Funktionalanalysis - Mitschrieb

bei PD. Dr. P. H. Lesky

Jan-Cornelius Molnar, Version: 21. Februar 2010 14:45

In der Funktionalanalysisvorlesung konzentrieren wir uns auf bekannte Ergebnisse der Analysis und der linearen Algebra und versuchen diese auf unendlichdimensionale Räume zu verallgemeinern bzw. zu erweitern. Dazu gehören z.B. die Eigenwerttheorie, Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen, Stetigkeitsbegriffe, uvm. Anwendung findet die Funktionalanalysis beispielsweise bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen, der Spektraltheorie und in anderen angewandten Bereichen der Mathematik wie z.B. der Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastischen Analysis, der mathematischen Physik oder der Numerik.

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Räume

1-A Grundlagen

Im Folgenden sollen die grundlegenden Begriffe der normierten Räume wiederholt werden.

1.1 **Definition** *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine abelsche Gruppe $(L, +)$ heißt linearer Raum oder Vektorraum, falls eine skalare Multiplikation*

$$\cdot : \mathbb{K} \times L \to L$$

definiert ist, so dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \\
(\alpha + \beta) \cdot x &= \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \\
\alpha \cdot (\beta \cdot x) &= (\alpha\beta) \cdot x.
\end{aligned}$$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt L, reeller linearer Raum. Lineare Unabhängigkeit und Dimension sind wie üblich definiert. ⋊

» Aus $\alpha \cdot x = (\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x + 0 \cdot x$ folgt unmittelbar, $0 \cdot x = 0$. «

1.2 **Bsp** Beispiele für lineare Räume sind,

a.) $L = \mathbb{C}^n$.

b.) $L = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (x_n) \text{ komplexe Folge}\}$. Die Addition ist hier definiert als $(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$, die skalare Multiplikation als $\alpha \cdot (x_n) := (\alpha x_n)$.

c.) $L = C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}$. ■

Nun wollen wir die Begriffe Konvergenz und Abstand erklären.

1.3 **Definition** *Eine Abbildung* $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$ *heißt Norm (auf L), falls sie für* $x \in L$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$ *folgende Eigenschaften erfüllt.*

(N1) $\|x\| \geq 0,$ *Positivität,*

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$ *Definitheit,*

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|,$ *Homogentität,*

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$ *Dreiecksungleichung.*

$(L, \|\cdot\|)$ *heißt normierter Raum, falls (N1)-(N4) erfüllt sind. Gilt nur (N2) nicht, so heißt* $\|\cdot\|$ *Halbnorm und* $(L, \|\cdot\|)$ *halbnormierter Raum.* ⋊

Die geometrische Interpretation von $\|x\|$ ist die "Länge" von x, die von $\|x - y\|$ ist der "Abstand" von x und y.

Im Folgenden sei E stets ein normierter Raum.

1.4 **Definition** *Sei* (x_n) *eine Folge in* E.

(a) (x_n) *heißt konvergent gegen* $x \in E$*, falls*

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall \ n > N_\varepsilon : \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

(b) (x_n) *heißt Cauchyfolge, falls*

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall \ n, m > N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

(c) E *heißt vollständig oder Banachraum, falls gilt,*

$$(x_n) \text{ Cauchy} \Rightarrow (x_n) \text{ konvergent.}$$ ⋊

Übung. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist. ⊸

1.5 **Bsp** a.) $E = \mathbb{C}^n$ lässt sich mit der p-Norm versehen,

$$\|x\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}, & p \leq 1 < \infty, \\ \max\limits_{j=1,\ldots,n} \left|x_j\right|, & p = \infty. \end{cases}$$

Wichtige Spezialfälle sind, die euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)^{1/2},$$

die Summennorm

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|,$$

und die Supremumsnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} \left|x_j\right|.$$

Einen Nachweis der Normeigenschaften findet man in jedem Standard Analysis Werk. Für $p < 1$ lässt sich so keine p-Norm definieren, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt werden kann. Für $1 \leq p < \infty$ ist $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

b.) Für eine komplexe Folge sei

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p\right)^{1/p},$$

$$\|(x_n)\|_\infty := \max_{j \in \mathbb{N}} \left|x_j\right|.$$

Der Raum, auf dem sich diese Norm definieren lässt, heißt

$$l^p := \left\{(x_n) \text{ komplexe Folge} : \|(x_n)\|_p < \infty\right\}.$$

Die Normeigenschaften (N1)-(N3) sind klar, (N4) folgt mittels der Minkowski Ungleichung. Jeder l^p ist ein Banachraum.

c.) $E = C([0,1] \to \mathbb{C})$, der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, lässt sich ebenfalls mit einer p-Norm versehen,

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Da $[0,1]$ kompakt und $f \in E$ stetig ist, ist die p-Norm stets endlich. Die 2-Norm bildet einen wichtigen Spezialfall in der Theorie der Hilberträume.

Eine leichte Übung zeigt, dass $(E, \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum ist, während $(E, \|\cdot\|_p)$ für $1 \le p < \infty$ kein Banachraum ist.

d.) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest, $E := C^k([0,1] \to \mathbb{C})$ und

$$\|f\|^{\sim}_{j,p} := \left\| \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j} \right\|_p, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Offensichtlich ist $\|f\|^{\sim}_{j,p}$ lediglich eine Halbnorm. Mittels der Konstruktion

$$\|f\|_{k,p} := \sum_{j=1}^{k} \|f\|^{\sim}_{j,p} + \|f\|_p$$

erhalten wir eine Norm auf E. ■

1.6 **Lemma** *In $(E, \|\cdot\|)$ gelten die Aussagen:*

1) Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

2) Umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x - y\|, \qquad x, y \in E.$$

3) Seien (x_n), (y_n) Folgen in E und $\alpha \in \mathbb{K}$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, so gilt ebenfalls

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

D.h. Addition und skalare Multiplikation sind stetig bezüglich der Norm.

4) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

5) Sei (x_n) *Cauchyfolge, so ist* $(\|x_n\|)$ *konvergent.* ⋊

» 1) Angenommen $x_n \to x$ und $x_n \to y$, so gilt

$$\|x - y\| = \|x - x_n - (y - x_n)\| \le \|x - x_n\| + \|y - x_n\| \to 0.$$

Da die linke Seite unabhängig von n ist, gilt $\|x - y\| = 0$, d.h. $x = y$.

2) Klar.

