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x) + \frac{\varepsilon}{3}])$, dann ist $A(x)$ abgeschlossen in X, also kompakt.

Behauptung: $f \in \bigcup M(A(x_i), (f(x) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x) + \frac{\varepsilon}{3}))$ ist eine Teilmenge des ε-Schlauchs, dann sind wir fertig.

$$f(A(x_i)) \subseteq [f(x) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x) + \frac{\varepsilon}{3}] \subseteq (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2})$$

für alle $i = 1, \dots, n$, also gilt $f \in M(A(x_i), (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}))$. Sei $g \in \bigcup_{i=1}^{N} M(A(x_i), (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}))$ und $x \in X$.

Zu zeigen ist nun, dass $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Wegen $X = \bigcup_{i=1}^{N} A(x_i)$ ist $x \in A(x_i)$ für ein i, also

$$f(x) \in [f(x) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x) + \frac{\varepsilon}{3}],$$

also ist

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } |g(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

da $g \in M(A(x_i), (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}))$, also gilt

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad «$$

2.3.18 **Definition** *Ein T_2-Raum heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.* $\rtimes$

Es ist offensichtlich, dass lokale Kompaktheit ebenfalls eine topologische Invariante ist.

2.3.19 **Probleme** (a) *Lokal kompakte Räume sind regulär. (vgl. 2.3.4 und 2.1.12)*

(b) *In einem lokal kompakten Raum enthält jede Umgebung eines Punktes eine abgeschlossene und daher kompakte Umgebung.*

(c) *Eine offene bzw. abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raumes ist wieder lokal kompakt.*

(d) *Der Unterraum* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *ist nicht lokal kompakt bezüglich der Spurtopologie als Unterraum des lokal kompakten* $\mathbb{R}^2$*, denn* $(1,0) \in X$ *hat keine kompakte Umgebung.* ⋊

2.3.20 **Bsp** $\mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R}$ ist nicht lokal kompakt.

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann sind $\mathbb{Q} \cap (1, \sqrt{2} - \frac{1}{n})$ und $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2} + \frac{1}{n}, 2)$ offen in der Spurtopologie von $\mathbb{Q}$. Die Vereinigung dieser Intervalle überdeckt $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$ aber jede endliche Vereinigung spart ein Intervall $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{N}, \sqrt{2} + \frac{1}{M}\right)$ für $N, M \in \mathbb{N}$ aus, das auch rationale Zahlen enthält, also enthält diese Überdeckung keine endliche Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$.

Ähnlich kann man zeigen, dass kein rationales Intervall kompakt in $\mathbb{Q}$ sein kann und daher keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ein rationales Intervall enthalten kann. Daraus folgt die Behauptung. ⋊

2.3.21 **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein lokalkompakter aber nicht kompakter Raum. Sei* $X_\infty = X \cup \{\infty\}$*, wobei* ∞ *lediglich ein Symbol* $\notin X$ *bezeichnet.*

Definiert man $\mathcal{U}_\infty = \{X_\infty \setminus K : K \subseteq X,\ K \text{ kompakt}\}$ *und* $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_X \cup \mathcal{U}_\infty$*, dann gilt*

(a) $\mathcal{O}_\infty$ *definiert eine Topologie auf* X_∞ *und* $X \subseteq X_\infty$ *trägt die Spurtopologie* $\mathcal{O}_X$*.*

(b) X *liegt dicht in* X_∞*.*

(c) X_∞ *ist kompakt.* ⋊

» (a) Wegen 2.3.4 2 gilt für K kompakt

$$\begin{aligned} K \in \mathcal{A}_X &\Rightarrow U = X \setminus K \in \mathcal{O}_X, \\ &\Rightarrow X_\infty \setminus K = U \cap \{\infty\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_\infty$ entsteht also, indem man zu den schon in X offenen Mengen noch Komplemente kompakter Mengen von X unter Hinzufügung des Punktes ∞ hinzufügt.

Klar: (a) Ist $U \in \mathcal{O}_\infty$, so folgt $U \cap X \in \mathcal{O}_X$.

(b) $\mathcal{O}_\infty$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen.

Also ist $\mathcal{O}_X$ eine Topologie auf X_∞ und $X \subseteq X_\infty$ trägt die Spurtopologie von $(X_\infty, \mathcal{O}_\infty)$.

(b) Sei $\mathcal{A}_\infty$ das Mengensystem der abgeschlossenen Teilmengen von X_∞, dann gilt

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_\infty &\Rightarrow U = X_\infty \setminus A \in \mathcal{O}_\infty, \\ &\Rightarrow U \in \mathcal{O}_X \vee U \in \mathcal{U}_\infty. \end{aligned}$$

Ist $U \in \mathcal{O}_X$, dann folgt $A = X_\infty \setminus U = \underbrace{X \setminus U}_{\in \mathcal{A}_X} \cup \{\infty\}$

Ist $U \in \mathcal{O}_\infty$, dann existiert eine kompakte Menge $K \subseteq X$, sodass $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$, also ist $A = X_\infty \setminus U = X_\infty \setminus (X\mathbb{K} \cup \{\infty\}) = K$.

Daher ist

$$\mathcal{A}_\infty = \{A \cup \{\infty\} : A \in \mathcal{A}_X\} \cup \{K \subseteq X : K \text{ kompakt}\}.$$

Also besteht $\mathcal{A}_\infty$ aus allen kompakten Teilmengen von X und aus den Teilmengen von X_∞, die man erhält, wenn man zu abgeschlossenen Teilmengen von X den Punkt $\{\infty\}$ hinzufügt.

Also ist insbesondere $X \notin \mathcal{A}_\infty$ und daher $\overline{X} = X_\infty$, d.h. X ist dicht in X_∞.

(c) Beachte, dass eine kompakte Teilmenge von X auch als Teilmenge von X_∞ kompakt ist, da $\mathcal{O}_X$ die Spurtopologie von X in X_∞ ist.

Wegen $\infty \in X_\infty$ gibt es mindestens ein $i_o \in \mathcal{I}$, mit $U_{i_0} = X_\infty \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge K von X_∞. Da K kompakt ist, gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots U_{i_n}$.

$$\Rightarrow X_\infty \setminus K \cup K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots U_{i_n}$$
$$\Rightarrow X_\infty \text{ ist kompakt.} \quad «$$

3 Homotopie und Fundamentalgruppe

§1 Homotopie

3.1.1 **Definition** *Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine Homotopie von f nach g ist eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ mit*

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x),$$

und $X \times [0,1]$ trägt die Produkttopologie.

Gibt es eine Homotopie von f nach g, so heißen f und g homotop und wir schreiben $f \simeq g$ bzw. $f \simeq_F g$, wenn die Homotopie $F : X \times [0,1] \to \mathcal{Y}$ mit bezeichnet werden soll.

Wir schreiben $f_t : X \to Y$ für die Abbildung $f_t(x) = F(x,t)$. Es gilt,

$$f_0 = f, \; f_1 = g. \quad \rtimes$$

3.1.2 **Lemma** *"$\simeq$" ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$.* $\rtimes$

» Seien $f, g : X \to Y$ stetig

(a) $f \simeq f$ mit $F(x,t) = f(x), \; \forall \; x \in X, t \in [0,1]$. (Reflexivität)

(b) Sei $F(x,t)$ Homotopie von f nach g, dann ist $G(x, 1-t)$ Homotopie von g nach f. (Symmetrie)

(c) Seien $F(x,t), G(x,t)$ Homotopien von f nach g bzw. g nach h, dann ist

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

eine Homotopie, denn

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x),$$
$$H(x,1) = G(x,1) = g(x),$$

und $X \times [0, \frac{1}{2}]$, $X \times [\frac{1}{2}, 1] \in \mathcal{A}_X \times I$, also ist H stetig. (Transitivität) «

3.1.3 **Verallgemeinerung** *Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $f, g : X \to Y$ stetig. Dann heißen f, g relativ homotop zu A und wir schreiben $f \simeq g$ rel. A, falls eine Homotopie $F : X \times I \to Y$ existiert mit $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ und $F(a,t) = f(a) = g(a)$, $\forall\ a \in A$, $t \in I$. Insbesondere ist dann $f|_A = g|_A$.*

"$\simeq_A$" ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$. ⋊

3.1.4 **Spezialfälle** (a) *$I = [0,1]$, X topologischer Raum. Stetige Abbildungen von I nach X sind Wege in X. Eine Homotopie von Wegen ist eine stetige Abbildung $F : I \times I \to X$ mit $F(t,0) = \alpha(t)$ und $F(t,1) = \beta(t)$.*

Sei jetzt $\alpha(0) = x$, $x \in X$ und $e_x : I \to X$, $t \mapsto x$ die konstante Abbildung. Wählt man als Homotopie $F : I \times I \to X$, $(s,t) \mapsto \alpha(st)$, dann ist

$$F(s,0) = \alpha(0) = x, \qquad F(s,0) = c_x,$$
$$F(s,1) = \alpha(s), \qquad F(s,1) = \alpha,$$

Also ist F eine Homotopie von e_x nach α und da $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, sind alle Wege in X mit selbem Anfangs und Endpunkt homotop.

Dies gibt nicht viel her...

(b) *Seien $\alpha, \beta : X \to I$ Wege und $F : I \times I \to X, (s,t) \mapsto F(s,t)$ eine Homotopie von α nach β, also*

$$F(s,0) = \alpha(s),\ \forall\ s \in I \text{ und } F(s,1) = \beta(s),\ \forall\ s \in I,$$

so bezeichnet der 1. Parameter s in $F(s,t)$ den deformierten Weg, der 2. Parameter t den Kurvenparameter in $\{\alpha_t : t \in I\}$ von Wegen $\alpha_t(s) = F(s,t)$.

Da die einfache Homotopie von Wegen im Allgemeinen nichts bringt, benutzt man hier eine besondere Homotopie von Wegen mit demselben Anfangs- und Endpunkt.

(c) *Seien α, β Wege in X mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. dann heißen (mißbräuchlich) α und β homotop, falls es eine Homotopie $F : I \times I \to X$ von α nach β rel. $\{0,1\}$ gibt, also eine stetige Abbildung $F : I \times I \to X$ mit $F(s,0) = \alpha(s)$ und $F(s,1) = \beta(s), \ \forall\ s \in I$.*

$$F(0,t) = a, F(1,t) = b, \ \forall\ t \in I. \alpha \simeq_{\{0,1\}}$$

Ist dazu noch $a = b$, so haben wir eine Homotopie von Schleifen ("Loops") an $a \in X$, also von Wegen von a nach a (rel. $\{0,1\} \subseteq I$). $F : I \times I \to X$ mit

$$F(s,0) = \alpha(s),$$
$$F(s,1) = \beta(s).$$

Jeder Weg $\alpha_t : I \to X, s \mapsto F(s,t)$ ist Weg von a nach b.

3.1.5 **Probleme** (a) *Seien $f, g : X \to Y$ homotop (rel. $A \subseteq X$) und $h : Y \to Z$ stetig, dann ist $h \circ f \simeq h \circ g$ (rel. A).*

(b) *Seien $g, h : Y \to Z$ homotop (rel. $B \subseteq Y$) und sei $f : X \to Y$ stetig, dann ist $g \circ f \simeq h \circ f$ (rel. $f^{-1}(B) \subseteq X$).* ⋊

3.1.6 **Satz** *Seien X, Y, Z topologische Räume $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen und $h, k : Y \to Z$ stetige Abbildungen mit $f \simeq g$ und $h \simeq k$, dann ist $h \circ f \simeq k \circ g$.* ⋊

» Seien $F : X \times I \to Y$, $G : Y \times I \to Z$ Homotopien von f nach g bzw. h nach k. Nach 3.1.5 ist $h \circ F : X \times I \to Z$ Homotopie von $h \circ f$ nach $h \circ g$.

Definiert man nun

$$\Phi : X \times I \to Y \times I, \ (x,t) \mapsto (g(x), t),$$

dann ist Φ aufgrund der der universellen Eigenschaft von topologischen Produkten 1.4.3 stetig und nach 3.1.5 ist

$$G \circ \Phi : X \times I \to Z, \ (x,t) \mapsto G(g(x), t),$$

eine Homotopie von $h \circ g$ nach $k \circ g$, also ist $h \circ f \simeq h \circ g \simeq k \circ g$ und aufgrund der Transitivität folgt, dass $h \circ f \simeq k \circ g$. «

3.1.7 **Korollar aus 3.1.5 und 3.1.6** *Ersetzt man in irgendeiner Komoposition von stetigen Abbildungen einen oder mehrere Faktoren durch homotope Abbildungen, so erhält man eine zur ursprünglichen Komposition homotope Abbildung.* ⋊

3.1.8 **Definition/Lemma** *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt Homotopieinverse von f, falls gilt*

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y .$$

Hat f eine Homotopieinverse, so heißt f Homotopieäquivalenz. Existiert eine Homotopieäquivalenz von X nach Y, so heißen X und Y homotopieäquivalent und wir schreiben $X \simeq Y$. Die Relation "$\simeq$" ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume. ⋊

» (a) $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz (wegen 3.1.2). (Reflexivität)

(b) Ist $f : X \to Y$ Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser $g : Y \to X$, so ist g Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser f. (Symmetrie)

(c) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen $\hat{f} : Y \to X$ und $\hat{g} : Z \to Y$, so ist $g \circ f : X \to Z$ Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser: $\hat{f} \circ \hat{g}$. Denn $f \circ \hat{f} \simeq \mathrm{id}_Y, g \circ \hat{g} \simeq \mathrm{id}_Z, \hat{f} \circ f \simeq \mathrm{id}_X, \hat{g} \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Also erhalten wir mit 3.1.7,

$$\left(\hat{f} \circ \hat{g}\right) \circ (g \circ f) = \hat{f} \circ (\hat{g} \circ g) \circ f \simeq \hat{f} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = \hat{f} \circ f \simeq \mathrm{id}_X,$$
$$(g \circ g) \circ \left(\hat{f} \circ \hat{g}\right) \simeq \mathrm{id}_Z .$$

Also ist $X \simeq Z$ und "$\simeq$" ist transitiv. «

3.1.9 **Bsp** (a) Sei X homöomorph zu Y. Dann ist $X \simeq Y$, denn sei $f : X \to Y$ Homöomorphismus und $g = f^{-1} : Y \to X$ Homöomorphismus, dann ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und die Homotopien

$$F : X \times I \to X, (x, t) \mapsto x,$$
$$G : Y \times I \to Y, (y, t) \mapsto y,$$

tun den Job.

(b) Ist $C \leqslant \mathbb{R}^n$ konvex, $x \in C$. Dann ist $C \simeq \{x\}$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$.

(c) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ durch die Abbildungen

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x \mapsto x,$$
$$g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}. \quad \rtimes$$

3.1.10 **Definition** *Sei X topologischer Raum, $A \leqslant X$ und $\iota : A \to X$ die natürliche Einbettung.*

(i) X heißt zusammenziehbar, falls X homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

(ii) Eine stetige Abbildung $\rho : X \to A$ mit $\rho|_A = \mathrm{id}_A$ heißt Retraktion. Existiert so ein ρ, heißt A Retrakt von X.

(iii) Eine Retraktion $\rho : X \to A$ Retraktion, so dass für ι gilt $\iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$, heißt Deformationsretraktion. Existiert so ein ρ, heißt A Deformationsretrakt von X.

(iv) Eine Retraktion $\rho : X \to A$, so dass $\iota \circ \rho \simeq_A \mathrm{id}_X$ rel. A ist, heißt starke Deformationsretraktion. Existiert so ein ρ, heißt A starker Deformationsretrakt von X. $\rtimes$

§2 Fundamentalgruppe

Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume und $x_0 \in X$ fest gewählter Punkt (genannt Basispunkt). Aus 3.1.2 und 3.1.3 wissen wir, dass homotop rel. $\{0, 1\}$ sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Schleifen an x_0 ist,

$$\alpha, \beta : I \to X, \alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = x_0.$$

Dann ist $\alpha \simeq \beta$ rel. $\{0, 1\}$, falls eine stetige Abbildung $F : I \times I \to X$ existiert, so dass

$$F(\cdot, 0) = \alpha, \quad F(\cdot, 1) = \beta,$$
$$F(0, t) = F(1, t) = x_0, \qquad \forall\ t \in I,$$

d.h. $f_t = F(\cdot, t)$ ist Schleife an x_0 für alle $t \in I$.

Bezeichnung *Ist α Schleife an x_0, dann bezeichnet $\langle\alpha\rangle$ die Homotopieklasse bezüglich homotop rel. $\{0,1\}$ von α.* $\rtimes$

3.2.1 **Satz** *Seien α, β Schleifen an x_0. Dann wird durch $\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle = \langle\alpha\cdot\beta\rangle$ eine wohldefinierte Operation auf der Menge der Homotopieklassen von Schleifen an x_0 definiert.* $\rtimes$

» Seien $\alpha \simeq \tilde{\alpha}$ rel. $\{0,1\}$ und $\beta \simeq \tilde{\beta}$ rel. $\{0,1\}$, dann ist zu zeigen, dass $\alpha\cdot\beta \simeq \tilde{\alpha}\cdot\tilde{\beta}$.

Seien F, G Homotopien von α nach $\tilde{\alpha}$ relativ rel. $\{0,1\}$ bzw. von β nach $\tilde{\beta}$ relativ rel. $\{0,1\}$. Definiere $H : I \times I \to X$ durch

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Nun ist $F(2\frac{1}{2},t) = F(1,t) = x_0 = G(0,t) = G(2\frac{1}{2}-1,t)$, also ist H wohldefiniert und stetig (2.2.20). Weitherhin ist,

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) = \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,0) = \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) = \tilde{\alpha}(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,1) = \tilde{\beta}(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

Also ist $\alpha\beta \simeq \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ und daher $\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}\rangle\left\langle\tilde{\beta}\right\rangle$. «

3.2.2 **Definition/Satz** *Die binäre Operation von 3.2.1 macht die Menge*

$$\{\langle\alpha\rangle : \alpha \text{ Schleife an } x_0\},$$

zur Gruppe, der Fundamentalgruppe $\Pi(X,x_0)$ von X mit Basispunkt x_0. Die Homotopieklassen $e = \langle e_{x_0}\rangle$, wobei für $y \in X$ der Weg $e_y : I \to X,\ t \mapsto y$ als der konstante Weg von y definiert ist, ist die Identität von $\Pi(X,x_0)$ und das Inverse $\langle\alpha\rangle^{-1}$, für eine Schleife α an x_0, ist gegeben durch $\langle\alpha^{-1}\rangle$ mit

$$\alpha^{-1} : I \to X,\ t \mapsto \alpha(1-t).$$ $\rtimes$

» 1.) Assoziativität

$$f : I \to T,\ s \mapsto \begin{cases} 2s, & 0 \le s \le \frac{1}{4}, \\ s + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

Man rechnet nach, dass $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \circ f$.

$$\begin{cases} 0 \le s \le \frac{1}{4}, & (\alpha(\beta\gamma)) \circ f(s) = \alpha(\beta\gamma)(2s) = \alpha(4s) = ((\alpha\beta)\gamma)(s), \\ \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2}, & (\alpha(\beta\gamma)) \circ f(s) = \alpha(\beta\gamma)(s + \frac{1}{4}) = \beta(4s-1) = ((\alpha\beta)\gamma)(s), \\ \frac{1}{2} \le s \le 1, & (\alpha(\beta\gamma)) \circ f(s) = \alpha(\beta\gamma)(\frac{s+1}{2}) = \gamma(2s-1) = ((\alpha\beta)\gamma)(s), \end{cases}$$

Nun ist $I \subseteq \mathbb{R}$ konvex und $f(0) = 0 = \mathrm{id}(0),\ f(1) = 1 = \mathrm{id}(1)$, und nach Bsp 2 auf F92 ist daher $f \simeq \mathrm{id}_I$.

$$F : I \times I \to I, (s,t) \mapsto (1-t) \cdot f(s) + t \cdot \mathrm{id}_I(s) = (1-t)f(s) + ts,$$
$$F(0,t) = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 = f(0),$$
$$F(1,t) = (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1 = f(1),$$

d.h. F ist Homotopie rel. $\{0,1\}$.

Nach 3.1.5 sind daher $((\alpha\beta)\gamma) \circ \mathrm{id}_I = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \circ f$, also gilt

$$(\alpha\beta)\gamma \simeq \alpha(\beta\gamma) \text{ rel. } \{0,1\} \Rightarrow (\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)\langle\gamma\rangle = \langle\alpha\rangle(\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle).$$

2.) Ähnlich zeigt man, dass $e = \langle e_{x_0} \rangle$ das Einselement der Gruppe ist.

Sei α Schleife an x_0, $\alpha^{-1} : I \to X,\ t \mapsto \alpha(1-t)$. Daraus folgt,

$$\alpha\alpha^{-1} \simeq c_{x_0} \simeq \alpha^{-1}\alpha.$$

3.) Beachten Sie: Ist α Schleife an x_0 und $x_0 \in X$, so ist jeder Punkt von $\operatorname{im} \alpha \subseteq X$ in der selben Wegzusammenhangskomponente von X wie x_0.

4.) Sei $f : X \to Y$ stetig und $y_0 = f(x_0) \in Y$. Ist α Schleife an x_0, so ist $\beta = f_*(\alpha) = f \circ \alpha : I \to Y$ eine Schleife an y_0, wegen

$$\beta(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = y_0 = \beta(1).$$

5.) Betrachte die Abbildung

$$f_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, y_0),\ \langle\alpha\rangle \mapsto \langle f_*(\alpha)\rangle = \langle f \circ \alpha\rangle\,.$$

Diese ist wohldefiniert, denn sind α und σ Schleifen an x_0 und ist $\alpha \simeq \sigma$ rel. $\{0,1\}$, so gilt wegen 3.1.5, dass

$$f_*(\alpha) \simeq f_*(\sigma) \text{ rel. } \{0,1\}\,.$$

Die Abbildung ist sogar ein Gruppenhomomorphismus. «

3.2.3 **Lemma** *Sei $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 \in Y$. Seien α, β Schleifen an x_0. Dann ist*

$$f_*(\langle\alpha\beta\rangle) = f_*(\langle\alpha\rangle) f_*(\langle\beta\rangle),$$

d.h. $f_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, y_0)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. ⋊

» Offensichtlich ist,

$$f_*(\langle\alpha\rangle\,\langle\beta\rangle) = f_*(\langle\alpha\beta\rangle) = \langle f_*(\alpha\beta)\rangle = \langle f \circ (\alpha\beta)\rangle\,.$$

So genügt es zu zeigen, dass

$$f \circ (\alpha\beta) \simeq (f \circ \alpha)(f \circ \beta) \text{ rel. } \{0,1\}\,.$$

Sei $0 \le t \le 1$,

$$\begin{aligned}(f \circ (\alpha\beta))(t) = f((\alpha\beta)(t)) &= \begin{cases} f(\alpha(2t)), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ f(\beta(2t-1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f \circ \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ f \circ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= ((f \circ \alpha)(f \circ \beta))(t). \end{aligned}$$ «

3.2.4 **Lemma** *Seien X, Y, Z topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig und $f(x_0) = y_0, g(y_0) = z_0$. Dann ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.* ⋊

» Leichte Übung. «

3.2.5 **Korollar** *Sei G die Kategorie der Gruppen, dann ist $\pi : \mathrm{Top}_0 \to G$ ist ein Funktor.* ⋊

Bisher kennen wir nur Fundamentalgruppenhomomorphismen,

$$\pi(f) = f_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, y_0),$$

die vom Basispunkt abhängen. Die Abhängigkeit wollen wir nun eliminieren. Seien dazu $x_0, x_1 \in X$ und sei γ ein Weg von x_0 nach x_1. Ist nun α eine Schleife an x_0, dann ist $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ eine Schleife an x_1.

3.2.6 **Satz** *Seien $x_0, x_1 \in X$ und sei γ Weg von x_0 nach x_1. Dann wird durch*

$$c_\gamma : \Pi(X, x_0) \to \Pi(X, x_1), \ \langle\alpha\rangle \mapsto \left\langle\gamma^{-1}\alpha\gamma\right\rangle$$

ein Gruppenhomomorphismus definiert. ⋊

» Wie in 3.2.1 zeigt man,

1.) Sind $\sigma, \tilde{\sigma}, \tau, \tilde{\tau}$ Wege in X mit $\sigma \simeq \tilde{\sigma}$ rel. $\{0, 1\}$ und $\tau \simeq \tilde{\tau}$ rel. $\{0, 1\}$ und $\sigma(1) = \tau(0)$, sowie $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(0)$, dann ist $\sigma\tau \simeq \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$ rel. $\{0, 1\}$. (Details HA)

2.) Sind ρ, σ, τ Wege in X mit $\rho(1) = \sigma(0)$ und $\sigma(1) = \tau(0)$, dann ist $(\rho\sigma)\tau \simeq \rho(\sigma\tau)$ rel. $\{0, 1\}$. (Wie in 3.2.1 Details HA)

3.) Ist σ Weg in X, $\sigma^{-1} : I \to X$, $t \mapsto \sigma(1 - t)$, so ist $\sigma\sigma^{-1} \simeq c_{\sigma(1)}$ und $\sigma^{-1}\sigma \simeq c_{\sigma(0)}$.

4.) Ist σ Weg in X, so ist $\sigma c_{\sigma(1)} \simeq \sigma \simeq c_{\sigma(0)}\sigma$ rel. $\{0, 1\}$.

Damit gilt

(a) Sind $\alpha, \tilde{\alpha}$ Schleifen an $x_0 \in X$ mit $\alpha \simeq \tilde{\alpha}$ rel. $\{0,1\}$, so ist

$$\gamma^{-1}\alpha\gamma \simeq \gamma^{-1}\tilde{\alpha}\gamma \text{ rel. } \{0,1\}$$

wegen 1.), also ist c_γ wohldefiniert.

(b) Sind α und β Schleifen an x_0, so ist

$$(\gamma^{-1}\alpha\gamma)(\gamma^{-1}\beta\gamma) \simeq \gamma^{-1}\alpha c_{x_0}\beta\gamma \simeq \gamma^{-1}(\alpha\beta)\gamma \text{ rel. } \{0,1\}\,.$$

$$\Rightarrow c_\gamma(\langle\alpha\rangle)c_\gamma(\langle\beta\rangle) = c_\gamma(\langle\alpha\rangle\,\langle\beta\rangle),$$

d.h. c_γ ist Gruppenhomomorphismus,

$$\begin{aligned} c_\gamma c_{\gamma^{-1}} &= \mathrm{id}_{\Pi(X,x_1)}, \\ c_{\gamma^{-1}} c_\gamma &= \mathrm{id}_{\Pi(X,x_0)}, \end{aligned}$$

also ist c_γ Isomorphismus. «

3.2.7 **Korollar** *Sei X wegzusammenhängend. Dann ist die Fundamentalgruppe $\Pi(X,x_0)$ von X zum Basispunkt $x_0 \in X$ unabhängig von der Wahl von x_0. Wir sprechen dann von der Fundamentalgruppe von X und schreiben $\Pi(X)$.* ⋊

Bemerkung. Der Isomorphismus c_γ in 3.2.6 hängt von der Wahl des Weges γ ab. ⊸

3.2.8 **Definition** *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum heißt einfach zusammenhängend, wenn $\Pi(X)$ trivial ist, d.h. also jede Schleife in X ist nullhomotop, also homotop rel. $\{0,1\}$ zur konstanten Schleife.* ⋊

Ist $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ Morphismus in Top_0, so ist f stetig und $f(x_0) = y_0$.

3.2.9 *Warnung.* Injektivität und Surjektivität übertragen sich keines Wegs von f auf $\pi(f)$, es gilt aber, $\pi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Pi(X,x_0)}$. Klar ist auch, dass $\pi(f)$ ein Isomorphismus ist, wenn f ein Homöomorphismus ist, denn sei $X \to Y$ Homöomorphismus, dann ist

$$\mathrm{id}_{\Pi(X,x_0)} = \pi(\mathrm{id}_x) = \pi(f^{-1} \circ f) = \pi(f^{-1}) \circ \pi(f).$$

Also ist $\pi(f)$ Isomorphismus mit Inverser $\pi(f^{-1})$. ⊸

3.2.10 **Definition** *Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ Morphismen in* Top_0. *Eine Homotopie $F : (X \times I) \to Y$ von f nach g heißt basispunkterhaltend, falls*

$$F(x_0, t) = y_0, \qquad \forall\ t \in I,$$

d.h. F ist Homotopie rel. $\{0,1\}$. ⋊

3.2.11 **Satz** *Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig und homotop rel.* $\{0,1\}$ *und $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Sei $\alpha : I \to X$ Schleife an x_0. Dann ist $\Pi(f)(\langle\alpha\rangle) = \Pi(g)(\langle\alpha\rangle)$ und daher gilt $\Pi(f) = \Pi(g)$.* ⋊

» $f \circ \alpha$ ist Schleife an $y_0 \in Y$. Aus 3.2.5 folgt, dass $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$ rel. $\{0,1\}$. Also gilt,

$$\Pi(f)\,\langle\alpha\rangle = \langle f \circ \alpha\rangle = \langle g \circ \alpha\rangle = \Pi(g)\,\langle\alpha\rangle\,.$$

Und damit folgt $\Pi(f) = \Pi(g)$. «

Daraus lässt sich leicht sehen, dass homotopieäquivalente topologische Räume X, Y mit Basispunkten x_0, y_0 isomorphe Fundamentalgruppen haben, sofern

$$f : X \to Y,\ \ g : Y \to X \text{ mit } f(x_0) = y_0,\ g(y_0) = x_0,$$

so existieren, dass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel. $\{0,1\}$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel. $\{0,1\}$ sind. Wir sagen dann, $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ in Top_0, die Homotopien sind basispunkterhaltend.

3.2.12 **Korollar** *Sei $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ in* Top_0. *Dann ist $\Pi(X, x_0) \simeq \Pi(Y, y_0)$.* ⋊

» Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel. $\{x_0\}$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel. $\{y_0\}$, folgt mit 3.2.11 und 3.2.4, dass

$$\Pi(g \circ f) = \Pi(g)\Pi(f) = \mathrm{id}_{\Pi(X,x_0)},$$
$$\Pi(f \circ g) = \Pi(f)\Pi(g) = \mathrm{id}_{\Pi(Y,y_0)},$$

also ist $\Pi(g) = \Pi(f)^{-1}$ Gruppenisomorphismus. «

3.2.13 **Bsp** 1.) Sei $\rho : X \to A$ ein starker Deformationsretrakt, dann ist

$$\Pi(X, a) \simeq \Pi(A, a), \ \forall\ a \in A.$$

Dies ist z.b. für einen mit starker Retraktion zusammenziehbaren topologischen Raum der Fall.

2.) Einpunktige Räume haben triviale Fundamentalgruppe, sind also einfach zusammenhängend. ⋊

Was gilt nun im Allgemeinen für topologisch äquivalente Räume?

3.2.14 **Lemma** *Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen, $x_0 \in X, y_0, y_1 \in Y$, $f(x_0) = y_0$ und $g(x_0) = y_1$ mit $f \simeq g$. Dann gibt es einen Weg γ von y_0 nach y_1 in Y so, dass $\pi(g) = c_\gamma \circ \pi(f)$ ist, also folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X,x_0) \arrow[rr, "\pi(f)"] \arrow[dr, "\pi(g)"'] & & \Pi(Y,y_0) \arrow[dl, "\exists\ c_\gamma"] \\
& \Pi(Y,y_1) &
\end{tikzcd}$$

» Sei $F : X \times I \to Y$ Homotopie von f nach g, d.h. $f(x) = F(x, 0)$ und $g(x) = F(x, 1)\ \ \forall\ x \in X$.

Definiere $\gamma : I \to Y$ durch $\gamma(t) = F(x_0, t)$ für $t \in I$. Dann ist

$$\gamma(0) = F(x_0, 0) = f(x_0) = y_0,$$
$$\gamma(1) = F(x_0, 1) = g(x_0) = y_1,$$

d.h. γ ist Weg von y_0 nach y_1.

Ist ρ Schleife an y_0, dann ist $\gamma^{-1}\rho\gamma$ Schleife an y_1 und $c_\gamma(\rho) = \langle \gamma^{-1}\rho\gamma \rangle$.

Sei α Schleife an x_0, für $0 \leq t \leq 1$ definiere Schleife $\beta_t : I \to Y$ durch

$$\beta_t(s) := F(\alpha(s), t), \quad s \in I.$$

Dann ist,

$$\begin{aligned}
\beta_t(0) &= F(\alpha(0), t) = F(x_0, t) = \gamma(t), \\
\beta_t(1) &= F(\alpha(1), t) = F(x_0, t) = \gamma(t).
\end{aligned}$$

Also ist β_t Schleife an $\gamma(t) \in Y$.

$$\begin{aligned}
\beta_0(s) &= F(\alpha(s), 0) = f \circ \alpha(s), \\
\beta_1(s) &= F(\alpha(s), 1) = g \circ \alpha(s).
\end{aligned}$$

Für $0 \leq t \leq 1$ sei γ_t der Weg der entlang γ von y_0 nach $\gamma(t)$ geht und

$$\gamma_t = (\gamma_t \beta_t)\gamma_t^{-1} = \text{Schleife an } y_0.$$

Für $t = 0$ ist $\gamma_0 = y_0$ konstant, $\beta_0 = f \circ \alpha$,

$$\gamma_0 = (e_{y_0}\beta_0)e_{y_0}^{-1} = f \circ \alpha,$$

für $t = 1$ ist $\gamma_1 = \gamma$, $\beta_1 = g \circ \alpha$,

$$\gamma_1 = (\gamma\beta_1)\gamma^{-1} = c_\gamma(g \circ \alpha).$$

Wir definieren die Homotopie $G : I \times I \to Y$ durch

$$G(s,t) = \begin{cases} \gamma(4st), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ F(\alpha(4s-1), t), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2t(1-s)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

die Wohldefiniertheit sei als Übung überlassen. Sei $t = 0$, dann ist

$$G(s,0) = \begin{cases} \gamma(0) = y_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ F(\alpha(4s-1), 0) = f \circ \alpha(4s-1), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(0) = y_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Sei $t = 1$, dann ist

$$G(s,1) = \begin{cases} \gamma(4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ F(\alpha(4s-1),1) = g \circ \alpha(4s-1), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(4(1-s)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Also haben wir eine Homotopie zwischen $f \circ \alpha$ und $c_\gamma(g \circ \alpha)$. Außerdem gilt,

$$\begin{aligned} G(0,t) &= \gamma(0) = y_0, \\ G(1,t) &= \gamma(0) = y_0, \end{aligned}$$

somit ist die Homotopie rel. $\{0,1\}$ und daher gilt,

$$\Pi(f)\langle\alpha\rangle = \langle f \circ \alpha\rangle = \left\langle(\gamma(g \circ \alpha))\gamma^{-1}\right\rangle = c_\gamma^{-1}\langle g \circ \alpha\rangle = c_\gamma^{-1}\Pi(g)\langle\alpha\rangle\,,$$

für alle Schleifen an $x_0 \in X$. Also ist $\pi(f) = c_\gamma^{-1} \circ \pi(g)$ und daher ist $\pi(g) = c_\gamma \circ \pi(f)$. «

3.2.15 **Korollar** *Seien X, Y topologische Räume, $f \in C(X \to Y)$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $f(x_0) = y_0$. Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist*

$$\Pi(f) : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, y_0),$$

ein Gruppenisomorphismus. ⋊

» Sei $g \in C(Y \to X)$ Homotopieinverse von f mit $x_1 = g(y_0)$ und $y_1 = f(x_1)$. $f_0 = f$ aber zum Basispunkt x_0, $f_1 = f$ zum Basispunkt x_1.

$$\begin{tikzcd} \Pi(X,x_0) \arrow[r, "\Pi(f_0)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \Pi(Y,y_0) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[dl, "\Pi(g)"'] \\ \Pi(X,x_1) \arrow[r, "\Pi(f_1)"'] & \Pi(Y,y_1) \end{tikzcd}$$

Nun ist $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel. $\{0,1\}$.