3) Betrachte $\|(x + y) - (x_n + y_n)\| \le \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0$.

4) $|\|x_n\| - \|x\|| \overset{2)}{\le} \|x_n - x\| \to 0$.

5) $|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für n, m hinreichend groß. Also ist $(\|x_n\|)$ Cauchy und daher konvergent. «

1.7 **Lemma** *Für* $(E, \|\cdot\|)$ *sind äquivalent,*

(i) E *ist vollständig,*

(ii) $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j$ *konvergent.* ⋊

» (i)⇒(ii) : Sei $y_k := \sum_{n=1}^{k} x_n$ und $k > l$, dann ist

$$\|y_k - y_l\| = \left\| \sum_{n=l}^{k} x_n \right\| \le \sum_{n=l}^{k} \|x_n\| < \varepsilon$$

für k, l hinreichend groß, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert. Also ist (y_k) Cauchy und aufgrund von (i) konvergent.

(ii)⇒(i): Sei (y_k) Cauchy. Wähle eine Teilfolge $(y_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned}
\|y_{k_1} - y_k\| &< \frac{1}{2}, && \text{für } k > k_1,\\
\|y_{k_2} - y_k\| &< \frac{1}{4}, && \text{für } k > k_2, k_2 > k_1,\\
&\vdots\\
\|y_{k_l} - y_k\| &< \frac{1}{2^l}, && \text{für } k > k_l, k_l > k_{l-1}.
\end{aligned}$$

Setze nun $x_l := y_{k_{l+1}} - y_{k_l}$, dann ist

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|x_l\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \infty,$$

also existiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \in E$. Weiterhin gilt

$$\sum_{l=1}^{n} x_l = y_{k_{n+1}} - y_{k_1},$$

also konvergiert auch $y_{k_{n+1}} = \sum\limits_{l=1}^{n} x_k + y_{k_1}$ in E. (y_k) ist Cauchy und besitzt eine konvergente Teilfolge, ist also selbst konvergent. «

1-B Vergleich von Normen

In diesem kurzen Abschnitt soll alles Notwendige erarbeitet werden, um mit mehreren Normen auf demselben Raum zu arbeiten, sowie Kriterien, um Ergebnisse bezüglich der einen Norm auf die andere zu übertragen.

1.8 **Definition** *Seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^\sim$ zwei Normen auf E.*

(a) *$\|\cdot\|$ heißt feiner als $\|\cdot\|^\sim$, falls*

$$\exists\ c > 0\ \forall\ x \in E : \|x\|^\sim \leq c\,\|x\|\,.$$

(b) *$\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\sim$ heißen äquivalentNorm!Äquivalenz, wenn $\|\cdot\|$ feiner als $\|\cdot\|^\sim$ und $\|\cdot\|^\sim$ feiner als $\|\cdot\|$, d.h.*

$$\exists\ c_1, c_2 > 0\ \forall\ x \in E : c_1\,\|x\| \leq \|x\|^\sim \leq c_2\,\|x\|\,.$$ ⋊

Bemerkung. Die Äquivalenz von Normen bildet eine Äquivalenzrelation. ⊸

1.9 **Satz** *1) Ist $\|\cdot\|$ feiner als $\|\cdot\|^\sim$ und (x_n) konvergent (Cauchy) bezüglich $\|\cdot\|$, dann auch bezüglich $\|\cdot\|^\sim$.*

2) Sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\sim$ äquivalent, so ist (x_n) genau dann konvergent (Cauchy) bezüglich $\|\cdot\|$, falls (x_n) konvergent (Cauchy) bezüglich $\|\cdot\|^\sim$. ⋊

» Sei $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|$, dann gilt

$$\|x_n - x\|^{\sim} \leq c\,\|x_n - x\| \to 0. \quad «$$

1.10 **Bsp** Sei $E := C([0,1] \to \mathbb{C})$, sowie

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

$$f_n = x^n.$$

a.) $\|\cdot\|_\infty$ ist feiner als $\|\cdot\|_1$, denn

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty.$$

b.) $\|\cdot\|_1$ ist nicht feiner als $\|\cdot\|_\infty$. Zeige dazu,

$$\forall\, c > 0\ \exists\, f \in E : \|f\|_\infty > c\,\|f\|_1.$$

Betrachte dazu die Funktionenfolge (f_n)

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

c.) (f_n) konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_1$ aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

$f(x) = 0$ ist die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_1$, denn

$$\|f_n - f\| = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Zeige nun, dass f_n bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ nicht Cauchy ist, d.h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n, m > N : \|f_n - f_m\|_\infty > \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Zu beliebigem $n > N$ wähle $x_0 \in [0,1)$ mit $f_n(x_0) = x_0^n > \frac{1}{2}$. Wähle $m > n$ mit $f_m(x_0) = x_0^m < \frac{1}{4}$, dann gilt $\|f_n - f_m\| > \frac{1}{4}$. ■

1.11 **Satz** *Ist L endlichdimensional, dann sind alle Normen auf L äquivalent.* ⋊

» 1) Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von L. Setze

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j b_j \right\|_1 := \sum \left| x_j \right|$$

als Vergleichsnorm.

2) Sei $\|\cdot\|$ Norm auf L. Dann ist $\|\cdot\|_1$ feiner

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j b_j \right\| \le \sum_{j=1}^n \left| x_j \right| \left\| b_j \right\| \le \underbrace{\max_j \left\| b_j \right\|}_{>0} \cdot \sum_{j=1}^n \left| x_j \right| .$$

3) Sei $\|\cdot\|$ Norm auf L. Dann ist $\|\cdot\|$ feiner als $\|\cdot\|_1$. Die Norm $\|\cdot\|$ ist als Abbildung

$$f : (L, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j b_j \right\|$$

stetig, denn für $x, y \in L$ gilt,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(y) \right| &= \left| \left\| \sum_{j=1}^n x_j b_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^n y_j b_j \right\| \right| \le \left\| \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) b_j \right\| \\ &\le \sum_{j=1}^n \left| x_j - y_j \right| \left\| b_j \right\| \le \max_j \left\| b_j \right\| \cdot \sum_{j=1}^n \left| x_j - y_j \right| \\ &= c \left\| x - y \right\|_1 \end{aligned}$$

Nun ist die Menge $S = \{x \in L : \|x\|_1 = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen bezüglich der $\|\cdot\|_1$ Norm, also kompakt. f nimmt daher auf S sein Minimum an, d.h.

$$\exists\, \xi \in S \;\forall\, x \in S : f(x) \ge f(\xi).$$

Da $\xi \in S$ gilt $\xi \ne 0$ und damit folgt für $0 \ne x \in L$,

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j b_j \right\| = \left(\sum_{l=1}^n |x_l| \right) \left\| \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\sum_{l=1}^n |x_l|} b_j \right\| \ge \|x\|_1 \underbrace{f(\xi)}_{>0} .$$

4) Seien nun $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\sim$ zwei Normen auf L, dann gilt

$$\exists\, c_1, c_2, c_3, c_4 > 0 : \|x\| \leq c_1 \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|^\sim \leq c_3 \|x\|_1 \leq c_4 \|x\| . \quad «$$

1-C Topologische Grundbegriffe

Es folgen einige topologische Begriffe für normierte Räume. Nicht alle Aussagen lassen sich auf einen metrischen bzw. allgemeinen topologischen Raum übertragen.

1.12 **Definition** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \subseteq E$.*

(a) $K_r(x) := \{y \in E : \|x - y\| < r\}$ *offene Kugel mit Radius $r\,(> 0)$.*

(b) *$x \in E$ heißt innerer Punkt von X, falls*

$$\exists\, r > 0 : K_r(x) \subseteq X.$$

(c) *X heißt offen, falls*

$$\forall\, x \in X : x \text{ ist innerer Punkt von } X.$$

(d) *$x \in E$ heißt Häufungspunkt*

(e) *von X, falls*

$$\forall\, r > 0 : K_r(x) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

oder äquivalent: Es existiert eine Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ und $x_n \neq x$.

(f) *X heißt abgeschlossen, wenn X alle seine Häufungspunkte enthält.*

(g) *$\overline{X} := X \cup \{\text{Häufungspunkte von } X\}$ heißt Abschluss von X.*
$\overline{X}$ ist abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Menge, die X enthält.

(h) *$Y \subseteq X \subseteq E$ heißt dicht in X, falls $\overline{Y} \supseteq X$.*

(i) *X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(\mathcal{O}_\alpha)$, (d.h. ein System offener Mengen O_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ Indexmenge, mit $X \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$) eine endliche Teilmenge $\{O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ besitzt, die bereits X überdeckt.*
Oder hier äquivalent: Wenn jede Folge (x_n) in X eine in X konvergente Teilfolge enthält.

(j) *Seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Eine Abbildung*

$$f : E_1 \to E_2,$$

heißt stetig in $x_0 \in E$, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in E_1 : \|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - f(x_0)\right\|_2 < \varepsilon.$$

Oder äquivalent: Wenn für jede Folge (x_n) in E_1 gilt

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

f heißt stetig, wenn f in jedem $x \in E_1$ stetig ist. ⋊

1-D Neue Räume aus alten

1.13 **Direkte Summe** *Seien $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume, so ist*

$$E_1 \oplus E_2 := \left\{(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\right\},$$
$$\left\|(x, y)\right\| := \|x\|_1 + \|x\|_2$$

ein normierter Raum. Sind E_1, E_2 Banachräume, so ist auch $E_1 \oplus E_2$ Banachraum. ⋊

1.14 **Quotientenraum** *Sei F ein linearer Unterraum von E. Setze $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.*

$$E/F := \{[x] : x \in E\}$$

wird zum Quotientenraum mit Addition $[x] + [y] := [x + y]$ und skalarer Multiplikation $\alpha[x] = [\alpha x]$. ⋊

1.15 **Satz** *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum,* F *abgeschlossener linearer Unterraum von* E *und*

$$\|[x]\|_0 := \inf\{\|x+z\| : z \in F\} = \inf\{\|y\| : y \in [x]\}.$$

Dann gelten

1) $\|\cdot\|_0$ *ist Norm auf* E/F*.*

2) Ist E *Banachraum, so ist auch* E/F *Banachraum.* ⋊

» 1) $\|[x]\|_0$ ist unabhängig vom gewählten Vertreter von x, denn

$$\|[x]\|_0 := \inf\{\|y\| : y \in [x]\}.$$

$\|[x]\|_0$ ist Norm. (N1) ist offensichtlich erfüllt. (N2): Sei $\|[x]\|_0 = 0$, dann existiert eine Folge (z_n) in F mit $\|x + z_n\| \to 0$, d.h. $z_n \to -x \in F$ also ist $[x] = [0]$. (N3): Zunächst ist $\|0 \cdot [x]\|_0 = \|[0 \cdot x]\|_0 = 0$. Für $\alpha \neq 0$ gilt weiterhin,

$$\begin{aligned}\|\alpha[x]\|_0 = \|[\alpha x]\|_0 &= \inf\{\|\alpha x + z\| : z \in F\}\\ &= |\alpha| \left\{\left\|x + \frac{1}{\alpha} z\right\| : z \in F\right\} = |\alpha|\, \|[x]\|_0 .\end{aligned}$$

(N4): Sei $\varepsilon > 0$, dann existieren $z_1, z_2 \in F$ mit

$$\|x + z_1\| \leq \|[x]\|_0 + \varepsilon, \quad \|y + z_2\| \leq \|[y]\|_0 + \varepsilon.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|[x]+[y]\|_0 = \|[x+y]\|_0 &= \inf\{\|x+y+z\| : z \in F\}\\ &\leq \|x + z_1 + y + z_2\| \leq \|x+z_1\| + \|y+z_2\|\\ &\leq \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0 + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt die Dreiecksungleichung.

2) Sei $[x_n]$ Folge in E/F mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|[x_n]\|_0 < \infty$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle jeweils einen Vertreter $x_n \in E$, so dass

$$\begin{aligned} &\|x_n\| \le \|[x_n]_n\|_0 + \frac{1}{2^n}, \\ \Rightarrow &\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty. \end{aligned}$$

E ist Banachraum, daher ist nach Lemma 1.7 $y = \sum\limits_{j=1}^{n} x_n$ konvergent. Sei nun $N \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} [x_n] - [y] \right\|_0 = \left\| \left[\sum_{j=1}^{N} x_n - y \right] \right\|_0 \le \left\| \sum_{j=1}^{N} x_n - y \right\| \to 0, \quad N \to \infty,$$

d.h. $\sum\limits_{j=1}^{N} [x_n] = [y]$ bezüglich $\|\cdot\|_0$. Ebenfalls mit Lemma 1.7 folgt, E/F ist vollständig. «

1.16 **Vervollständigung** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann existiert ein Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$, so dass E mit einem dichten linearen Unterraum identifiziert werden kann. D.h. es existiert eine lineare, normerhaltende Abbildung,*

$$j : E \to F,$$

mit $j(E)$ ist dicht in F. j ist dann insbesondere injektiv. ⋊

» 1) Betrachte dazu den Raum der Cauchyfolgen auf E,

$$\hat{F} := \left\{ (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \;:\; (x_n) \text{ ist Cauchy} \right\}.$$

Dieser Raum ist linear und lässt sich mit der Halbnorm

$$\|(x_n)\|^{\wedge} := \lim_{n \to \infty} \|x_n\|_E$$

versehen, denn für jede Cauchyfolge konvergiert die Folge $(\|x_n\|)$.