Nach 3.2.5 existiert ein Weg γ von x_1 nach x_0, so dass $\pi(g) \circ \pi(f) = \pi(g \circ f) = c_\gamma \pi(\mathrm{id}_X) = c_\gamma$.

$\Rightarrow \pi(g) \circ \pi(f)$ ist Isomorphismus,

$\Rightarrow \pi(g)$ ist injektiv und $\pi(f)$ surjektiv.

Analog folgt, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel. $\{0,1\}$, sowie

$\pi(f)$ ist injektiv und $\pi(g)$ surjektiv.

Also ist $\pi(f)$ bijektiv und daher Isomorphismus. «

$\Pi(f)$ und $\Pi(g)$ sind Gruppenisomorphismen aber nicht nichtwendigerweise invers zueinander.

3.2.16 **Korollar** *Sind X und Y homotopieäquivalent und wegzusammenhängend, so ist* $\Pi(X) \cong \Pi(Y)$ *(unabhängig vom Basispunkt).*

Die Fundamentalgruppe ist daher für wegzusammenhängende topologische Räume eine Homotopieinvariante. Insbesondere sind alle zusammenziehbaren Räume einfach zusammenhängend. ⋊

§3 Freie Gruppen und Relationen

3.3.1 **Definition** *Eine freie Gruppe über S ist eine Gruppe $\mathcal{F}(S)$ zusammen mit einer Abbildung $j : S \to \mathcal{F}(S)$ mit folgender universeller Eigenschaft:*

Ist G Gruppe und $f : S \to G$ Abbildung, dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\hat{f} : \mathcal{F}(S) \to G$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(S) \arrow[d, "\exists\,!\hat{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

d.h. $\hat{f} \circ j = f$. ⋊

Klar: Die universelle Eigenschaft legt $\mathcal{F}(S)$ bis auf Isomorphie fest. ⊸

» Übung. «

Konstruktion von $\mathcal{F}(S)$ *Elemente von $\mathcal{F}(S)$ sind "Wörter",*

$$s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k},$$

mit $s_1, \ldots, s_k \in S$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \neq i_\nu \in \mathbb{Z}$, *wobei*

$$s_1 \neq s_2, s_2 \neq s_3, \ldots, s_{k-1} \neq s_k.$$

Dabei wird das leere Wort ($k = 0$) als Einselement interpretiert.

Multiplikation:

$$w_1 = s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k}, \quad s_j \in S,$$
$$w_1 \cdot s^m = \begin{cases} s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k} s^m, & s_k \neq s, \\ s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k}, & s_k = s. \end{cases}$$

Die Multiplikation folgt nun aus Induktion über k.

e = *leeres Wort ist* 1*-Element.*

$$(s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k})^{-1} = s_k^{-i_k} \cdots s_1^{-i_1},$$

damit wird $\mathcal{F}(S)$ zur Gruppe. Die Abbildung,

$$S \to \mathcal{F}(S), \; s \mapsto \text{"Wort" } s (= \text{Wörter der Länge } 1),$$

ist klar. Sie hat die Universelle Eigenschaft:

Sei G Gruppe, $f : S \to G$ Abbildung, $w = s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k} \in \mathcal{F}(S)$. Sei $g_i = f(s_i) \in G$. Definiere $\hat{f} : \mathcal{F}(S) \to G$, durch $\hat{f}(w) = g_1^{i_1} \cdots g_k^{i_k}$, dann ist $\hat{f}$ Gruppenhomomorphismus und es gilt,

$$f(s) = g_1,$$
$$(\hat{f} \circ i)(s) = g_s = f(s).$$

⋊

» Details: Hausaufgabe. «

3.3.2 **Definition** *i) Sei G eine Gruppe. Eine Gleichung der Form $g_1 \cdot g_2 \cdots g_k = 1$, $g_i \in G$, $k \in \mathbb{N}$ heißt Relation.*

Bsp $aba^{-1} = c$ ist Relation, da $aba^{-1}c^{-1} = 1$. ⋊

ii) Sei S Menge, $\mathcal{F}(S)$ die freie Gruppe über S. Seien w_i, $(i \in \mathcal{I})$ Elemente von $\mathcal{F}(S)$ und sei H der von $\{w_i : i \in \mathcal{I}\}$ erzeugte Normalteiler von G. Dann sagt man $F(S)/H$ hat Erzeugende S (streng genommen sH, $s \in S$) und Relationen $w_i = 1$. ⋊

Beachte: i) $\{sH : s \in S\}$ erzeugt $F(S)/H$, d.h. $F(S)/H$ ist die kleinste Untergruppe von $F(S)/H$, die $\{sH : s \in S\}$ enthält.

ii) Sei w eine Relation aus $\{w_i : i \in I\}$,

$$\Rightarrow w \in H \Rightarrow wH = H = 1_{F(S)/H}.$$

Bsp $\langle \{a, b : aba^{-1}b^{-1} = 1\} \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ⋊

iii) $F(S)/H$ ist die "feinste" Gruppe, so dass in ihr die Relationen $w_i = 1 (i \in \mathcal{I})$ gelten, denn ist G eine Gruppe mit Erzeugenden $g_s (s \in S)$ und es gilt:

$$g_{s_1}^{i_1} \cdots g_{s_k}^{i_k} = 1,$$

falls $s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k} \in \{w_i : i \in \mathcal{I}\}$, so gilt

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(S) \arrow[d, "\exists\, !\hat{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

mit $\hat{f} \circ j(s) = g_s \ \forall \ s \in S$ und $f(s) = g_s$.

Wegen $g_{s_1}^{i_1} \cdots g_{s_k}^{i_k} = 1, w_i = s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k} \ \exists \ i \in \mathcal{I}$, sodass

$$\Rightarrow w_i \in \ker \hat{f},$$
$$\Rightarrow H \subseteq \ker \hat{f},$$
$$\overset{\text{1. Isosatz}}{\Rightarrow} \ \exists \ \tilde{f},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(S) \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr] & & G \\
& \mathcal{F}(S)/H \arrow[ur, "\exists\,!\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Bsp 1.) $G = \langle x : x^n = 1 \rangle \cong C_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^+)$.

2.) $D_{2n} = \langle a, b : a^n = b, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ ist endliche Gruppe. ⋊

3.3.3 **Bsp** Weitere Beispiele von Fundamentalgruppen

1.) Wir haben bereits gesehen,

$$\Pi(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \Pi(\mathbb{Z}, +), & n = 1, \\ (1), & n \geq 2, \end{cases}$$

da für $n \geq 2$ die $\mathbb{S}^n$ zusammenziehbar ist.

2.) Die Fundamentalgruppe eines offenen oder abgeschlossenen Balls $B_\varepsilon^n(x)$ ist trivial, da $B_\varepsilon^n(x)$ zusammenziehbar ist.

3.) Betrachte die Kreisfläche $B_1^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Identifikation von je zwei Antipoden auf dem Rand. $\mathbb{S}^1 \subseteq B^2$. Der resultierende Raum ist ein Model der projektiven Ebene. Der “halbe” Rand α ist ein geschlossener Weg. Seine Homotopieklasse $\langle \alpha \rangle$ ist daher ein Element der Fundamentalgruppe,

$$\langle \alpha \rangle \langle \alpha \rangle = \langle \alpha\alpha \rangle = 1,$$
$$\Pi(P(\mathbb{R}^2)) \cong C_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +).$$

Ähnlich für Unterteilung der Kreislinie $\mathbb{S}^1$ in gleich lange Stücke und Identifikation von jeweils n entsprechenden Punkten, dann ist die Fundamentalgruppe des entstehenden Raums isomorph zur C_n.

4.) Dunce hat.

5.) Torus $T = S^1 \times S^1$, $\Pi(T) = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

6.) Allgemein gilt: Sind X, Y topologische Räume $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, dann ist $\Pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \Pi(X, x_0) \times \Pi(Y, y_0)$.

7.) Jede freie Gruppe mit n Erzeugenden ($n \in \mathbb{N}$) kommt als Fundamentalgruppe vor. (Kleeblatt mit n Blättern) $\rtimes$

§4 Überlagerungen

Sei X topologischer Raum. Eine Überlagerung von X ist grob gesprochen eine stetige, surjektive Abbildung $p : Y \to X$, die lokal um jeden Punkt der Basis X so aussieht, wie die kanonische Abbildung einer topologischen Summe $\sum U$ von Kopien von U, wobei $U \in \mathcal{U}_x$.

3.4.1 **Definition** *Zwei topologische Räume $Y, \tilde{Y}$ mit surjektiven, stetigen Abbildungen $p : Y \to X$ und $\tilde{p} : \tilde{Y} \to X$ heißen homöomorph über X (kurz: isomorph), falls es einen Homöomorphismus $h : Y \to \tilde{Y}$ gibt, mit $\tilde{p} \circ h = p$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben $Y \cong_X \tilde{Y}$. $\rtimes$

3.4.2 **Lemma** *Sei $h : Y \to \tilde{Y}$ ein Homöomorphismus über X und sei $z \in X$. Dann ist $h|_{p^{-1}(z)} : p^{-1}(z) \to \tilde{Y}$ ein Homöomorphismus von der Faser $p^{-1}(z)$ von z unter p auf die Faser $\tilde{p}^{-1}(z)$ von z unter $\tilde{p}$.* ⋊

» Klar. «

3.4.3 **Definition** *Ein topologischer Raum Y über X heißt trivial, wenn es einen topologischen Raum F gibt, so dass Y homöomorph zum topologischen Produkt $X \times F$ ist.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Für $z \in X$ gilt,

$$Y_z = p^{-1}(z) \cong \pi^{-1}(z) = \{z\} \times F \cong F,$$

mit $\pi : X \times F \to X,\ (x, f) \mapsto x$. ⋊

3.4.4 **Definition** *Ein topologischer Raum Y über X heißt lokal trivial oder lokal triviale Faserung, falls es zu jedem $z \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}_z$ gibt für die $Y|_U$ trivial ist.*

D.h. $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ ist trivial, d.h. es gibt einen topologischen Raum Λ und einen Homöomorphismus, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times \Lambda \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

d.h. $p|_{p^{-1}(U)} \circ h = \pi$, *mit* π *der natürlichen Projektion.* $\rtimes$

3.4.5 **Definition** *Eine lokaltriviale Faserung von* X *heißt Überlagerung, wenn ihre Fasern als topologische Räume mit der Spurtopologie diskret sind.*

D.h. $p : Y \to X$ *ist Überlagerung, falls gilt*

(i) p *ist stetig und surjektiv.*

(ii) $\forall\ z \in X\ \exists\ U \in \mathcal{U}_z$, *so dass gilt:*

a) $\forall\ u \in U : p^{-1}(u)$ *ist diskreter Teilraum von* Y.

b) *Es gibt einen Homöomorphismus,*

$$h : p^{-1}(U) \to U \times p^{-1}(z),$$

so dass mit der Projektion $\pi : U \times p^{-1}(z) \to U,\ (u, a) \mapsto u$ *gilt,*

$$\pi \circ h = p|_{p^{-1}(U)}. \quad \rtimes$$

Als Konsequenz daraus ergibt sich:

- Alle Fasern $p^{-1}(u)$ mit $u \in U$ sind gleichmächtig, falls X zusammenhängend,
- $Y|_U$ und $U \times p^{-1}(z)$ sind homöomorph über U.

Als Λ kann man jeden diskreten Raum gleichmächtig zu $p^{-1}(z)$ wählen, insbesondere den diskreten Raum $Y_z = p^{-1}(z)$ selbst. Ist $a \in p^{-1}(U), p(a) = u$, so ist $h(a) = (u, \lambda)$ für ein $\lambda \in \Lambda$.

Die Mächtigkeit $|Y_z|$ der Faser über $z \in X$ nennt man Blätterzahl der Überlagerung an der Stelle z. Offensichtlich ist die Blätterzahl lokal konstant (man kann jeden Punkt nahe daneben wählen, dann erhält man dieselbe Umgebung und damit die gleiche Blätterzahl) und deshalb für einen zusammenhängenden Raum X global konstant (Beweis: Übung).

Ist die Blätterzahl $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ konstant, so spricht man von einer n-blättrigen Überlagerung.

3.4.6 **Definition** *Seien X, Y topologische Räume und $h : Y \to X$ stetig. Dann heißt h lokaler Homöomorphismus, falls es zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y gibt, so dass $h(V)$ offen in X und $h|_V : V \to h(V)$ ein Homöomorphismus ist.* $\rtimes$

3.4.7 **Lemma** *Sei $p : Y \to X$ Überlagerung. Dann ist p ein lokaler Homöomorphismus.* $\rtimes$

» Sei $z \in X$ und $U \in \mathcal{U}_z$ wie in 3.4.5 gefordert. In $U \times \Lambda$ ist jede Faser $U \times \{\lambda\} \subseteq U \times \Lambda$ offen in $U \times \Lambda$ und die Projektion $U \times \{\lambda\} \to U$, $(u, \lambda) \mapsto u$ ein Homöomorphismus.

Sei $y \in p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Y$, so ist $h(y) = (u, \lambda)$ für ein $u \in U, \lambda \in \Lambda$ und daher auch $V = h^{-1}(U \times \{\lambda\})$ offen in $p^{-1}(U)$ und daher auch in Y.

Natürlich ist $y \in V = h^{-1}(U \times \{\lambda\})$ wegen $h(y) = (u, \lambda) \in U \times \{\lambda\}$, ist h ein Homöomorphismus und daher auch $p|_V = \pi \circ h : V \to U$. «

3.4.8 **Heben von Wegen** *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, $\alpha : I \to X$ Weg in X von $\alpha(0) = x_0 \in X$ nach $\alpha(1) = x_1 \in X$. Sei $y_0 \in Y_{x_0}$, d.h. $p(y_0) = x_0$.*

Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\alpha} : I \to Y$ mit $\tilde{\alpha}(0) = y_0$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

d.h. $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. $\rtimes$

» *Vorüberlegung.* Sei $U \subseteq X$ offen und $Y|_U$ trivial, so sind sämtliche ganz in U verlaufende Wege leicht zu überschauen und zu haben. Bezüglich $Y|_U \cong U \times \Lambda$ sind es gerade die durch

$$t \in I : \tilde{\alpha}_\lambda(t) = (\alpha(t), \lambda) \in U \times \Lambda$$

definierten Wege in $U \times \Lambda$, die dann unter $h^{-1} : U \times \Lambda \to Y|_U = p^{-1}(U)$ in Y zurückgehoben wurden.

(Diese bezeichnen wir der Einfachheit halber wieder mit $\tilde{\alpha}_\lambda$)

Klar: Dieses Argument kann sofort auf stetige Abbildungen $\tau : [a, b] \to X, a < b \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden.

Eindeutigkeit. Seien $\tilde{\alpha}$ und $\hat{\alpha}$ zwei Hochhebungen von α zu $y_0 \in Y$. Insbesondere gilt dann,

$$\tilde{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(0) = y_0,$$
$$p \circ \tilde{\alpha} = p \circ \hat{\alpha} = \alpha.$$

Sei $t \in I$ mit $\tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$ (bzw. $\tilde{\alpha}(t) \neq \hat{\alpha}(t)$), $x = p(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t) = p(\hat{\alpha}(t))$.

Sei U offene Umgebung von x mit $Y|_U \cong U \times \Lambda$, wobei Λ diskreter Raum ist. Nach unserer Vorüberlegung ist $\tilde{\alpha}(s) = \hat{\alpha}(s)$ für alle $s \in I$ mit $\tilde{\alpha}(s) \in U$. Also sind,

$$\{t \in I \,:\, \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\} \text{ und } \{t \in I \,:\, \tilde{\alpha}(t) \neq \hat{\alpha}(t)\}$$

offene Teilmengen von I, deren Vereinigung ganz I ergibt. Da I zusammenhängend ist, gilt

$$\{t \in I \,:\, \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\} = I,$$

d.h. $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Existenz. Die Menge der $t \in I$ so, dass eine Hochhebung von

$$\alpha|_{[0,t]} : [0, t] \to X,$$

zum Anfangspunkt y_0 gehoben werden kann, ist nicht leer, da 0 darin liegt.

Sei t_0 das Supremum dieser Menge, $x = \alpha(t_0)$, U offene Umgebung von x so, dass $Y|_U$ triviale Fortsetzung ist, mit Λ diskretem Raum.

Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0,1]$ unter α ganz nach U abgebildet wird (existiert aufgrund der Stetigkeit von α). Sei $\tau \in [t_0 - \varepsilon/2, t_0] \cap [0,1]$ und sei $\tilde{\beta}$ die Hochhebung $\alpha|_{[\tau, t_0+\varepsilon/2]}$ zum Anfangspunkt $\tilde{\alpha}(\tau) \in U$, $\tilde{\alpha} : [0,\tau] \to Y$ eine Hochhebung von $\alpha|_{[0,\tau]}$ zum Anfangspunkt y_0 ist. $\tilde{\alpha}$ existiert, da $\tau < t_0$ und $\tilde{\beta}$ existiert aufgrund unserer Vorüberlegung.

Dann wird durch

$$\hat{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(t), & t \in [0,\tau], \\ \tilde{\beta}(t), & t \in [\tau, t_0 + \varepsilon/2] \cap [0,1] \end{cases}$$

eine Hochhebung von $\alpha|_{[0,\tau]}$ zum Anfangspunkt y_0 definiert, mit $b = 1$ (falls $t_0 = 1$ ist) oder aber $b > t_0$. Da t_0 aber das Supremum der Menge der $t \in I$ ist, so dass $\alpha|_{[0,t]}$ zum Anfangspunkt y_0 gehoben werden kann, haben wir einen Widerspruch. Also ist $t_0 = 1$ und der ganze Weg α kann gehoben werden. «

Unser Ziel ist es, Überlagerungen mithilfe der Fundamentalgruppe zu klassifizieren. Dazu müssen wir aber Homotopien heben können. Daher stellt sich die Frage, ob dies überhaupt möglich ist.

Sei Z topologischer Raum, $F : Z \times I \to X$ Homotopie von $f_0 : Z \to X,\ z \mapsto F(z,0)$ nach $f_1 : Z \to X,\ z \mapsto F(z,1)$.

Für $t \in I,\ z \in X$ seien

$$f_t : Z \to X,\ z \mapsto F(z,t),$$
$$\varphi_z : I \to X,\ t \mapsto F(z,t).$$

Gesucht ist eine Abbildung $\tilde{F} : Z \times I \to Y$ mit $p \circ \tilde{F} = F$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Z \times I \arrow[rr, "\tilde{F}"] \arrow[dr, "F"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Definiere die Wege,

$$\tilde{f}_0 : Z \to Y,\ z \mapsto \tilde{F}(z,0),$$
$$\tilde{f}_t : Z \to Y,\ z \mapsto \tilde{F}(z,t),$$
$$\tilde{\varphi}_z : I \to Y,\ t \mapsto \tilde{F}(z,t).$$

Voraussetzung ist natürlich, dass f_0 überhaupt zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}_0$ gehoben werden kann, d.h. dass gilt $p \circ \tilde{f}_0 = f_0$.

3.4.9 **Heben von Homotopien** *Sei $p : Y \to X$ Überlagerung von X. Sei Z ein topologischer Raum und $F : Z \times I \to X$ eine stetige Abbildung und daher insbesondere Homotopie von f_0 nach f_1.*

Sei $\tilde{f}_0 : Z \to Y$ stetig mit $p \circ \tilde{f}_0 = f_0$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\tilde{f}_0"] \arrow[dr, "f_0"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Für $z \in Z$ sei $\varphi_z : I \to X,\ t \mapsto F(z,t)$ und $\tilde{\varphi}_z : I \to Y$ sie die Hochhebung von φ_z nach Y zum Anfangspunkt $\tilde{f}_0(z)$.

Dann ist die Abbildung $\tilde{F} : Z \times I \to Y,\ (z,t) \mapsto \tilde{\varphi}_z(t) \in Y$ stetig und daher Homotopie von $\tilde{f}_0$ nach $\tilde{f}_1$, wobei $\tilde{f}_1(z) = \tilde{\varphi}_z(1) = \tilde{F}(z,1)$.

Insbesondere haben wir $p \circ \tilde{F} = F$. ⋊

» Ist $t_0 \in [0,1]$ so bezeichnen wir die ε-Umgebung $(t_0 - \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon/2)$ von t_0 mit $I_\varepsilon(t_0)$. Für $\Omega \in \mathcal{O}_Z$ soll das offene Kästchen $\Omega \times I_\varepsilon(t_0)$ in $Z \times I$ klein heißen, wenn es unter F in eine offene Menge $U \subseteq X$, über der Y trivial ist, abgebildet wird.

Ist dann $\tilde{F}$ auf einer "Vertikalen" $\Omega \times \{t_1\}$ eines kleinen Kästchens stetig, dann sogar auf dem ganzen Kästchen, denn bei der Trivialisierung $Y|_U \cong U \times \Lambda$ ist die Λ-Koordinate von $\tilde{F}|_{\Omega \times I_\varepsilon(t_0)}$ (auf die allein es ankommt) unabhängig von t, da die U-Koordinate durch die ohnehin stetige Abbildung $\tilde{F}|_{\Omega \times I_\varepsilon(t_0)}$ gegeben ist, aufgrund der Stetigkeit der Einzelwerte $\tilde{\varphi}_z : I_\varepsilon(t_0) \to U \times \Lambda$.

Gibt es also ein $t_1 \in I_\varepsilon(t_0)$ für das kleine Kästchen so, dass $\tilde{F}$ auf $\Omega \times \{t_1\}$ stetig ist, so nennen wir $\Omega \times I_\varepsilon(t_0)$ ein kleines gutes Kästchen.

Für $z \in Z$ sei $T = T(z)$ die Menge der $t \in [0,1] = I$ so, dass ein kleines gutes Umgebungskästchen $\Omega(z) \times I_\varepsilon(t)$ um $(z,t) \in Z \times I$ existiert.
Dann ist also $\tilde{f}_t$ auf einer Umgebung von z stetig und T ist daher offen in I.
Aufgrund der Stetigkeit der Anfangshochhebung $\tilde{f}_0$ von f_0 (die ja als existierend vorausgesetzt ist) ist $0 \in T$.

Wir zeigen, dass T auch abgeschlossen in I ist:

Sei $t_0 \in \overline{T}$. Wegen der Stetigkeit von $F : Z \times I \to X$ gibt es ein kleines Kästchen $\Omega \times I_\varepsilon(t_0)$ um (z, t_0) und wegen $t_0 \in \overline{T}$ gibt es ein $t_1 \in I_\varepsilon(t_0) \cap T$.
Dann ist also $\tilde{f}_{t_1}$ stetig auf einer Umgebung Ω_1 von z, also ist $\tilde{F}$ stetig auf ganz $(\Omega \cap \Omega_1) \times I_\varepsilon(t_0)$ und es folgt $t_0 \in T$.

Also ist $T = \overline{T}$ und daher $T = I$, weil I zusammenhängend ist.

Weil $z \in Z$ beliebig war, ist $\tilde{F}$ auf ganz $Z \times I$ stetig. «

3.4.10 **Mondronomiesatz** *Sei $p : Y \to X$ Überlagerung von X. Seien α, β Wege in X von x_0 nach x_1 in X. Seien $\alpha \simeq \beta$ rel. $\{0,1\}$ mit Homotopie,*

$$F : I \times I \to X,$$

$$F(0,t) = x_0, \ \forall\ t \in I,$$

$$F(1,t) = x_1, \ \forall\ t \in I.$$

Sind $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ Hochhebungen von α bzw. β zum Anfangspunkt y_0, so haben sie auch denselben Endpunkt $y_1 = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. ⋊

Warnung: "homotop" sein ist für diesen Satz entscheidend.

» $F(0,t) = x_0$ und x_0 ist konstant also stetig. Sei $\tilde{F}(0,t) = y_0$ eine Homotopie von $F(0,t)$ (d.h. die Anfangspunkte $F(0,t)$ aller Wege $\alpha_t : I \to X,\ s \mapsto F(s,t)$ sind in der Homotopie F alle gleich x_0 und daher hebbar nach Y mit konstantem Weg $\tilde{F}(0,t) = y_0$.)

Also ist die Homotopie F zu einer Homotopie $\tilde{F} : I \times I \to Y$ mit $\tilde{F} : I \times I \to Y$ mit $\tilde{F}(0,t) = y_0\ \forall\ t \in I$ hebbar und es gilt $p \circ \tilde{F} = F$.

Sei $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}_1$, wobei $\tilde{\alpha}_t : I \to Y, s \mapsto \tilde{F}(s,t)$. Die Endpunkte $\tilde{\alpha}(1)$ durchlaufen dabei den Weg $\varepsilon : I \to \tilde{\alpha}_t(1) = \tilde{F}(1,t)$ und liegen wegen $p \circ \tilde{F} = F$ alle in der Faser Y_{x_1}.

So ist ε eine stetige Abbildung von I in den diskreten Raum Y_{x_1}. Daher ist ε konstant $\varepsilon(t) = \tilde{\alpha}_0(t) = \tilde{\alpha}(1) = y_1\ \forall\ t \in I$. Dann ist $\varepsilon(1) = \tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\beta}(1) = y_1$.

Also ist $\tilde{F}$ Homotopie von $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{\beta}$ rel. $\{0,1\}$ und die Behauptung folgt. «

3.4.11 **Problem** *Seien (Y,p) und (Z,p') Überlagerungen von X. Sei $f : Y \to Z$ ein Homöomorphismus über X, d.h. $p' \circ f = p$.*

Seien $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ und $z_0 = f(y_0)$. Seien $\alpha, \beta : I \to X$ Wege mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1.

Seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ die zu Y gehobenen Wege mit Anfangspunkt y_0 und $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ die zu Z gehobenen Wege mit Anfangspunkt z_0.

Ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, so ist auch $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. ⋊

3.4.12 **Definition** *Sei (X,x_0) ein Objekt in Top_0 und sei $p : Y \to X$ Überlagerung von X. Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Wir sagen (Y,y_0) ist Überlagerung von (X,x_0) in Top_0.*

Zwei Überlagerungen $(Y,y_0), (Y',y_0')$ von (X,x_0) haben dasselbe Hochhebeverhalten, wenn gilt:

Sind α, β Wege in X von x_0 nach x_1 und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ die zu y_0 gehobenen Wege in Y und $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ die zu y_0' gehobenen Wege in Y', so haben $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ genau dann denselben Endpunkt, wenn $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ denselben Endpunkt haben. $\rtimes$

Wir haben in 3.4.11 gesehen:

Sind (Y, y_0) und (Y', y_0') wie in 3.4.12 und ist Y in Top_0 isomorph zu Y' durch einen Homöomorphismus $h : Y \to Y'$ mit $h(x_0) = y_0'$ (basispunkterhaltend), so haben die Überlagerungen $p : Y \to X$ und $p' : Y' \to X$ dasselbe Hochhebeverhalten.

Frage: Gilt auch die Umkehrung, d.h. sind zwei Räume mit gleichem Hochhebeverhalten isomorph in Top_0?

Sei also $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ stetig mit $f(z_0) = x_0$ und sei (Y, y_0) Überlagerung von (X, x_0). (d.h. $p : Y \to X$ ist Überlagerung und $p(y_0) = x_0$)

Die stetige Abbildung $\tilde{f} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ in Top_0 (d.h. $\tilde{f}(z_0) = y_0$) ist Hebung von f, falls $\tilde{f} \circ p = f$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Sei $z \in Z$ und α Weg in Z von z_0 nach z, dann ist nach 3.4.8 $\tilde{f} \circ \alpha$ die eindeutige Hebung des Weges $f \circ \alpha$ von x_0 nach $f(z)$ an $y_0 \in Y$.

Wie kommen wir über $\tilde{f} \circ \alpha$ an $\tilde{f}$ heran?

Ist Z wegzusammenhängend, so folgt aus der Eindeutigkeit des Hebens von Wegen (3.4.8) die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$, falls es existiert.

Idee: Benutze dies für wegzusammenhängendes Z zur Definition von $\tilde{f}$:

- Für $z \in Z$ wähle Weg α von z_0 nach z in Z.
- Erhalte Weg $f \circ \alpha$ von x_0 nach $f(z)$ in X
- Hebe diesen Weg (3.4.8) zu einem Weg $\beta = \widetilde{f \circ \alpha}$ an y_0 in Y, dann gilt $p \circ \beta = f \circ \alpha$.
- Definiere $\tilde{f}(z) = \beta(1)$.

Aber ist $\tilde{f}$ auch wohldefiniert?

Für die Existenz von $\tilde{f}$ ist offenbar notwendig, dass die zu y_0 gehobenen Wege $\widetilde{f \circ \alpha}$ unabhängig von α denselben Endpunkt besitzen.

Wir brauchen also, dass für je zwei Wege α und γ in Z, die von z_0 zu einem gemeinsamen Endpunkt laufen, durch Hochheben der Wege $f \circ \alpha$ und $f \circ \gamma$ zu y_0, Wege in Y mit demseleben Endpunkt entstehen. Wir werden sehen, dass dies unter gewissen Annahmen an Z ausreicht, um die Existenz von $\tilde{f} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ zu garantieren.

Als Anwendung erhalten daraus:

Satz *Seien (Y, y_0), (Y', y_0') zwei Überlagerungen von (X, x_0) mit demselben Hochhebeverhalten. Erfüllen beide die obigen (noch unbekannten) Annahmen, dann ist $(Y, y_0) \cong_X (Y', y_0')$.* ⋊

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, shift left, "\exists\, \tilde{p}"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0') \arrow[ll, shift left, "\exists\, \tilde{p}'"] \\
& (X, x_0) \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

Strategie: Wir algebraisieren das Problem, indem wir die Fundamentalgruppen von (Y, y_0) und (X, x_0) untersuchen.

3.4.13 **Satz** *Ist $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung, so ist der induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi(p) = p_*: \Pi(Y, y_0) \to \Pi(X, x_0)$ injektiv.* $\rtimes$

» Sei γ Schleife an y_0 mit $p_*(\langle\gamma\rangle) = \langle p \circ \gamma\rangle = \langle e_{x_0}\rangle \in \Pi(X, x_0)$. Dann ist $p \circ \gamma \simeq e_{x_0}$ rel. $\{0, 1\}$.

γ ist die eindeutige Hebung zu y_0 von $p \circ \gamma$ (3.4.8) und der konstante Weg e_{y_0} die von e_{x_0}. Da beide denselben Endpunkt $y_0 \in Y$ haben, sind sie nach 3.4.9 homotop mit einer Homotopie $F: I \times I \to Y$ mit $F(0, t) = y_0\ \forall\ t \in I$.

Nach 3.4.10 haben alle Wege $\alpha_t: I \to Y,\ s \mapsto F(s, t)$ in dieser Homotopie denselben Endpunkt $F(1, t)$. Daher ist F Homotopie rel. $\{0, 1\}$ von γ nach e_{y_0} und daher $\langle\gamma\rangle = \left\langle e_{y_0}\right\rangle = 1_{\Pi(Y, y_0)}$.

Wir haben also gezeigt, dass nur das Einselement auf das Einselement abgebildet wird, d.h. ist $p \circ \gamma$ nullhomotop, dann war schon γ nullhomotop und damit ist p_* injektiv. «

3.4.14 **Definition** *Sei $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung. Dann heißt das Bild* im p_* *von $\Pi(Y, y_0)$ in $\Pi(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe der Überlagerung (Y, y_0) und wird mit $G(Y, y_0) \leqslant \Pi(X, x_0)$ bezeichnet. (Klar: $\Pi(Y, y_0) \cong G(Y, y_0)$)*

Die Schleifen an x_0 in X, die zu Schleifen an y_0 gehoben werden können (deren Homotopieklassen daher in $G(Y, y_0)$ liegen) heißen geschlossen hebbar zu y_0. $\rtimes$

Wie wir sehen werden, enthält die charakteristische Untergruppe von Überlagerungen alle Informationen über das Hochheben der Überlagerung.

Sei gegeben:

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f_*(\Pi(Z,z_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\Pi(Z,z_0)) &= p_* \circ \tilde{f}(\Pi(Z,z_0)) \\
&\subseteq p_*(\Pi(Y,y_0)) = G(Y,y_0).
\end{aligned}
$$

Damit $f : (Z,z_0) \to (X,x_0)$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : (Z,z_0) \to (Y,y_0)$ hebbar ist, muss das Bild von $\Pi(Z,z_0)$ unter dem Gruppenhomomorphismus $p_* = \Pi(p)$ in der charakteristischen Untergruppe der Überlagerung (Y,y_0) enthalten sein.