2) Sei

$$\hat{N} := \left\{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \,:\, (x_n) \text{ Nullfolge}\right\}$$

der Raum der Nullfolgen. Setze $F = \hat{F}/\hat{N}$ und

$$\begin{aligned}\|[x_n]\|_F &:= \inf\left\{\|(x_n) - (z_n)\|^\wedge \,:\, (z_n) \in \hat{N}\right\} \\ &= \inf\left\{\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_E \,:\, (x_n) - (y_n) \in \hat{N}\right\}.\end{aligned}$$

Eine äquivalente Formulierung erhalten wir, wenn wir $\hat{x} = (x_n)$ setzen,

$$\|[\hat{x}]\|_F := \inf\left\{\|\hat{y}\|^\wedge \,:\, \hat{x} - \hat{y} \in \hat{N}\right\} = \|\hat{x}\|^\wedge.$$

$\|\cdot\|_F$ *ist Norm.* (N1),(N3),(N4) sind klar, da $\|\cdot\|^\wedge$ Halbnorm. (N2): Des Weiteren gilt $\|[\hat{x}]\|_F = 0 \Leftrightarrow \|\hat{x}\|^\wedge = 0$, d.h. $\hat{x} \in \hat{N}$ und daher $[\hat{x}] = [0]$.

3) Sei $j : E \to F, x \mapsto (x, x, x, \ldots)$. j ist offensichtlich linear und

$$\|j(x)\|_F = \lim_{n\to\infty} \|x\|_E = \|x\|_E.$$

4) $j(E)$ *ist dicht in* E. Sei $[\hat{x}] \in F = \hat{F}/\hat{N}$, dann ist $\hat{x} = (x_n)$ Cauchy in E. Nun ist

$$\|j(x_m) - [\hat{x}]\|_F = \|[\hat{y}_m] - [\hat{x}]\|_F = \|[\hat{y}_m - \hat{x}]\|_F = \|(x_m - x_n)\|^\wedge.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\| < \varepsilon,$$

für $m > N_\varepsilon$, also liegt $j(E)$ dicht in F.

5) F *ist vollständig.* Sei $([\hat{x}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in F, so ist $\hat{x}_n = (y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in E und da $\|[\hat{x}]\|_F = \|\hat{x}\|^\wedge$, ist $\hat{x}_n$ Cauchyfolge in $\hat{F}$. Somit gilt,

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K_{n,\varepsilon}\ \forall\ k, l \geq K_{n,\varepsilon}\ \left\|y_k^{(n)} - y_l^{(n)}\right\|_E < \varepsilon, \tag{*}$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\ n, m > N_\varepsilon : \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|^\wedge < \varepsilon. \tag{**}$$

Setze nun $y_k := y^{(k)}_{K_{k,1/k}}$, $y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist (y_k) Cauchyfolge in E, denn

$$\begin{aligned}\|y_k - y_l\|_E &= \left\|y^{(k)}_{K_{k,1/k}} - y^{(l)}_{K_{l,1/l}}\right\|_E \\ &\le \underbrace{\left\|y^{(k)}_{K_{k,1/k}} - y^{(k)}_j\right\|_E}_{(1)} + \underbrace{\left\|y^{(k)}_j - y^{(l)}_j\right\|_E}_{(2)} + \underbrace{\left\|y^{(l)}_j - y^{(l)}_{K_{l,1/l}}\right\|_E}_{(3)}.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle j so, dass $j > \max\{K_{k,1/k}, K_{l,1/l}, N_\varepsilon\}$, so sind nach (*) $(1) < \frac{1}{k}$ und $(3) < \frac{1}{l}$. Für eventuell noch größeres j gilt außerdem

$$(2) = \left\|y^{(k)}_j - y^{(l)}_j\right\|_E \le \lim_{j\to\infty} \left\|y^{(k)}_j - y^{(l)}_j\right\|_E + \varepsilon = \|\hat{x}_k - \hat{x}_l\|^\wedge + \varepsilon.$$

Wählen wir nun $k, l > N_\varepsilon$ so erhalten wir nach (**)

$$\|y_k - y_l\|_E \le \frac{1}{k} + 2\varepsilon + \frac{1}{l}, \qquad \text{für } k, l > N_\varepsilon.$$

also ist (y_k) Cauchy in E und daher $[\hat{y}] \in F$.

Um die Konvergenz zu zeigen, betrachte

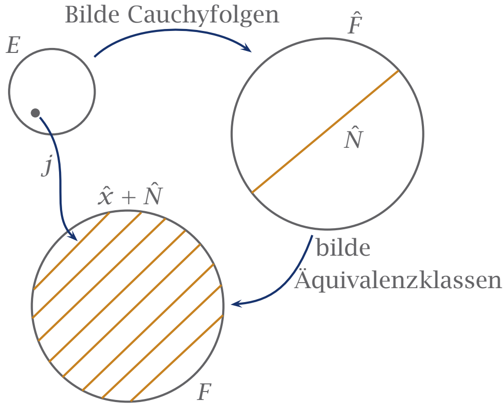
$$\begin{aligned}\|\hat{x}_n - \hat{y}\|^\sim &= \lim_{k\to\infty} \left\|y^{(n)}_k - y^{(k)}_{K_{k,1/k}}\right\|_E \\ &\le \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left\|y^{(n)}_k - y^{(n)}_{K_{k,1/k}}\right\|_E}_{(*):<\frac{1}{k}} + \underbrace{\left\|y^{(n)}_{K_{k,1/k}} - y^{(k)}_{K_{k,1/k}}\right\|_E}_{(**):<\frac{1}{k}} < \frac{2}{k}\end{aligned}$$

für k, l hinreichend groß. Also $[\hat{x}_n] \to [\hat{y}]$ in F. «

1.17 *Bemerkung.* Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass diese Vervollständigung bis auf Isomorphie auch eindeutig ist. ⊸

1.18 **Bsp** a.) $E = l_{\text{abb}} := \{(x_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N : x_n = 0\}$. Vervollständigung bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist l_p. $(1 \le p < \infty)$. Für $p = \infty$ ist die Vervollstängigung bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ der Raum der Nullfolgen.

b.) $P([a,b]) :=$ Menge der komplexen Polynome als Funktion $[a,b] \to \mathbb{C}$. Die Vervollständigung bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist $C([a,b] \to \mathbb{C})$ (siehe Weierstraßscher Approximationssatz).