Frage: Reicht dies bereits aus?

Nicht ganz, wie wir noch sehen werden.

3.4.15 **Hochhebbarkeitskriterium** *Sei $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ Überlagerung, Z ein weg- und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $f : (Z,z_0) \to (X,x_0)$ mit $f(z_0) = x_0$ stetig.*

Dann existiert eine Hochhebung $\tilde{f} : (Z,z_0) \to (Y,y_0)$ (und diese ist dann eindeutig) genau dann, wenn $f_* = \pi(f)$ die Fundamentalgruppe $\Pi(Z,z_0)$ in die charakteristische Untergruppe $G(Y,y_0) \leqslant \Pi(X,x_0)$ abbildet. ⋊

» "⇒" Aus der Existenz von $\tilde{f}$ folgt, (s.o)

$$f_*(\Pi(Z,z_0)) \subseteq G(Y,y_0).$$

Die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ folgt dann sofort. (s.o.)

Eindeutigkeit von $\tilde{f}_*$: $\tilde{f}_* : \Pi(Z,z_0) \to \Pi(Y,y_0)$ ist Gruppenhomomorphismus und $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$ wegen der Injektivität von p_* (3.4.13).

"⇐" Sei also im $f_* \subseteq G(Y,y_0)$, $z \in Z$. Wähle Weg α von z_0 nach z (existiert, da Z wegzusammenhängend). Hebe $f \circ \alpha : I \to X$ zu Weg $\widetilde{f \circ \alpha}$ an $y_0 \in Y$ in Y und definiere $\tilde{f}(z) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)$.

Sei β ein weiterer Weg von z_0 nach z in Z. Dann ist $(f \circ \alpha)(f \circ \beta)^{-1}$ Schleife an x_0. Daher ist $p\left(\left\langle (f \tilde{\circ} \alpha)(f \tilde{\circ} \beta)^{-1} \right\rangle\right) \in G(Y,y_0)$ also ist $(f \circ \alpha)(f \circ \beta)^{-1}$

geschlossen hebbar und die Hochhebung von $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ an y_0 in Y haben denselben Endpunkt, nämlich $\tilde{f}(z)$.

Also ist $\tilde{f} : Z \to Y$ wohldefiniert und trivialerweise ist $\tilde{f}(z_0) = y_0$. Nach Konstruktion ist $p \circ \tilde{f} = f$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{f}$ stetig ist. Hier kommt der vorausgesetzte lokale Wegzusammenhang von Z ins Spiel.

Sei V eine offene Umgebung von $\tilde{f}(z_1) \in Y, z_1 \in Z$. Ohne Einschränkung ist V so klein, dass $p|_V$ ein Homöomorphismus auf die offene Umgebung $U = p(V)$ von $x_1 \in X$ ist, $x_1 = f(z_1)$. (d.h. "V lebt ganz auf einem Blatt der Überlagerung") Wähle eine wegzusammenhängende Umgebung W von z_1 so klein, dass $f(W) \subseteq U$, und einen festen Weg α von z_0 nach z und füge kleine "Stichwege" zu jedem Punkt von W an. Das geht, da W wegzusammenhängend ist. Dann ist $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ und insbesondere ist $\tilde{f}(W) \subseteq V$, d.h. $W \subseteq \tilde{f}^{-1}(V)$. Also ist f stetig. «

§5 Klassifikation von Überlagerungen und universelle Überlagerungen

Sei X topologischer Raum, $x_0 \in X$ Basispunkt, X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

3.5.1 **Eindeutigkeitssatz** *Seien (Y, y_0) und (Y', y_0') zwei weg- und lokal wegzusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0). Dann ist $(Y, y_0) \cong_{(X,x_0)} (Y', y_0')$ genau dann, wenn $G(Y, y_0) = G(Y', y_0')$ ist.* ⋊

» "⇒" Sei φ ein Homöomorphismus von Y nach Y' über X mit $\varphi(y_0) = y_0'$, dann gilt:

$$\begin{aligned} G(Y, y_0) &= p_*(\Pi(Y, y_0)) = (p' \circ \varphi)_*(\Pi(Y, y_0)) = p'_*(\varphi_*(\Pi(Y, y_0))) \\ &= p'_*(\Pi(Y', y_0')) = G(Y', y_0'). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Sei $G(Y, y_0) = G(Y', y_0')$, dann haben wir:

Jetzt können wir den letzten Satz anwenden, indem wir das Diagramm etwas drehen:

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "p'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Voraussetzungen:

- $p' : (Y', y_0) \to (X, x_0)$ ist Überlagerung.
- Y ist weg- und lokal wegzusammenhängend.
- $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ist stetig mit $p(y_0) = x_0$.
- p_* bildet $\Pi(Y, y_0)$ in $G(Y, y_0) = G(Y', y_0')$ ab.

d.h. es gibt genau eine Hochhebung $h : (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ von p.

Genauso verfahren wir mit p als Überlagerung und erhalten:

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, "\exists h'"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "p'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Wegen,

$$
\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, leftrightarrow, "h' \circ h", "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_0) \\
& (X, x_0) \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}
$$

und der Eindeutigkeit der gehobenen Abbildung $h' \circ h$ von $p : Y \to X$ zur Überlagerung $p : Y \to X$, ist $h' \circ h = \mathrm{id}_Y$. Analog folgt $h \circ h' = \mathrm{id}_{Y'}$ und damit folgt $(Y, y_0) \cong_{(X,x_0)} (Y', y_0')$. «

Frage: Gibt es zu jeder Untergruppe G von $\Pi(X, x_0)$ eine Überlagerung (Y, y_0) mit charakteristischer Untergruppe $G(Y, y_0) = G$?

3.5.2 **Forschungsauftrag** *Finde Bedingungen so, dass die Antwort auf obige Frage "ja" lautet.* ⋊

Also starten wir den Beweisversuch:

Sei $G \leqslant \Pi(X, x_0)$.

Wie können wir Elemente von Y "erschaffen"?

Tun wir mal so, als hätten wir die Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ schon so konstruiert, dass $G(Y, y_0) = G \leqslant \Pi(X, x_0)$ ist.

Sei $x \in X$. Wie können wir die Faser $Y_x = p^{-1}(x)$ von x unter p aus G und ??? rekonstruieren?

Der Wegzusammenhang hilft: Ist $y \in Y_x$, so gibt es Wege in Y von y_0 nach y, die auf Wege von x_0 nach x unter p projezieren.
Umgekehrt kann jeder Weg α von x_0 nach x zu einem Weg $\tilde{\alpha}$ an y_0 gehoben werden, dessen Endpunkt in Y_x liegt.

Wann haben die Hochhebungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ zweier Wege α, β von x_0 nach x denselben Endpunkt?

Sind $\alpha, \beta : I \to X$ Wege von x_0 nach x in X, so ist $\alpha\beta^{-1}$ geschlossene Schleife an x_0.
Diese hebt sich an y_0 zu einer geschlossenen Schleife an y_0 genau dann, wenn $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ denselben Endpunkt in Y_x haben, und dies ist äquivalent dazu, dass $\langle \alpha\beta^{1-} \rangle \in G \leqslant \Pi(X, x_0)$ ist (nach Definition von G und 3.4.15)

Wir definieren also eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Omega(X, x_0, x)$ von Wegen in X von x_0 nach x durch:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \left\langle \alpha\beta^{-1} \right\rangle \in G.$$

Jetzt definieren wir:

$$Y_x := \Omega(X, x_0, x)/\sim,$$

als die Menge der Äquivalenzklassen von $\Omega(X, x_0, x)$ bezüglich $\sim$ und,

$$Y := \bigcup_{x \in X} Y_x,$$

ist per definitionem eine disjunkte Vereinigung.

Sei y_0 die Äquivalenzklasse des konstanten Weges e_{x_0} in $\Omega(X, x_0, x)$. Für $y \in Y_x$ sei $p(y) = x$, so ist p surjektive Abbildung von Y nach X mit Fasern $p^{-1}(x) = Y_x$ für $x \in X$.

Wir brauchen jetzt eine Topologie auf Y so, dass gilt,

- Y ist weg- und lokal wegzusammenhängend.
- $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ist stetig.
- Die Faser $Y_x = p^{-1}(x)$ für $x \in X$ ist diskret in der Spurtopologie.
- $p : Y \to X$ ist lokale Faserung.
- $\operatorname{im} p_* = G$, $(p_*(\Pi(Y, y_0)) = G)$.

Bezeichnungen:

- Für einen Weg α von x_0 nach x sei $[\alpha]$ die Äquivalenzklasse von α in $\Omega(X, x_0, x)$ bezüglich "$\sim$".

  $\Rightarrow$ Also ist $[\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow \langle \alpha\beta^{-1} \rangle \in G$ wenn α, β Wege von x_0 nach x.

- Für $t \in I = [0,1]$ sei $\alpha_t \in \Omega(X, x_0, \alpha(t))$ gegeben durch $\alpha_t(s) = \alpha(st)$.

Wir wollen eine Topologie auf Y so, dass die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ von α an $y_0 \in Y$ gerade durch

$$\tilde{\alpha} : I \to Y,\ t \mapsto [\alpha_t] \in Y_{\alpha(t)} \subseteq Y,$$

gegeben ist.

Idee: Wir machen die Umgebungen so klein, dass sie auf einem Blatt liegen. Sei $x \in X$ und U offene, wegzusammenhängende Umgebung von x. Sei $\alpha \in y \in Y_x$, d.h. α ist Weg von x_0 nach x. Nach **??** bilden diese Umgebungen eine Umgebungsbasis von X.

Definiere:

$$V(U, y) := \{[\alpha\beta] \,:\, \beta \text{ ist Weg von } x \text{ nach } z, z \in U\}.$$

$V(U, y)$ ist offensichtlich unabhängig von der Wahl von $\alpha \in y$, denn sei

$$[\alpha] = [\hat{\alpha}] \Rightarrow \left\langle (\alpha\beta)(\hat{\alpha}\beta)^{-1} \right\rangle = \left\langle \alpha\beta\beta^{-1}\hat{\alpha}^{-1} \right\rangle = \left\langle \alpha\hat{\alpha}^{-1} \right\rangle \in G.$$

So hängt $V(U, x)$ nur von $y = [\alpha]$ ab und wir können daher tatsächlich $V(U, y)$ schreiben.

Klar:

(a) $p(V(U, y)) = U$.

(b) Sind U_1, U_2 offene, wegzusammenhängende Umgebungen von x, dann enthält $U_1 \cap U_2$ eine wegzusammenhängende Umgebung U_3 von x (aber der Schnitt selbst muss keine wegzusammenhängende Umgebung sein).

$$\Rightarrow V(U_3, y) \subseteq V(U_1, y) \cap V(U_2, y).$$

Somit bilden die $V(U,y)$ eine Umgebungsbasis von $y \in Y$ und definieren daher eine Topologie auf Y.

$O \subseteq Y$ ist also offen genau dann, wenn es zu jedem $y \in O$ eine wegzusammenhängende offene Umgebung U von $x = p(y)$ gibt, so dass $V(U,y) = O$.

Da jede Umgebung von $x \in X$ eine offene, wegzusammenhängende Umgebung U von x enthält und $V(U,y)$ in $p^{-1}(U)$ enthalten ist, ist p stetig.

Es bleibt zu zeigen:

(a) Die Fasern $Y_x = \Omega(X, x_0, x)/\sim$ für $x \in X$ sind diskret in der Spurtopologie.

(b) $p : Y \to X$ ist lokal trivial.

(c) Y ist weg- und lokal zusammenhängend.

(d) $G(Y, y_0) = G$.

» (a) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass es für alle $y \in Y_x$ eine offene wegzusammenhängende Umgebung U von x gibt, mit

$$Y_x \cap V(U,y) = \{y\}.$$

Frage: Was ist $Y_x \cap V(U,y)$?

Sei $y = [\alpha]$ mit α Weg von x_0 nach x in X. Da alle Elemente von Y_x Äquivalenzklassen $[\tau]$ von Wegen τ von x_0 nach x sind und alle lemente von $V(U,y)$ Äquivalenzklassen $[\alpha\beta]$ mit einem Weg β von x nach z in U sind, ist

$$[\alpha\beta] \in Y_x \cap V(U,y) \Leftrightarrow \beta \text{ ist Schleife an } x.$$

Wir müssen also ein U so finden können, dass

$$[\alpha] = [\alpha\beta], \text{ für alle Schleifen an } x.$$

Es gilt,

$$[\alpha] = [\alpha\beta] \Leftrightarrow \left\langle \alpha(\alpha\beta)^{-1} \right\rangle \in G.$$

Ohne weitere Annahme hat aber die Homotopieklasse $\langle \alpha(\alpha\beta)^{-1} \rangle = \langle \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \rangle$ gar keinen Grund aus G zu sein.

Spezialfall: $x = x_0$, $\alpha =$ const., $G = (1)$, dann gilt

$$\left\langle \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \right\rangle \in G \Leftrightarrow \langle \beta \rangle \in G$$
$$\Leftrightarrow \beta \text{ ist Schleife an } x \in X, \text{ und nullhomotop in } X.$$

Eine Umgebung U von $x \in X$, für die alle Schleifen an x in U in X nullhomotop sind, braucht es nicht zu gelten.

Wir machen aus der Not eine Tugend. Einfach das was wir brauchen, voraussetzen.

Erinnerung Ein wegzusammenhängender Raum heißt einfach zusammenhängend, wenn $\Pi(X) = (1)$ ist. ⊸

3.5.3 **Definition** *Sei X topologischer Raum und X wegzusammenhängend, dann heißt X,*

i) lokal einfach zusammenhängend, falls jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung von x enthält.

ii) semilokal einfach zusammenhägend, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass jede Schleife an x in U in X nullhomotop ist. ⋊

Bemerkungen 1.) i) $\Rightarrow$ ii).

2.) Ist U Umgebung von $x \in X$ die Bedingung ii) erfüllt, so erfüllt auch jede Teilmenge V von U, die Umgebung von x ist, ii).

Dies gilt offensichtlich nicht für i).

Sei jetzt X wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum. Wir können jetzt die wegzusammenhängende Umgebung U von x so klein wählen, dass sie die Bedingung ii) von 3.5.3 erfüllt.

Dann ist jede Schleife β an x, die ganz in U verläuft, in X nullhomotop, d.h. $\langle\beta\rangle = \langle e_x\rangle$. Außerdem ist für $y = [\alpha]$ (α Weg von x_0 nach x),

$$\left\langle \alpha(\alpha\beta)^{-1} \right\rangle = \left\langle \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \right\rangle = \left\langle \alpha e_x \alpha^{-1} \right\rangle = \left\langle \alpha\alpha^{-1} \right\rangle = 1_{\Pi(X)} \in G.$$

Also ist $[\alpha\beta] = [\alpha] = y$, $Y_x \cap V(U,y) = \{y\}$ und damit ist Y_x diskret in der Spurtopologie.

(b) z.Z. ist $p : Y \to X$ ist lokal trivial. Sei jetzt,

α Weg von x_0 nach x,

β Weg von x nach x',

γ Weg von x' nach x''.

Es gilt $[(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$, denn

$$\text{Da } \left\langle ((\alpha\beta)\gamma)(\alpha(\beta\gamma))^{-1} \right\rangle \quad = \left\langle \alpha\beta\gamma\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1} \right\rangle = \langle e_{x_0}\rangle = 1_{\Pi(X)} \in G.$$

Sei nun $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x$ offen und wegzusammenhängend, so dass jede Schleife an x in U in X nullhomotop ist (semilokal einfach zusammenhängend).

Sei $y = [\alpha]$, α Weg von x_0 nach x. Sei $Z \in V(U,y) \Rightarrow z = [\alpha\beta]$ mit einem Weg β von x nach $x' \in U$.

Da U offen ist, ist U auch Umgebung von z und $V(u,z) \Rightarrow w = [(\alpha\beta)\gamma]$ mit einem Weg γ von x' nach x'' in U. $w = [\alpha(\beta\gamma)]$ mit $\beta\gamma$ Weg von x nach x'', d.h. $w \in V(U,y)$.

Wir haben also gezeigt, dass $V(U,z) \subseteq V(U,y)$.

Analog verfahren wir mit $y = \left[(\alpha\beta)\beta^{-1})\right]$ und erhalten $V(U,y) \subseteq V(U,z)$, also ist $V(U,y) = V(U,z)$. Insbesondere ist $V(U,y)$ offen in V.

Seien nun $y, y' \in Y_x$, $z \in V(U,y) \cap V(U,y')$, dann ist

$$V(U,y) = V(U,z) = V(U,y').$$

Wegen

$$\{y\} = Y_x \cap V(U,y) = Y_x \cap V(U,y') = \{y'\},$$

ist $y = y'$.

Also ist $p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in Y_x} V(U,y)$ eine topologische Summe.

$p|_{V(U,y)} : V(U,y) \to U$ ist stetig und surjektiv nach Konstruktion:

Ist $y = [\alpha]$ mit einem Weg α von x_0 nach $x = p(y)$ und ist β Weg von x nach z in U, so ist $[\alpha\beta] \in V(U,y)$ und $\alpha\beta$ ist Weg von x_0 nach z. Daher ist nach Definition von p, $p([\alpha\beta]) = z$.