1.1 **Zur Konstruktion des Raumes $F = \hat{F}/\hat{N}$.**

c.) Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für stetiges $f : O \to \mathbb{C}$ setze

$$
\begin{aligned}
||f||_p &:= \left(\int_O |f(x)|^p \right)^{1/p}, \\
E &:= C_0^\infty(O \to C) \\
&:= \{ f \in C^\infty(O \to \mathbb{C}) \; : \; \operatorname{supp} f \text{ kompakt und } \operatorname{supp} f \subseteq O \} .
\end{aligned}
$$

Die Vervollständigung ist der $\mathcal{L}^p(O)$.

d.) Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
E &:= \left\{ f \in C^k(\overline{O} \to C) \; : \; ||f||_{k,p} < \infty \right\}, \\
||f||_{k,p} &:= \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathbb{N}_0 \\ |\alpha_1|+\ldots+|\alpha_k| \leq k}} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_k}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_p .
\end{aligned}
$$

Die Vervollständigung ist der Sobolevraum $W^{k,p}(O)$. Die Elemente dieses Raumes sind in einem verallgemeinerten Sinne differenzierbar (schwache Ableitung, Distributionenableitung, starke Ableitung).
Sobolevsche Einbettung: Für $k > \frac{n}{2}$ gilt $W^{k,2}(O) \subseteq C(\overline{O} \to \mathbb{C})$, falls ∂O "genügend gut". ■

2 Lineare Abbildungen

2.1 **Definition** *Seien* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *normierte Räume und* $T : E \to F$ *linear.*

(a) *T heißt auch linearer Operator. Falls* $(F, \|\cdot\|_F) = (\mathbb{K}, |\cdot|_{\mathbb{K}})$, *heißt T auch lineares Funktional.*

(b) *T heißt beschränkt, falls*

$$\exists\ c > 0\ \forall\ x \in E : \|x\|_E = 1 \Rightarrow \|Tx\|_F \leq c.$$

(c) *Sei T beschränkt, dann heißt*

$$\begin{aligned}\|T\| &:= \sup\left\{\|Tx\|_F\ :\ \|x\|_E = 1\right\}\\ &= \inf\left\{c > 0\ :\ \ \forall\ x \in E : \|x\|_E = 1 \Rightarrow \|Tx\|_F \leq c\right\}\\ &= \sup\left\{\|Tx\|_F\ :\ \|x\|_E = 1\right\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_e}\ :\ x \in E \setminus \{0\}\right\}\\ &= \inf\left\{c > 0\ :\ \ \forall\ x \in E : \|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E\right\}\end{aligned}$$

Operatornorm von T. Insbesondere gilt

$$\forall\ x \in E : \|Tx\|_F \leq \|T\|\ \|x\|_E\,.$$

(d) *Ist T bijektiv und sind sowohl T also auch T^{-1} beschränkt, so heißt T Isomorphie oder Isomorphismus.* $(E, \|\cdot\|_E)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *heißen dann isomorph.*

(e) *Falls* $\forall\ x \in E : \|Tx\|_F = \|x\|_E$, *so heißt T Isometrie. Jede surjektive Isometrie ist ein Isomorphismus.* $\rtimes$

2.2 **Satz** *Für* $T : E \to F$ *linear sind äquivalent* *(i)* $\exists\, x_0 \in E : T$ *ist stetig in* x_0*.*

(ii) $\forall\, x_0 \in E : T$ *ist stetig in* x_0*. Also* T *ist stetig.*

(iii) T *ist beschränkt.*

(iv) T *bildet Cauchyfolgen in* E *auf Cauchyfolgen in* F *ab.* ⋊

» (i)⇒(ii): Sei $y \in E$ und (y_n) Folge in E mit $y_n \to y$,

$$\Rightarrow T(y_n) = T(\underbrace{y_n - y + x_0}_{\to x_0}) + T(y - x_0) \to T(x_0) + T(y - x_0) = T(y).$$

(ii)⇒(iii): Kontraposition: Sei T nicht beschränkt, d.h.

$$\forall\, c > 0\ \exists\, x \in E : (\|Tx\|_F > c \wedge \|x\|_E = 1)\,.$$

Wähle (x_n) mit $\|x_n\|_E = 1$ und $\|Tx_n\|_F > n$. Setze $y_n := \frac{1}{n}x_n$, dann geht $y_n \to 0$ aber $Ty_n > 1$ also $\neg(Ty_n \to 0)$ und daher ist T nicht stetig in $x_0 = 0$.
(iii)⇒(iv): Sei (x_n) Cauchyfolge in E, so gilt

$$\|Tx_n - Tx_m\|_F \le \|T\|\,\|x_n - x_m\|_E \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Also ist (Tx_n) Cauchyfolge.
(iv)⇒(i): Sei (x_n) Folge mit $x_n \to 0$. Setze $y_n := (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$, dann gilt $y_n \to 0$ und (y_n) ist Cauchy. Nach (iv) ist (Ty_n) ebenfalls Cauchy und besitzt besitzt eine konvergente Teilfolge $(Ty_{2n}) \to 0$. D.h. (Ty_n) ist konvergent gegen $\lim\limits_{n\to\infty} Ty_{2n} = 0$. Dann ist aber auch (Tx_n) als Teilfolge konvergent mit demselben Grenzwert. «

2.3 **Satz** *1) Seien* E, F *isomorph und* E *Banachraum, dann ist auch* F *Banachraum.*

2) Falls $\dim E = n < \infty$*, so sind* E *und* $\mathbb{K}^n$ *isomorph und* E *Banachraum.* ⋊

» 1) Sei $T : E \to F$ Isomorphie und (y_n) Cauchy in F. T^{-1} ist beschränkt, also ist $(T^{-1}y_n)$ Cauchy in E. Da E vollständig, konvergiert $T^{-1}y_n$ gegen $x \in E$. Nun ist $y_n := T(T^{-1}y_n)$ und daher konvergent gegen $Tx \in F$.

2) Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von E. Setze

$$T : E \to \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

T ist linear und bijektiv, denn

$$T^{-1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

Wähle als Norm für $\mathbb{K}^n$:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := \sum_{j=1}^{n} \left| x_j \right| .$$

Da auf E alle Normen äquivalent sind, gilt

$$\|Tx\| = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j \right| = \|x\|_1 \begin{cases} \leq c_1 \|x\|_E , \\ \geq c_2 \|x\|_E . \end{cases}$$

Da $\|Tx\| \leq c_1 \|x\|_E$ ist T beschränkt. Setze $Tx := y$, so ist $x = T^{-1} y$ und es gilt

$$||y|| \geq c_2 \left\| T^{-1} y \right\|_E \Rightarrow \left\| T^{-1} y \right\|_E \leq \frac{1}{c_2} ||y|| . \quad «$$

2.4 **Bsp** a.) $T : (C([0,1] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|) \to \mathbb{C} : f \mapsto f(1)$.

1) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$: $|Tf| = |Tf(1)| \leq ||f||_\infty \Rightarrow \|T\| \leq 1$, also ist T beschränkt. Für $f = 1$ gilt weiterhin $\|T\| \geq 1$, d.h. $\|T\| = 1$.

2) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$: Setze $f_n(x) = x^n$,

$$\Rightarrow \begin{cases} Tf_n = 1, \\ ||f_n||_1 = \frac{1}{n+1} \to 0, \end{cases}$$

d.h. T ist nicht beschränkt.

b.) *Multiplikationsoperator.* $E := (C([0,1] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$, $g \in E$,

$$T : E \to E, \quad f \mapsto g \cdot f,$$

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |g \cdot f|^p \, \mathrm{d}\mu \le \|g\|_\infty^p \|f\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_p \le \|g\|_\infty \|f\|_p .$$

D.h. T ist beschränkt und $\|T\| \le \|g\|_\infty$.

c.) *Differentialoperator.* $T : (C^1([0,1] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|) \to (C([0,1] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

1) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$: T ist unstetig. Um dies einzusehen, betrachte $f_n(x) = x^n$, so ist $\|f\|_\infty = 1$ aber $\|Tf_n\|_\infty = \|n \cdot x^{n-1}\|_\infty = n$.

2) $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$: Hier ist T beschränkt, denn $\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \le \|f\|$.

d.) $K = (K_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Kx$.

1) $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left|x_j\right|^2}$: Für K normal ($KK^* = K^*K$) existiert eine ONB aus Eigenvektoren. Die Operatornorm heißt hier Spektralnorm

$$\|K\| = \max\left\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ ist Eigenwert von } K\right\}.$$

2) $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_j \left|x_j\right|$: Die Operatornorm heißt hier Zeilensummennorm,

$$|(Tx)_i| = \left|\sum_{j=1}^n K_{ij} x_j\right| \le \sum_{j=1}^n \left|K_{ij}\right| \left|x_j\right| \le \|x\|_\infty \sum_{j=1}^\infty \left|K_{ij}\right|,$$

$$\Rightarrow \|T\| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n \left|K_{ij}\right| .$$

e.) $K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^\infty |K(i,j)| \le c$ für alle $i \in \mathbb{N}$. “Unendliche Matrix”

$$T : l^\infty \to l^\infty, \ (x_n) \mapsto (y_n) = \left(\sum_{j=1}^\infty K(n,j) x_j\right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

y_n ist wohldefiniert, denn

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} K(n,j)x_j\right| \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|x_j\right| \sum_{j=1}^{\infty} \left|K(n,j)\right| \le c\,\|(x_n)\|_\infty .$$

Weiterhin gilt,

$$\|T(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|y_n\right| \le c\,\|(x_n)\|_\infty < \infty \Rightarrow (y_n) \in l^\infty,$$

sowie $\|T\| \le c$.

f.) $(E, \|\cdot\|) = (C([0,1] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$Tf = \int_0^1 K(\cdot, y) f(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

wobei $K \in C([0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C})$, d.h. $T : E \to E$. Nun ist

$$\begin{aligned} \|Tf(x)\| &= \max_{0\le x\le 1} \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\le \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 \left|K(x,y)f(y)\right|\,\mathrm{d}y \le \|f\|_\infty \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 \left|K(x,y)\right|\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\|T\| \le \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 \left|K(x,y)\right|\,\mathrm{d}y\,.$ ■

2.5 **Fortsetzungssatz** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $\tilde{E} \subseteq E$ dicht, $(B, \|\cdot\|)$ Banachraum. $\tilde{T} : \tilde{E} \to B$ linear und beschränkt. Dann existiert eine eindeutige lineare beschränkte Fortsetzung,*

$$T : E \to B, \qquad T\big|_{\tilde{E}} = \tilde{T},$$

und es gilt $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$. ⋊

» 1) Zu $x \in E$ sei (x_n) Folge in $\tilde{E}$ mit $x_n \to x$. (x_n) ist Cauchy und daher ist auch (Tx_n) Cauchyfolge. B ist vollständig, d.h. $\tilde{T}x_n \to y \in B$. Setze $Tx := y = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}x_n$.

2) *Wohldefiniertheit.* Falls ebenso $x'_n \to x$, so gilt $x'_n - x_n \to 0$ und daher $\tilde{T}(x'_n - x_n) \to 0$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}x'_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}x_n.$$

3) *Linearität.* Offensichtlich.

4) *Einschränkung.* $Tx = \tilde{T}x$ gilt offensichtlich für jedes $x \in \tilde{E}$. (Betrachte die konstante Folge $(x_n) = (x, x, x, \ldots)$).

5) *Beschränktheit.*

$$\|Tx\|_B = \left\|\lim_{n\to\infty} \tilde{T}x_n\right\|_B = \lim_{n\to\infty} \left\|\tilde{T}x_n\right\|_B \leq \left\|\tilde{T}\right\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \left\|\tilde{T}\right\| \|x\|_E .$$

D.h. $\|T\| \leq \left\|\tilde{T}\right\|$. Andererseits ist T Fortsetzung und daher $\|T\| \geq \left\|\tilde{T}\right\|$. Somit ist T beschränkt und $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$.