$p|_{V(U,y)}$ ist aber auch injektiv:

Ist γ ein weiterer Weg von x nach $z \in U$. Dann ist $\beta\gamma^{-1}$ Schleife an x und daher nullhomotop in X nach Vorraussetzung an U. Daher ist $\langle \alpha\beta(\alpha\gamma^{-1}) \rangle = \langle \alpha\beta\gamma^{-1}\alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha\alpha^{-1} \rangle = 1 \in G$ und daher ist $[\alpha\beta] = [\alpha\gamma]$.

Also ist $p|_{p^{-1}(U)}$ injektiv und daher ist $p : p^{-1}(U) \to U$ bijektiv und stetig.

Um zu zeigen, dass dies ein Homöomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $p_{p^{-1}(U)}$ offene Mengen in offene Mengen abbildet. Dies folgt aber sofort, da die Mengen $V(U,y)$ mit $y \in Y$ und U offen und wegzusammenhängend eine Basis der Topologie von Y bilden. Es genügt also zu zeigen, dass $p(V(U,y))$ offen in X ist.

Dies gilt aber, da $p(V(U,y)) = U$ offen in X ist.

(c) z.Z. Y ist wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend:

- Y ist lokal wegzusammenhängend, da jede Umgebung von $y \in Y$ eine Menge $V(U,y) \cong U$ enthält und U wegzusammenhängend ist, und das homöomorphe Bild $V(U,y)$ ist wegzusammenhängend.

- Y ist auch wegzusammenhängend, denn sei $y = [\alpha]$ mit α Weg von x_0 nach x, dann wird durch $t \mapsto [\alpha_t]$ mit $\alpha_t : I \to X, s \mapsto \alpha(st)$ ein Weg von y_0 nach y definiert.

(d) z.Z. $G(Y, y_0) = G$: Die Elemente von $G(Y, y_0)$ sind genau die Homotopieklassen von Schleifen an $x_0 \in X$, die sich geschlossen zu Schleifen an $y_0 \in Y$ heben lassen.

Dabei ist $y_0 = [e_{x_0}]$. Sei α Schleife an x_0 und sei $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung zu Y zum Anfangspunkt $y_0 \in Y$. Dann ist nach (c):

$$\tilde{\alpha} : I \to Y,\ t \mapsto [\alpha_t].$$

Daher ist $\tilde{\alpha}(1) = [\alpha_1] = [\alpha]$ und $\tilde{\alpha}$ ist Schleife an y_0 genau dann, wenn $y_0 = \tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$ ist, d.h. wenn $[\alpha] = [e_{x_0}] \Leftrightarrow \left\langle \alpha e_{x_0}^{-1} \right\rangle = \langle \alpha \rangle \in G$. «

Wir haben gezeigt: Klassifikation der weg- und lokal wegzusammenhängenden Überlagerungen von weg- und lokal weg- und semilokal einfach zusammenhängenden Räumen (X, x_0):

3.5.4 **Satz** *Sei X weg-, lokal weg- und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.*

Dann existiert für jede Untergruppe G von $\Pi(X, x_0)$ eine bis auf Isomorphie über X eindeutig bestimmte Überlagerung (Y, y_0), die ebenfalls weg-, lokal weg- und semilokal einfach zusammenhängend ist:

$$p : (Y, y_0) \to (X, x_0), \quad p(y_0) = x_0,$$

mit charakteristischer Untergruppe $G(Y, y_0) \leqslant \Pi(X, x_0)$ die gegebene Gruppe G.
⋊

3.5.5 *Bemerkung.* Eine besondere Untergruppe von $\Pi(X, x_0)$ ist $(1) \leqslant \Pi(X, x_0)$.

Sei $(Y_U, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ die Überlagerung gemäß 3.5.4 mit $G(Y_U, y_0) = (1)$.

Wegen $\Pi(Y_U, y_0) \cong G(Y_U, y_0) = (1)$ ist Y_U einfach zusammenhängend.

Wir werden sehen, dass diese “universelle” Überlagerung eine bestimmte universelle Eigenschaft besitzt. ⊸

Sei X weg-, lokal weg- und semilokal einfach zusammenhängend, $x_0 \in X$.

Alle Überlagerungen seien weg- und lokal wegzusammenhängend (semilokal einfach zusammenhängend ergibt sich automatisch).

3.5.6 **Definition** *Eine Drehbewegung oder Decktransformation einer Überlagerung $p : Y \to X$ ist ein Automorphismus über X derselben, d.h. ein Homöomorphismus $\varphi : Y \to Y$ mit $p \circ \varphi = p$, so dass*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Die Menge der Decktransformationen bildet eine Gruppe $\mathcal{D}$ unter der Komposition:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

⋊

Bemerke Hier legen wir keinen Basispunkt fest. (Zumindest nicht in Y). Wir wollen gerade Überlagerungen zu verschiedenen Basispunkten in Y studieren und vergleichen. ⊸

Klar: 1.) Ist $\varphi : Y \to Y$ Decktransformation, so ist nach Definition $p \circ \varphi = p$, d.h. $p(y)$ und y liegen in derselben Faser von p.

2.) Ist $y_1 \in Y$, $x_1 = p(y_1)$, so ist $p : (Y, y_1) \to (X, x_1)$ eine Überlagerung mit Basispunkt.

Aufgrund des Wegzusammenhangs von X bzw. Y sind die Fundamentalgruppen $\Pi(X, x_1)$ und $\Pi(Y, y_1)$ unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Für $y_0 = y_1$ ist die Identität eine Decktransformation und da diese eindeutig ist, ist die Identität die einzige Decktransformation, die den Basispunkt erhält.

Sei y_0 Basispunkt von Y, d.h. $p(y_0) = x_0$ und $y_1 \in Y_{x_0}$, dann existiert nach 3.4.15 genau dann eine Deckbewegung $\varphi : Y \to Y$ mit $\varphi(y_0) = y_1$ und $p \circ \varphi = p$, wenn $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$.

3.5.8 **Satz** *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und sei $y_1 \in Y_{x_0}$. Dann gibt es eine Decktransformation $\varphi : Y \to Y$ mit $\varphi(y_0) = y_1$ genau dann, wenn*

$$G(Y, y_0) = G(Y, y_1).$$

In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt. ⋊

Insbesondere ist id_Y die einzige Decktransformation, die y_0 festhält, d.h. für die gilt $\varphi(y_0) = y_0$.

3.5.9 **Korollar** *Sei $\mathrm{id} \neq \varphi : Y \to Y$ Decktransformation, dann operiert φ fixpunktfrei auf Y, d.h. $\varphi(y) \neq y \ \forall \ y \in Y$.* ⋊

» Der Beweis ist eine leichte Übung. «

Frage: Sei $y_1 \in Y_{x_0}$, was bedeutet $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$?

Wähle einen Weg γ in Y von y_0 nach y_1. In 3.2.6 wurde ein Isomorphismus konstruiert:

$$c_\gamma : \Pi(Y, y_0) \to \Pi(Y, y_1),\ \langle\beta\rangle \mapsto \left\langle \gamma^{-1}\beta\gamma \right\rangle.$$

Sei $\alpha = p \circ \gamma$, dann ist

$$p(\gamma(0)) = p(y_0) = x_0 = p(y_1) = p(\gamma(1)),$$

also ist α Schleife an x_0.

Dann ist $\langle\alpha\rangle \in \Pi(X, x_0)$ und wir haben einen Automorphismus von $\Pi(X, x_0)$ durch Konjugation:

$$c_{\langle\alpha\rangle} : \Pi(X, x_0) \to \Pi(X, x_0),\ \langle\tau\rangle \mapsto \langle\alpha\rangle^{-1} \langle\tau\rangle \langle\alpha\rangle = \left\langle \alpha^{-1}\tau\alpha \right\rangle,$$

mit einer Schleife τ an x_0.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(Y, y_0) \arrow[r, "c_\gamma"] \arrow[d, "p_*"'] & \Pi(Y, y_1) \arrow[d, "p_*"] \\
G(Y, y_0) \arrow[r, "c_{\langle\alpha\rangle}"] & G(Y, x_1)
\end{tikzcd}$$

$$p_* c_\gamma(\langle\beta\rangle) = p_* \left\langle \gamma^{-1}\beta\gamma \right\rangle = \left\langle p \circ \gamma^{-1}\beta\gamma \right\rangle = \left\langle \alpha^{-1} \underbrace{p(\beta)}_{:=\tau} \alpha \right\rangle$$

Also ist $G(Y, y_1) = \langle\alpha\rangle^{-1} G(Y, y_0) \langle\alpha\rangle$. Daher ist

$$\begin{aligned}
G(Y, y_1) = G(Y, y_0) &\Leftrightarrow \langle\alpha\rangle^{-1} G(Y, y_0) \langle\alpha\rangle = G(Y, y_0) \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha\rangle \in N_{\Pi(X, x_0)}(G(Y, y_0)).
\end{aligned}$$

Definition *Seien G, H Gruppen mit $H \leqslant G$. Dann ist*

$$H \subseteq N_G(H) = \left\{g \in G : g^{-1}Hg = H\right\} \leqslant G,$$

der Normalisator von H in G.

$N(G)$ ist die größte Untergruppe von G in der H enthalten und die normal ist. Insbesondere ist $H \leqslant G$ Normalteiler genau dann, wenn $N_G(H) = G$ ist. ⋊

3.5.10 **Satz über Deckbewegungen** *Sei $G = \Pi(X, x_0)$, $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung mit $H = G(Y, y_0) \leqslant G$. Dann gibt es zu jedem Element $\langle\alpha\rangle \in N_G(H)$, mit α Schleife an x_0, $y_1 = \tilde{\alpha}(1)$ und $\tilde{\alpha}$ eine Hochhebung von α nach Y am Anfangspunkt y_0, genau eine Deckbewegung*

$$\varphi_{\langle\alpha\rangle} : Y \to Y, \qquad \varphi_{\langle\alpha\rangle}(y_0) = y_1 \in Y_{x_0}.$$

Die Abbildung $\langle\alpha\rangle \mapsto \varphi_{\langle\alpha\rangle} \in \mathcal{D}$ ist surjektiver Homomorphismus von $N_G(H)$ auf $\mathcal{D}$ mit Kern H.

Also ist nach dem 1. Isormophiesatz $N_G(H)/H \cong \mathcal{D}$. ⋊

» Übung. «

3.5.11 **Definition** *$p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ heißt normale Überlagerung, falls $G(Y, y_0)$ Normalteiler von $\Pi(X, x_0)$ ist, ($G(Y, y_0) \trianglelefteq \Pi(X, x_0)$). In diesem Fall ist*

$$\mathcal{D} \cong \Pi(X, x_0)/G(Y, y_0),$$

und die Kardinalität der Fasern von p ist der Index von $G(Y, y_0)$ in $\Pi(X, x_0)$. ⋊

Spezialfall: Ist $G = G(Y, y_0) = (1)$, d.h. $Y = Y_U$, so ist $G \trianglelefteq \Pi(X, x_0)$, d.h. die universelle Überlagerung ist normal. ⊸

3.5.12 **Definition** *Die Überlagerung von (X, x_0) mit trivialer charakteristischer Untergruppe heißt universelle Überlagerung.* ⋊

3.5.13 *Bemerkungen.* (i) Wegen unserer Voraussetzung an (X, x_0) existiert die universelle Überlagerung von (X, x_0) und ist bis auf Isomorphie über X eindeutig.

(ii) Die universelle Überlagerung (Y_U, y_0) ist einfach zusammenhängend. $\multimap$

3.5.14 **Problem** *Gehen Sie den Beweis von 3.5.4 im Spezialfall $G = (1) \leqslant \Pi(X, x_0)$ durch.*

Frage: Was ist denn universell an (Y_U, y_0)?

Seien $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $q : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ schöne Überlagerungen, also X weg-, lokal weg- und semilokal einfach zusammenhängend und Y weg- und lokal wegzusammenhängend.

Seien $H = G(Z, z_0)$, $G = G(Y, y_0)$ und $H, G \leqslant \Pi(X, x_0)$ sowie $H \leqslant G$.

Aus 3.4.15 folgt, dass

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "\exists\, !\tilde{q}"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

da $q_*(\Pi(Z, z_0)) = H \leqslant G = p_*(\Pi(Y, y_0))$.

3.5.15 **Satz** *Bezeichnungen wie oben mit $f := \tilde{q}$. Dann ist $f : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ Überlagerung.* $\rtimes$

» $H \leqslant G$ und $p_* : \Pi(Y, y_0) \to G$ ist ein Isomorphismus, also ist $\tilde{H} = p_*^{-1}(H) \leqslant \pi(Y, y_0)$ wohldefiniert.

Y ist schön, es existiert zu $\tilde{H} \leqslant \Pi(Y, y_0)$ also eine Überlagerung $p' : (Y', y_0') \to (Y, y_0)$ mit $G(Y', y_0') = \tilde{H}$.

$$\begin{aligned}
&f_*(\Pi(Z, z_0)) \subseteq \Pi(Y, y_0) \\
&p_* \circ f_*(\Pi(Z, z_0)) = q_*(\Pi(Z, z_0)) = H, \\
\Rightarrow\ &f_*(\Pi(Z, z_0)) = \tilde{H}
\end{aligned}$$

Nach 3.4.15 existiert daher genau ein $h : (Z, z_0) \to (Y', y_0')$ mit $p' \circ h = f$

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "\exists\, !h"] \arrow[dr, "p'"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "f"] \\
& (Y, y_0) &
\end{tikzcd}$$

$$p \circ p' : (Y', y_0') \xrightarrow{p'} (Y, y_0) \xrightarrow{p'} (X, x_0),$$

$$\begin{aligned}
(p \circ p')_*(\Pi(Y', y_0')) &= p_*(p'_*(\Pi(Y', y_0'))) = p_*(\tilde{H}) \\
&= H = G(Z, z_0) \leqslant \Pi(X, x_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
(Y', y_0') \arrow[rr, "\exists\, !g"] \arrow[dr, "q"'] & & (Z, z_0) \arrow[dl, "p \circ p'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Nach 3.4.15 existiert daher genau ein $g : (Y', y_0') \to (Z, z_0)$ mit $q \circ g = p \circ p'$.

Betrachte $g \circ h : (Z, z_0) \to (Z, z_0)$

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "g \circ h"] \arrow[dr, "q"'] & & (Z, z_0) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Zeige $g \circ h$ ist Hochhebung von $q \Rightarrow g \circ h = \mathrm{id}$ wegen Eindeutigkeit der Hebung:

$$q \circ (g \circ h) = (q \circ g) \circ h = (p \circ p') \circ h = p \circ (p' \circ h) = p \circ f = q,$$

also kommutiert das Diagramm und $g \circ h$ ist Hochhebung von $q : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ zu $q : (Z, z_0) \to (X, x_0)$.

Die Identität $\mathrm{id} : Z \to Z$ ist auch eine solche Hochhebung und aufgrund der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $g \circ h = \mathrm{id}_Z$.

$$(p \circ p')_*(\Pi(Y', y_0')) = H \leqslant G = p_*(Y, y_0).$$

Nach 3.4.15 lässt sich $p \circ p'$ heben:

$$\begin{tikzcd}
(Y', y_0') \arrow[rr, "p' \circ h \circ g = f \circ g"] \arrow[dr, "p \circ p'"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Also ist $h \circ g$ Hochhebung von p' in die Überlagerung $p' : (Y', y_0') \to (Y, y_0)$.

Da die Hochhebung eindeutig ist, gilt $h \circ g = \mathrm{id}_{Y'}$.

Also sind h und g inversehe Isomorphismen über (X, x_0) und daher ist insbesondere $f : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ eine Überlagerung.

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "p'"] \\
& (Y, y_0) &
\end{tikzcd}$$

Nun ernten wir:

3.5.16 **Zusammenfassung** *Sei (X, x_0) schön.*

1.) *Sind die charakteristischen Untergruppen zweier (schöner) Überlagerungen von (X, x_0) ineinander enthalten, so überalgert die Überlagerung mit der kleineren Gruppe kanonisch die andere und zwar so, dass die drei Überlagerungen ein kommutatives Diagramm ergeben:*

$$
\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[rr, "f = \tilde{q}"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}
$$

2.) *Spezialfall:* Sei $(Z, z_0) \cong (Y_U, y_0)$, d.h. $\Pi(Y_U, y_0) = (1)$. Die universelle Überlagerung (Y_U, y_0) überlagert alle andren Überlagerungen (Y, y_0) von (X, x_0), da (1) in jeder Untergruppe von $\Pi(X, x_0)$ enthalten ist. Dies ist die universelle Eigenschaft der universellen Überlagerung.

3.) *Wegen $G(Y_U, y_0) = (1) \trianglelefteq G = \Pi(X, x_0)$ ist die universelle Überlagerung normal. Nach 3.5.11 ist daher:*

$$\Pi(X, x_0) \cong \Pi(X, x_0)/(1) = \Pi(X, x_0)/G(Y_U, y_0) = \mathcal{D}. \quad ⋊$$

4 Kompakte Flächen

Erinnerung: Eine n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum, der lokal zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, die zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. ⊸

Wir wissen bereits, dass jede jede n-Mannigfaltigkeit lokal kompakt ist. Unser Ziel ist es, alle zusammenhängenden, kompakten randlosen Flächen (=2-Mannigfaltigkeiten) zu finden.