6) *Eindeutigkeit.* Seien $T, S : E \to B$ beschränkt und linear mit $T\big|_{\tilde{E}} = S\big|_{\tilde{E}} = \tilde{T}$. Sei $x \in E$, $(x_n) \in \tilde{E}$ mit $x_n \to x$.

$$\Rightarrow Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}x_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = Sx. \quad «$$

2.6 *Bemerkung.* Wenn $\tilde{E}$ nicht dicht liegt, kann man $\tilde{T}$ dennoch auf $\overline{\tilde{E}}$ fortsetzen. Im Allgemeinen lässt sich $\tilde{T}$ jedoch nicht weiter fortsetzen. Im Spezialfall $B = \mathbb{K}$ lässt sich jedoch der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach anwenden. ⊸

2.7 **Korollar** *Die Vervollständigung eines normierten Raumes ist bis auf Isomorphie eindeutig.* ⋊

» Seien $F, \tilde{F}$ zwei Vervollständigungen. Sei $T : j(E) \to \tilde{j}(E), x \mapsto \tilde{j} \circ j^{-1}(x)$.

1) *T ist Isometrie.* T ist offensichtlich linear und es gilt

$$\|Tx\|_{\tilde{F}} = \left\|\tilde{j} \circ j^{-1}(x)\right\|_{\tilde{F}} = \left\|j^{-1}(x)\right\|_E = \|x\|_F .$$

Sei $\tilde{T} : F \to \tilde{F}$ die beschränkte Fortsetzung von T, dann ist $\tilde{T}$ ebenfalls Isometrie, denn zu $x \in F$ sei (x_n) in $j(E)$ mit $x_n \to x$, dann gilt $\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, also

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_{\tilde{F}} = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_{\tilde{F}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F = \|x\|_F .$$

Insbesondere ist $\tilde{T}$ injektiv.

2) $\tilde{T}$ *ist surjektiv.* $\tilde{T}$ ist beschränkt und F Banachraum, daher ist $\tilde{T}(F)$ ebenfalls Banachraum. $\tilde{j}(E)$ liegt dicht in $\tilde{F}$, d.h. $\overline{\tilde{T}(F)} = \tilde{F}$. Aber $\tilde{T}(F)$ ist Banachraum und daher bereits abgeschlossen, also ist $\tilde{T}(F) = \tilde{F}$. «

2.8 **Definition** *Seien E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$. Bezeichne*

$$\mathcal{L}(E \to F) := \{T : E \to F \,:\, T \textit{ linear und beschränkt}\}.$$

$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E \to E)$. ⋊

2.9 **Satz** *1) $\mathcal{L}(E \to F)$ ist linearer Raum über $\mathbb{K}$.*

2) Die Operatornorm ist eine Norm auf $\mathcal{L}(E \to F)$.

3) Ist F Banachraum, so ist $\mathcal{L}(E \to F)$ Banachraum. ⋊

» 1) Seien $T, S \in \mathcal{L}(E \to F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\|(T+S)(x)\|_F = \|Tx + Sx\|_F \le \|Tx\|_F + \|Sx\|_F \le (\|T\| + \|S\|)\,\|x\|_E,$$
$$\|(\alpha T)(x)\|_F = \|\alpha T x\|_F = |\alpha|\,\|Tx\|_F \le |\alpha|\,\|T\|\,\|x\|_E.$$

D.h. $T + S$ und $\alpha \cdot T \in \mathcal{L}(E \to F)$. Weiterhin gilt,

$$\|(\alpha T)\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\alpha T)x\|_F = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_F = |\alpha|\,\|T\|.$$

2) (N1) ist klar. (N2): Sei $0 = \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$, d.h. $\forall\ x \neq 0 : Tx = 0$ also ist $T = 0$. (N3),(N4): Siehe 1.).

3) Sei F Banachraum und (T_n) Cauchy in $\mathcal{L}(E \to F)$. Für $x \in E$ gilt somit,

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \le \|T_n - T_m\|\,\|x\| \to 0.$$

D.h. $(T_n x)$ ist Cauchy in F. Setze $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ punktweise. Offensichtlich ist T linear. Weiterhin gilt,

$$\|Tx\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F \le \left(\lim_{n\to\infty} \|T_n\|\right) \|x\|_E.$$

Der Grenzwert existiert, da T_n Cauchy. Setze $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Nun ist

$$\|(T_n - T)x\|_F = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\| \, \|x\| < \varepsilon \, \|x\|_E \,,$$

für n hinreichend. Also ist auch $\|T_n - T\| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$. «

2.10 **Definition** *Der Banachraum $\mathcal{L}(E \to \mathbb{K})$ heißt Dualraum von E und wird meißt mit E^* oder E' bezeichnet.* ⋊

Die Frage ob $E' \neq (0)$ wird der Satz von Hahn-Banach positiv beantworten. E' ist vom algebraischen Dualraum zu unterscheiden, denn dessen Abbildungen sind nicht notwendigerweise beschränkt.

2.11 *Bemerkung.* Wenn $T \in \mathcal{L}(E \to F)$, $S \in \mathcal{L}(F \to G)$, so ist $T \circ S \in \mathcal{L}(E \to G)$. Auf $\mathcal{L}(E)$ lässt sich daher ein Produkt definieren $T \cdot S := T \circ S$. ⊸

2.12 **Definition** *Ein Banachraum E heißt Banachalgebra, falls auf E ein Produkt*

$$E \times E \to E$$

definiert ist, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(b) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,

(c) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,

(d) $\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$,

(e) $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Insbesondere ist das Produkt stetig, d.h. $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow x_n \cdot y_n \to x \cdot y$. ⋊

3 Bairescher Kategoriensatz

3.1 **Definition** *Sei M Menge. $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls für $x, y, z \in M$*

(a) $d(x, y) \geq 0$, *Positivität,*

(b) $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *Definitheit,*

(c) $d(x, y) = d(y, x)$, *Symmetrie,*

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *Dreiecksungleichung.*

(M, d) bezeichnet man als metrischen Raum. ⋊

3.2 *Bemerkung.* A. $x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$. (x_n) ist genau dann Cauchy, wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

$x \in M$ ist genau dann innerer Punkt, falls

$$\exists\ r > 0 : K_r(x) := \{y \in M\ :\ d(x, y) < r\} \subseteq M.$$

Häufungspunkte, offene und abgeschlossene Mengen sowie Vollständigkeit sind wie üblich definiert. Folgen- und Überdeckungskompaktheit sind hier äquivalent.