Bemerkung. Punkte von "Flächen"$\subseteq \mathbb{R}^2$ können keine zum $\mathbb{R}^2$ homöomorphe Umgebung besitzen: d.h. die Zylinderfläche ist keine Fläche!

1. Annäherung: Finde leicht zu behandelnde Beispielflächen: Simplizialkomplexe sind topologische Invarianten, wie z.B. die Fundamentalgruppe, die leicht zu berechnen sind.

Wir wollen ein konkretes Resultat erzielen, z.B. die Klassifikation der Flächen.

Unser Problem ist allerdings, dass die topologische Struktur alleine nicht viel hergibt, um ein solches Ergebnis zu beweisen. Auch algebraische Invarianten nützen nicht viel, es sei denn, wir haben eine Methode zur Berechnung dieser Invarianten für eine genügend große Kollektion solcher Räume.
Wir arbeiten also mit Räumen, die in Stücke zerlegt werden können, die wir schon hinreichend gut kennen, und die man schön zusammensetzen kann, triangulierbare Räume.

Bsp

1.) Ein Homöomorphismus von der Oberfläche eines Tetraeders auf die 2-Spähre ergibt eine Zerlegung derselben in 4 Dreiecke, die an ihren Kanten verschweißt sind.

2.) Wir können Flächen durch Dreiecke triangulieren. Für Mannigfaltigkeiten höherer Dimension brauchen wir entsprechende Bausteine höherer Dimension. ⋊

§1 Simpliziale Komplexe und Triangulierungen

4.1.1 **Definition** *Eine (affine) Hyperebene H des $\mathbb{R}^n$ der Dimension k ist von der Form,*

$$v_0 + U = H,\ U \leqslant \mathbb{R}^n,\ \dim_{\mathbb{R}}(U) = k.$$

Ist $(x_1, \dots, x_n)$ Basis von U und $v_i = v_0 + x_i \in H$ (für $i = 1, \dots, k$), so ist

$$\begin{aligned} H &= \{v_0 + \lambda_1(v_1 - v_0) + \ldots + \lambda_k(v_k - v_0) : \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k : \mu_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1\right\} \end{aligned}$$

Seien $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, dann ist $H = \left\{\sum_{i=0}^{k} \mu_i v_i : \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1,\ \mu_i \in \mathbb{R}\right\}$ die von den Vektoren $v_0, \dots, v_k$ aufgespannte Hyperebene. Die Punkte $v_0, \dots, v_k$ heißen in allgemeiner Position, falls jede echte Teilmenge dieser Punkte eine echt kleinere Hyperebene aufspannt. Dies ist geanu dann der Fall, wenn die Vektoren $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ linear unabhängig sind.

Seien $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die kleinste konvexe Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$, die $v_0, \dots, v_k$ enthält, gegeben als,

$$\left\{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k : \mu_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0\right\}.$$

Sie heißt die konvexe Hülle der Punkte $v_0, \dots, v_k$.

Bsp

$$\begin{aligned} T &= \{\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 : \mu_i \in \mathbb{R}, \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1\}, \\ S &= \{\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \in T : \mu_i \geq 0, \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1\}. \end{aligned}$$

Sind zudem $v_0, v_1, \dots, v_k$ in allgemeiner Position, so heißt ihre konvexe Hülle das von $v_0, \dots, v_k$ aufgespannte Simplex σ, oder auch k-Simplex, wobei k die Dimension des Simplex' ist.

Bsp 0-Simplex (Punkt), 1-Simplex (Strecke), 2-Simplex (Dreieck), 3-Simplex (Tetraeder)

Die Punkte $v_0, \ldots, v_k$ heißen Ecken von σ. (Punkte sind 0-Simplizes)

Simplizes haben Seiten, nämlich die von den Teilmengen der Menge der Ecken aufgespannten Simplizes.

Sei τ eine Seite von σ, d.h. τ wird von $A \leqslant \{v_0, \ldots, v_k\}$ aufgespannt (und ist Simplex), dann schreiben wir $\tau \leqslant \sigma$. $\rtimes$

4.1.2 **Definition** *Eine endliche Menge K von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ heißt simplizialer Komplex (Simplizalkomplex), wenn gilt:*

(i) Für jedes $\sigma \in K$ und $\tau \leqslant \sigma$ ist $\tau \in K$.

(ii) Sind σ und τ in K, so ist $\sigma \cap \tau$ entweder leer oder besteth aus einer gemeinsamen Seite von σ und τ. $\rtimes$

Bsp 1.) $K = \{\sigma, \overline{x_1x_2}, \overline{x_0x_1}, \overline{x_0x_2}, x_0, x_1, x_2\}$.

2.) $K = \{\sigma, \overline{x_1x_2}, \overline{x_0x_1}, \overline{x_0x_2}, x_0, x_1, x_2, x_3, \overline{x_1x_3}, \overline{x_1x_2}, \overline{x_2x_3}\}$

3.) Keine Simplizialkompexe. $\rtimes$

4.1.3 *Bemerkung.* 1.) Man kann (abstrakt) einen k-Simplex als Menge $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ auffassen. Der zu σ gehörende Simplizialkomplex ist dann gerade $\mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\varnothing\}$. Dies ist der Vorteil beim Aufbau durch Dreiecke, denn für z.B. Rechtecke gilt dies nicht die Diagonale $\{x_0, x_1\}$ spannt keine Seite auf.

2.) Ebenso kann man abstrakte (kombinatorische) Simplizialkomplexe K durch Angabe einiger Teilmengen von einer endlichen Punktmenge angeben:

$$K_0 = \{v_0, \ldots, v_m\},\ \sigma_1, \ldots, \sigma_l \subseteq K_0 \text{ maximale Simplizes,}$$
$$\sim K = \{v_0, \ldots, v_m,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_l : \tau \in K_0 \text{ mit } \tau \subseteq \sigma_i \ \exists\ i = 1, \ldots, l\}.$$ $\multimap$

Eine Einbettung von K in den $\mathbb{R}^n$ erhält man, indem man $m+1$ Punkte $v_0, \ldots, v_m$ in allgemeiner Position im $\mathbb{R}^n$ nimmt und die von den σ_i, $i = 1, \ldots, l$ aufgespannten Simplizes und ihre Seiten dazu nimmt. Der so entstehende topologische Raum (Spurtologie im $\mathbb{R}^n$) heißt Realisierung von K und wird mit $|K|$ bezeichnet.

Alle Realisierungen eines Simplizialkomplexes sind homöomorph.

4.1.4 **Definition** *Eine Triangulierung eines topologischen Raumes X besteht aus einem Simplizialkomplex K und einem Homöomorphismus $h : |K| \to X$. X heißt triangulierbar, falls X eine Triangulierung besitzt.* $\rtimes$

Beachte: 1.) $|K|$ in 4.1.4 ist kompakt und metrisierbar, also ist auch X kompakt und metrisierbar.

2.) Triangulierungen von X, falls sie existieren, sind nicht eindeutig!

Bsp 1.) Zwei verschiedene Triangulierungen der 2-Sphäre.

2.) Triangulierungen des Kreiszylinders und des Trous. $\rtimes$

Sätze *1.) Rado 1923:*

Jede kompakte Fläche ist triangulierbar.

2.) Moise 1952:

Jede kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

3.) Cairns, 1935:

Jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist triangulierbar. $\rtimes$

Offenes Problem *Ist jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension > 3 triangulierbar?* $\rtimes$

4.1.5 **Definition** *Für einen Simplex $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\}$ mit Ecken $x_0, \dots, x_k$ sei die Menge*

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i > 0, \ \forall \ i = 0, \dots, k \right\},$$

das Innere von $|\sigma| \subseteq \mathbb{R}^n$. $\rtimes$

Für $k \neq n$ unterscheidet sich das Innere vom topologischen Innern der Teilmenge $|\sigma| \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition *Zusammenhang bei Simplizialkomplexen ist das, was man sich geometrisch darunter vorstellt.* $\rtimes$

Bsp 1.) $K = \{a, b, c, \dots, k, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \dots, \langle a, b, c\rangle, \langle b, c, d\rangle, \dots, \langle i, j, k, l\rangle$

2.) $K\{a, \dots\}$ K ist nicht zusammenhängend. $\rtimes$

4.1.6 **Lemma** *Sei K Simplizialkomplex mit Polyeder $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ dann gilt:*

1.) $|K|$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt im $\mathbb{R}^n$.

2.) Jeder Punkt x von $|K|$ liegt im Innern genau eines Simplexes von K. Dieses Simplex wird Träger von x genannt.

3.) $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ trägt die Quotiententopologie bezüglich der Einbettungen $|\sigma| \hookrightarrow |K|$, $\sigma \leqslant |K|$.

4.) Ist K zusammenhängend, so ist $|K|$ wegzusammenhängend. $\rtimes$

» Übung. «

4.1.7 **Definition** *Seien K, L Simplizialkomplexe mit Eckenmenge K_0 bzw. L_0. Eine Abbildung,*

$$\varphi : K_0 \to L_0,$$

heißt simplizial, falls gilt:

Spannt $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq K_0$ einen Simplex in K auf, so spannt $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_k)\}$ einen Simplex in L auf. (φ muss nicht injektiv sein!).

Ist φ eine Bijektion und sind φ und φ^{-1} simplizial, so heißt φ Isomorphismus von K auf L. $\rtimes$

Bemerkung. Seien K, L Simplizialkomplexe und $\varphi : K \to L$ simpliziale Abbildung.

a) φ ist eindeutig durch die Bilder der Ecken von K bestimmt.

b) Sind $\sigma, \tau \in K$ und $\tau \leqslant \sigma$, dann ist $\varphi(\tau) \leqslant \varphi(\sigma)$ in L.

c) Für $\sigma \in K$ ist $\dim \sigma \geq \dim \varphi(\sigma)$.

Wir haben eine Kategorie der Simplizialkomplexe mit den simplizialen Abbildungen also Morphismen. ($\mathrm{id}_K : K \to K$ ist simplizial und die Komposition von simplizialen Abbildungen ist wieder eine simpliziale Abbildung.) ⊸

Bemerkungen. 1.) Sei $\varphi : K_0 \to L_0$ simplizial.

Dann lässt sich φ in natürlicher Weise zu einer Abbildung $\varphi : K \to L$ erweitern, durch: Ist $\Delta = \{v_0, \ldots, v_k\} \in K$, d.h. Δ ist Simplex in K, so sei $\varphi(\Delta) = \{\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)\} \in L$.

2.) Seien $|K|$ und $|L|$ die zugehörigen Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Sei $\varphi : K \to L$ simplizial und $x \in |K|$, dann gibt es einen Simplex $\{v_0, \ldots, v_k\}$ in K mit $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i$ wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$.

Definiere $s(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \varphi(v_i) \in |L|$. Dann wird $s : |K| \to |L|$ Abbildung.

Diese ist wohldefiniert, da jedes x nur im Innern von genau einem Simplex liegt. Klar ist auch, dass s stetig und linear auf den $|\Delta|$ mit $\Delta \in K$ ist.

In Zukunft wollen wir daher nicht mehr zwischen

$$s : |K| \to |L| \text{ und } \varphi : K \to L,$$

unterscheiden. ⊸

4.1.8 **Lemma** *Seien K, L Simplizialkomplexe und sei $\varphi : K \to L$ Isomorphismus. Dann ist die zugehörige simpliziale Abbildung $s : |K| \to |L|$ ein Homöomorphismus.* ⋊

» Übung. «

Bemerkung. Es kann durchaus passieren, dass $|K|$ und $|L|$ homöomorph aber nicht isomorph sind. ⊸

Bemerkungen. 1.) Es gibt viel mehr stetige Abbildung als simpliziale Abbildungen von $|K|$ nach $|L|$.

Ist m bzw. n die Anzahl der Ecken von K bzw. L, so gibt es höchstens m^n simpliziale Abbildungen von K nach L.

2.) Sei $\varphi : K \to L$ simplizial, $\sigma \in K$, $\tau = \varphi(\sigma) \in L$, dann bildet s, $|\sigma|$ auf $|\tau|$ ab.

Ist $\dim \sigma = \dim \tau$, so ist $s\big|_{|\sigma|} : |\sigma| \to |\tau|$ eine bijektive affine Abbildung.

Ist $\dim \sigma > \dim \tau$, so "drückt" s, $|\sigma|$ auf $|\tau|$ zusammen.

Den Fall $\dim \sigma < \dim \tau$ gibt es nicht (siehe 4.1.7). ⊸

§2 Die Kantengruppe eines Simplizialkomplexes

Sei X wegzusammenhängender, triangulierbarer Raum, etwa mit Triangulierung $h : |K| \to X$, K Simplizialkomplex. Da nach Voraussetzung h ein Homöomorphismus ist, induziert h einen Isomorphismus $h_* : \Pi(|K|) \to \Pi(X)$.

Die Fundamentalgruppe von $|K|$ ist aber besonder schön zu berechnen: Wir können annhehmen, dass alle Schleifen an eine Ecke von $|K|$ über Kanten (=1-Simplizes von K) laufen.

4.2.1 **Definition** *Sei K ein S-Komplex. Ein Kantenzug in K ist eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_k$ von Ecken in K ($k \in \mathbb{N}_0$), so dass aufeinanderfolgende Ecken v_i, v_{i+1} entweder gleich sind oder durch eine Kante in K verbunden sind.*

Ein geschlossener Kantenzug erfüllt zusätzlich $v_0 = v_k$ und wird mit $vv_1 \ldots v_{k-1}v$ bezeichnet.

Auf der Menge der Kantenzüge an der Ecke v_0 definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt:

Die von diesen Relationen erzeugte Äquivalenzrelation wird ebenfalls mit $\sim$ bezeichnet. Die Äquivalenzklasse bzgl. "$\sim$" von dem geschlossenen Kantenzug $vv_1 \ldots v_{k-1}v$ bezeichnen wir mit $[vv_1 \ldots v_{k-1}v]$.

Wir definieren eine Multiplikation auf der Menge der Äquivalenzklassen durch,

$$[v_0v_1 \ldots v_kv_0]\,[v_0w_1 \ldots w_mv_0] = [v_0v_1 \ldots v_kw_1 \ldots w_mv_0]\,.$$

Diese binäre Operation ist offensichtlich wohldefiniert und assoziativ.

Der Kantenzug $[v_0] = [v_0 v_0] = [v_0 v_1 v_0]$ *ist die Identität und* $[v_0 v_k v_{k-1} \dots v_1 v_0]$ *das Inverse* $[v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0]^{-1}$ *von* $[v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0]$.

Damit wird die Menge der Äquivalenzklassen von geschlossenen Kantenzügen an v_0 *eine Gruppe* $E(K, v_0)$*, die Kantengruppe an* $v_0 \in K$*.* ⋊

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung,

$$E(K, v_0) \to \Pi(|K|, v_0),\ [v_0 v_1 \dots v_k v_0] \to \langle \mathrm{Weg}(v_0 v_1 \dots v_k v_0) \rangle\,,$$

ein Isomorphismus ist.

4.2.2 **Definition** *Die erste baryzentrische Unterteilung* K^1 *von einem Simplizialkomplex* K *ist definiert wie folgt:*

Jedes einzelne q*-Simplex* $\sigma^q = \left\langle v_0, v_1, \dots, v_q \right\rangle, q \in \mathbb{N}_0$ *wird enzeln unterteilt, wobei die Ecken von* $(\sigma^q)^1 \in K^1$ *alle Schwerpunkte* $v_{\widehat{j_0 \dots v}_{j_i}}$ *der* i*-dimensionalen Seiten von* σ^q *sind.*

Hierbei ist der Schwerpunkt des q*-Simplex* σ *bezeichnet als* $\hat{\sigma}$*, der Punkt mit den baryzentrischen Koordianten* $\lambda_i = \frac{1}{1+q}$*,* $i = 0, \dots, q$*.*

D.h. ist $\sigma = \left\langle x_0, x_1, \dots, x_q \right\rangle$*, dann ist* $\hat{\sigma} = \frac{1}{1+q}(x_0 + x_1 + \dots + x_q)$*.* ⋊

Bsp

$$\frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2) = x_0 + \underbrace{\frac{1}{3}(x_1 - x_0)}_{:=a} + \underbrace{\frac{1}{3}(x_2 - x0)}_{:=b}\,.$$ ⋊

Satz *Die Schwerpunkte einer Kette*

$$\sigma^0 < \sigma^1 < \dots < \sigma^q,$$

von i*-Simplizes* σ^i *(*$i = 0, \dots, q$*) gegeben als*

$$\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^q,$$

sind in allgemeiner Position und spannen einen q*-Simplex auf.* ⋊

» Übung. «

Daher ist ein k-dimensionaler Simplex in der Unterteilung $(\sigma^q)^1$ von σ^q bestimmt durch die Ecken,

$$\{\widehat{v_{j_0}}, \widehat{v_{j_0}v_{j_1}}, v_{j_0}\widehat{v_{j_1}v_{j_2}}, \ldots, v_{j_0}\widehat{v_{j_1}\ldots v_{j_k}}\},$$

für jedes geordnete Tupel $(v_{j_0}, \ldots, v_{j_k})$ in $\{v_0, \ldots, v_q\}$.

Der q-Simplex σ^q wird dadurch in $(q+1)!$ viele q-Simplizes zerlegt.

Klar $|\sigma^q|$ ist die Vereinigung der q-Simplizes in $\left|(\sigma^q)^1\right|$,

$$\Rightarrow |\sigma^q| = \left|(\sigma^q)^1\right|$$
$$\Rightarrow |K| = \left|K^1\right| \text{ als Teilmenge des } \mathbb{R}^n.$$

Induktiv erhalten wir die m-te baryzentrische Unterteilung K^m von K.

4.2.3 **Definition** *Seien K und L Simplizialkomplexe, $f : |K| \to |L|$ eine stetige Abbildung. Eine simplizale Approximation von f ist eine simpliziale Abbildung*

$$s : K \to L,$$

für die gilt, dass $s(x)$ im Träger von $f(x) \in L$ liegt für alle $x \in |K|$. ⋊

Bsp Seien $K = L = [0,1]$,

$$K = \left\{0, \frac{1}{3}, 1, \left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle\right\},$$
$$L = \left\{0, \frac{2}{3}, 1, \left\langle 0, \frac{2}{3}\right\rangle, \left\langle \frac{2}{3}, 1\right\rangle\right\}.$$

$f : |K| \to |L|,\ x \mapsto x^2$ ist stetig.

Sei s simpliziale Approximation von f, dann ist

$$f(0) = 0 = s(0),$$
$$f(1) = 1 = s(1),$$

und daher $s\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ (und $s\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$) (Wäre z.B. $s\left(\frac{1}{3}\right)=0$, so wäre $s\left(\left\langle\frac{1}{3},1\right\rangle\right)=\langle 0,1\rangle\notin L$)

Nun ist aber $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\in\left\langle 0,\frac{2}{3}\right\rangle\ni s\left(\frac{1}{2}\right)$, da $s\left(\frac{1}{2}\right)\in s\left(\left\langle\frac{1}{3},1\right\rangle\right)\in\left\langle\frac{2}{3},1\right\rangle$ sein muss.

Also kann s nicht simplizial sein und daher finden wir keine simpliziale Approximation von f.

Ähnlich: Keine simpliziale Abbildung $s: K^1\to L$ approximiert f simplizial.

Aber wir finden eine simpliziale Abbildung $s: K^2\to L$:

$$\begin{aligned}0,\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}&\mapsto 0,\\ \frac{2}{3},\frac{5}{6}&\mapsto\frac{2}{3},\\ 1&\mapsto 1,\end{aligned}$$

also ist $\sigma:|K^2|\to|L|$ gegeben durch,

$$\begin{aligned}&\left[0,\frac{1}{2}\right]\to 0,\\ &\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\to\left[0,\frac{2}{3}\right],\\ &\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]\to\frac{2}{3},\\ &\left[\frac{5}{6},1\right]\to\left[\frac{2}{3},1\right].\end{aligned}$$

(stetig durch verkleben)

s ist simpliziale Approximation von f, da s so gewählt wird, dass $s\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$ ist.
⋊

Problem *Finden Sie eine zweite von σ verschiedene simpliziale Approximation $t: K^2\to L$ von f.* ⋊

Wir können f also nicht auf dem ursprünglichen Simplex simplizial approximieren aber auf K^2.

Ist insbesondere $x \in K$ Ecke $f(x)$ im Innern von $\sigma^q \in L$, dann ist $s(x)$ auch Ecke von σ^q. Ist $f(x) = w$ Ecke von L, dann folgt $s(x) = f(x) = w$.

Die Funktionswerte von f und s durchlaufen also immer dieselben Simplizes.

4.2.4 **Simplizialer Approximationssatz** *Seien K, L Simplizialkomplexe, $f : |K| \to |L|$ stetig, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f : |K^m| \to |L|$ eine simpliziale Approximation $s : K^m \to L$ besitzt.* $\rtimes$

» Siehe Armstrong. «

4.2.5 **Satz** *Seien K, L Simplizialkomplexe, $f : |K| \to |L|$ stetig und $s : K \to L$ simpliziale Approximation von f, dann sind s und f homotop.* $\rtimes$

» Es gilt $|L| \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie $f, s : |K| \to \mathbb{R}^n$ wenn man den Wertebereich ausdehnt.

Sei $F : |K| \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto (1-t)s(x) + tf(x)$ die Streckenhomotopie von s nach f als Abbildungen von $|K|$ in den konvexen Raum $\mathbb{R}^n$. Für $x \in K$ sei $\Delta \in L$ das Trägersimplex von $f(x)$. Dann ist $s(x) \in \Delta$, da s simpliziale Approximation von f ist und daher ist $(1-t)s(x) + tf(x) \in \Delta$ für alle $t \in I$, da Δ konvex ist.

Also ist $F : |K| \times I \to |L|$ in der Tat Homotopie von s nach f als Abbildungen von $|K|$ nach $|L|$. «

4.2.6 **Satz** *Sei K ein Simplizialkomplex, $v \in K_0$ (=Eckenmenge). Dann ist die Kantengruppe $E(K, v) \cong \Pi(K, v)$.* $\rtimes$

» Die Abbildung $\varphi : E(K, v) \to \Pi(K, v)$, die jeder Äquivalenzklasse eines geschlossenen Kantenzuges an v eine Homotopieklasse des zugrundeliegenden (stückweise linearen) geschlossenen Weges zuordnet, ist offensichtlich wohldefiniert, da äquivalente Kantenzüge auch homotop rel. $\{0, 1\}$ sind.

Klar ist auch, dass φ Gruppenhomomorphismus ist, denn die Multiplikation zweier Kantenzüge ist die Hintereinanderausführung der zugrundeliegenden Wege.

1.) φ ist surjektiv:

Sei $\alpha : I \to |K|$ Schleife an v. z.Z. α ist homotop rel. $\{0,1\}$ zu einem geschlossen Kantenzug an v.

Sei L das 1-Simplex $\langle x_0, x_1 \rangle$, so ist $|L| = I$. Nach dem simplizialen Approximationssatz 4.2.4 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine simpliziale Abbildung $s : |L^m| \to K$, die α simplizial approximiert. Nach dem Beweis von 4.2.5 sind s und f homotop mit der Streckenhomotopie,

$$F(x,t) = (1-t)s(x) + tf(x), \quad \text{für } t \in I.$$

Also gilt für alle $t \in I$,

$$F(1,t) = s(1) = \alpha(1) = v,$$
$$F(0,t) = s(0) = \alpha(0) = v,$$

d.h. die Homotopie ist rel. $\{0,1\}$ und $\langle s \rangle = \langle \alpha \rangle$. Also ist φ surjektiv.

2.) φ ist injektiv:

Dazu reicht es zu zeigen, dass $\ker \varphi = [v]$ ist. D.h. ein geschlossener Kantenzug $vv_1 \dots v_{k-1}v$, der als Weg in $|K|$ nullhomotop ist, muss äquivalent zu $[v]$ sein.

Sei $\alpha : I \to |K|$ der von $vv_1 \dots v_{k-1}v$ induzierte Weg. Da α nullhomotop ist, gibt es eine stetige Abbildung

$$F : I \times I \to |K|,$$

mit

$$F(s,0) = \alpha(s),$$
$$F(s,1) = v,$$

für alle $s \in I$. Außerdem ist

$$F(0,t) = F(1,t) = v,$$

für alle $t \in I$, da alle Kurven $\alpha_t : I \to K,\ s \mapsto F(s,t)$ Schleifen an v sind. (F ist Homotopie rel. $\{0,1\}$)

Wir machen $I \times I$ zum Polyeder eines Simplizialkomplexes L mit Ecken,

$$
\begin{aligned}
&a = (0,0),\ b = (0,1),\ \ c = (1,1), d = (1,0),\\
&a_i = \left(\frac{i}{k}, 0\right),\ k \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

und 2-Simplizes,

$$\langle b, a_{i-1}, a_i\rangle, \langle b, c, d\rangle .$$

Dann ist L Simplizialkomplex bestehend aus Dreiecken. wird durch $\alpha = \alpha_0$ Weg α in $|K|$ an $v \in |K|$, wird durch Homotopie F konstant auf $v \in |K|$ abgebildet. zusätzliche Ecken bei baryzentrischer Unterteilung der Kantenzüge $abcd$ bzw. $\alpha a_1 a_2 \dots a_{k-1} d$ auf den involvierten Kanten.

In L sind die Kantenzüge $E_{1,0} := a a_1 \dots a_{k-1} d$ und $E_{2,0} := abcd$ offensichtlich äquivalent.

In der baryzentrischen Unterteilung L^m, $m \in \mathbb{N}$ von L erhalten wir zwei Kantenzüge $E_{1,m}$ und $E_{2,m}$.

Induktion über m ergibt, dass $E_{1,m}$ und $E_{2,m}$ äquivalent in $|L^m|$ sind. Mit 4.2.4 folgt, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine simpliziale Approximation $S : L^m \to K$ zu $F : |L^m| \to |K|$.

Leichte Übung: Simpliziale Abbildungen erhalten die Relationen **??**, **??** und **??** in 4.2.1 und daher erhalten sie auch die Äquivalenzrelation $\sim$ auf geschlossenen Kantenzügen.

Also: Die Bilder $S(E_1), S(E_2)$ von E_1 und E_2 unter S sind äquivalent in K,

$$
\begin{aligned}
&S(E_2) = \text{ die Ecke } v(3 \cdot 2^m + 1)\text{-mal},\\
&[S(E_2)] = [v \dots v] = [v] .
\end{aligned}
$$

Andererseits mit $F(a_i) = v_i \in K$ $1 \leq i \leq k-1$ ist S (neue Ecke zwischen a_i und a_{i+1}) $= v_i \in |K|$ oder $= v_{i+1}$, da S eine Abbildung F simplizial approximiert.

Also ist $S(E_1)$ ein Kantenzug äquivalent zu $vv_1 \dots v_{k-1}v$ und daher ist

$$[v] = [vv_1 \dots v_{k-1}v].$$

Also ist φ injektiv.

$\Rightarrow$ φ ist Isomorphismus. «

Wollen: Erzeugende und Relationen für $E(K, v)$ direkt am Simplizialkomplex K ablesen.

4.2.7 **Definition** *Sei K ein Simplizialkomplex.*

1.) Ein Unterkomplex L von K ($L \leqslant K$) ist eine Teilmenge von K, so dass L ein Simplizialkomplex ist und jeder Simplex von L auch Simplex von K ist.

L heißt dann voll, wenn jeder Simplex von K dessen sämtliche Ecken in L liegen, schon in L liegt.

2.) Ein eindimensionaler Simplizialkomplex heißt Graph (genauer Graph ohne Schleifen und Doppelkanten)

3.) Ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender Graph heißt Baum. (Graph ohne geschlossene Kantenzüge) ⋊

4.2.8 **Lemma** *Jeder zusammenhängende Simplizialkomplex K enthält einen maximalen Baum als Unterkomplex. Solch ein Baum enthält alle Ecken von K.* ⋊

» Klar ist, dass jeder zusammenhängende Simplizialkomplex einen maximalen Baum als Unterkomplex enthält. (K hat nur endlich viele Elemente)

Sei T maximaler Baum $\leqslant K$, v Ecke in K mit $v \notin T$, u Ecke in T. Sei $uv_1 \dots v_k v$ Kantenzug von u nach v. Ein solcher existiert, da K zusammenhängend ist. Sei v_i die letzte Ecke in diesem Kantenzug, die noch in T liegt. Sei $T' = T \cup \{v_{i+1}, \langle v_i, v_{i+1} \rangle\}$ (für $i = k$ sei $v_{i+1} = v$) T ist starker Deformationsretrakt von

T' also ist T' einfach zusammenhängend und daher ist $T' \leqslant K$ Baum, aber T war bereits maximal, ein Widerspruch ↯

Also liegen alle Ecken von K in T.

4.2.9 **Definition** *Sei K zusammenhängender S-Komplex, T ein maximaler Baum in K und $K_0 = \{v = v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ die Menge Menge der Ecken in von K.*

Sei $G(K,T)$ die Gruppe, die von Elementen g_{ij} mit $i, j \in \{0, \ldots, s\}$ erzeugt wird, wobei $\langle v_i, v_j \rangle \in K$ ($K \setminus T$) und die folgenden Relationen erfüllt sind:

(i) $g_{ij} = 1$, falls $\langle v_i, v_j \rangle \in T$. (entfällt)

(ii) $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$, falls $\langle v_i, v_j, v_k \rangle \in K$.

Aus (ii) folgt, $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$, da $g_{ii} = 1$. Somit gilt,

$$G(K,T) = \left\langle g_{ij} \;:\; 0 \leq i < j \leq s, \left\langle v_i, v_j \right\rangle \in K \setminus T,\; g_{ij} g_{jk} = g_{ik},\; \text{für } \left\langle v_i, v_j, v_k \right\rangle \in K \right\rangle$$

Im Übrigen berühren die Relationen keine höherdimensionalen Simplizes als Dreiecke. ⋊

4.2.10 **Satz** *Sei K zusammenhängender S-Komplex und T maximaler Baum in K. Dann ist*

$$G(K,T) \cong E(K,v),$$

wobei v eine beliebige Ecke von K ist. ⋊

» Wir definieren,

$$\phi : G(K,T) \to E(K,v),$$

auf den Erzeugenden g_{ij} von $G(K,T)$ durch,

$$\phi(g_{ij}) := \left[E_i v_i v_j E_j^{-1} \right],$$

mit E_i ist ein fest gewählter Kantenzug in T von $v = v_0$ nach v_i.

Ist $\langle v_i, v_j \rangle \in T$, so ist $E_i v_i v_j E_j^{-1}$ Schleife in T und daher äquivalent zu $v = E_0$, d.h. in $E(K, v)$ ist $\left[E_i v_i v_j E_j^{-1}\right]$ das Einselement.

Spannen v_i, v_j, v_k ein 2-Simplex in K auf, so ist

$$\begin{aligned}\phi(g_{ij})\phi(g_{jk}) &= \left[E_i v_i v_j E_j^{-1}\right]\left[E_j v_j v_k E_k^{-1}\right] = \left[E_j v_i v_j E_j^{-1} E_j v_j v_k E_k^{-1}\right] \\ &= \left[E_j v_i v_j v_j v_k E_k^{-1}\right] = \left[E_j v_i v_k E_k^{-1}\right] = \phi(g_{ij} \cdots g_{jk}) = \phi(g_{ik}).\end{aligned}$$

Also ist ϕ ein Homomorphismus.

Analog definieren wir,

$$\psi : E(K, v) \to G(K, T),$$

durch

$$\psi([v v_k v_l v_m \cdots v_n v]) = g_{0k} g_{kl} g_{lm} \cdots g_{n0}.$$

Eine leichte Übung zeigt, dass auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wir haben daher,

$$\psi \circ \phi(g_{ij}) = \psi(\left[E_i v_i v_j E_j^{-1}\right]) = g_{ij},$$

da die Paare von Ecken in E_i und E_j^{-1} Kanten in T aufspannen und daher die entsprechenden $g_{uv} = 1$ sind.

Ist $v v_k v_l v_m \cdots v_n v$ ein geschlossener Kantenzug in K an v, so ist

$$[v v_k v_l \cdots v_n v] = \left[E_0 v v_k E_k^{-1}\right]\left[E_k v_k v_l E_l^{-1}\right] \cdots \left[E_n v_n v E_0^{-1}\right]. \tag{*}$$

Nun ist,

$$\phi \circ \psi(\left[E_i v_i v_j E_j^{-1}\right]) = \phi(g_{ij}) = \left[E_i v_i v_j E_j^{-1}\right],$$

und daraus folgt mit (*), dass

$$\phi \circ \psi([v v_k v_l \cdots v_n v]) = [v v_k v_l \cdots v_n v].$$

Also sind ϕ und ψ zueinander inverse Isomorphismen von $E(K, v)$ und $G(K, T)$.
«

Beobachtung. Sei K ein S-Komplex. Die Teilmenge der Ecken (0-Simplizes), Kanten (1-Simplizes) und Dreiecke (2-Simplizes) bilden einen Unterkomplex K_2,

$$K_2 = \{q\text{-Simplizes in } K : q \leq 2\},$$

das sogenannte 2-Skelett von K. Alle Konstruktionen in diesem Abschnitt (also $G(K,T)$ und $E(K,\nu)$) involvieren nur q-Simplizes mit $q \leq 2$.

Um diese Objekte für K zu bestimmen, genügt es also, sie für K_2 zu bestimmen.

$$G(K_2,T) = G(K,T) = E(K,\nu) = E(K_2,\nu) \cong \Pi(K,\nu) = \Pi(K_2,\nu). \quad ⊸$$

4.2.11 **Korollar** *Die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden, triangulierbaren Raums ist endlich präsentierbar, d.h. kann durch eine endliche Menge von Erzeugern und eine endliche Menge von Relationen beschrieben werden.* ⋊

Unser Ziel, die kompakten zusammenhängenden randlosen Flächen zu klassifizieren haben wir aus Zeitgründen nicht erreicht. :(