B. Ist $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum, so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|_E$ eine Metrik induziert. Die Begriffe in A. sind unabhängig davon, ob eine Norm oder die durch sie induzierte Metrik zugrundegelegt wird. ⊸

3.3 **Definition** *Sei $N \subseteq M$, d Metrik auf M und $x \in M$.*

$$d(x, N) := \inf\{d(x, y)\ :\ y \in N\}.$$ ⋊

3.4 **Satz** *Sei (M,d) metrischer Raum, $N \subseteq M$ abgeschlossen und $x \in M \setminus N$.*

1) $d(x,N) > 0$.

2) Falls N kompakt, $\exists\, y \in N : d(x,N) = d(x,y)$. ⋊

» 1) *Kontraposition.* Angenommen $d(x,N) = 0$, dann existiert eine Folge (y_n) in N, so dass $d(x,y_n) \to 0$, d.h. $y_n \to x$. N ist abgeschlossen also ist $x \in N$.

2) Sei $d(x,N) = c$, so existiert eine Folge (y_n) in N, so dass $d(x,y_n) \to c$. N ist kompakt, d.h. es existiert eine konvergente Teilfolge $y_{n_k} \to y \in N$. Dann ist $d(x,y) = \lim_{k\to\infty} d(x,y_{n_k}) = c$. «

3.5 **Bairescher Kategoriensatz** *Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, (A_k) Folge abgeschlossener Mengen in M mit*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $A_k^\circ \neq \varnothing$. ($A_k^\circ := \{$innere Punkte von $A_k\}$) ⋊

» Angenommen $\forall\, k \in \mathbb{N} : A_k^\circ = \varnothing$. Dann ist $M \setminus A_1$ offen und nichtleer.

$$\Rightarrow\ \exists\ \overline{K_{r_1}(x_1)} \subseteq K_{2r_1}(x_1) \subseteq M \setminus A_1, \qquad r_1 < 1.$$

Dann ist $K_{r_1}(x_1) \setminus A_2$ offen und nichtleer (sonst $K_{r_1}(x_1) \subseteq A_2^\circ$).

$$\Rightarrow\ \exists\ \overline{K_{r_2}(x_2)} \subseteq K_{2r_2}(x_2) \subseteq K_{r_1}(x_1) \setminus A_2, \qquad r_2 < \frac{1}{2},$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow\ \exists\ \overline{K_{r_n}(x_n)} \subseteq K_{2r_n}(x_n) \subseteq K_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \setminus A_n, \qquad r_n < \frac{1}{2^{n-1}},$$

Nun ist $x_n \in K_{r_n}(x_n) \subseteq K_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \subseteq \ldots \subseteq K_{r_l}(r_l)$, wobei

$$r_l < \frac{1}{2^l} \Rightarrow d(x_n, x_l) < \frac{1}{2^l}.$$

Somit ist (x_n) Cauchy und, also $x_n \to x \in M$. Insbesondere ist

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : x \in \overline{K_{r_k}(x_k)} \subseteq M \setminus A_k \Rightarrow x \notin A_k\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Aber $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ ↯. «

3.6 *Bemerkung.* Eine alternative Formulierung des Baireschen Kategoriensatz ist, dass M von 2. Kategorie ist. $\multimap$

3.7 **Satz von Banach-Steinhaus (uniform boundedness principle)** *Sei B Banachraum, E normierter Raum und*

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(B \to E)$$

mit $\forall\ x \in B : \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_E < \infty$. *Dann gilt*

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty. \quad \rtimes$$

Punktweise Beschränktheit einer Familie von Operatoren impliziert also die gleichmäßige Beschränktheit.

» Setze

$$A_n := \left\{ x \in B \,:\, \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_E \leq n \right\} = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} \{x \in B \,:\, \|Tx\|_E \leq n\}\,.$$

1) Zeige $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sei dazu $x \in B$, dann folgt

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_E = R < \infty \Rightarrow x \in A_n \text{ für } n \geq R.$$

2) Zeige A_n ist abgeschlossen. Betrachte dazu

$$B \setminus A_n = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \{x \in B \,:\, \|Tx\|_E > n\}\,.$$

Diese Menge ist als Urbild von (n, ∞) unter der stetigen Abbildung $\|\cdot\|_E \circ T$ offen. Mit dem Satz von Baire folgt nun

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\ K_r(x_0) \subseteq A_{n_0}.$$

3) Sei $x \in B$ und $\|x\|_B = 1$, so gilt

$$\begin{aligned}\|Tx\|_E &= \frac{2}{r}\left\|T\left(\frac{r}{2}x\right)\right\|_E = \frac{2}{r}\left\|T\left(\frac{r}{2}x + x_0\right) - Tx_0\right\|_E \\ &\le \frac{2}{r}\left(\left\|T\left(\frac{r}{2}x + x_0\right)\right\|_E + \|Tx_0\|_E\right) \\ &\le \frac{2}{r}\left(n_0 + \sup_{T\in\mathcal{T}}\|Tx_0\|_E\right) \\ \Rightarrow \|T\| &\le \frac{2}{r}\left(n_0 + \sup_{T\in\mathcal{T}}\|Tx_0\|_E\right) \\ \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{T}}\|T\| &\le \frac{2}{r}\left(n_0 + \sup_{T\in\mathcal{T}}\|Tx_0\|_E\right). \quad \text{«}\end{aligned}$$

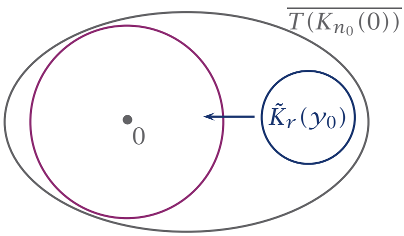
3.8 **Satz (open mapping principle)** *Seien $B, \tilde{B}$ Banachräume, $T : B \to \tilde{B}$ linear, beschränkt und surjektiv. Dann ist T offen, d.h. für $O \subseteq \mathcal{B}$ offen ist $T(O) \subseteq \tilde{B}$ offen.* ⋊

» 1) *Anwendung des Satzes von Baire.* Da T surjektiv, gilt

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n(0) \Rightarrow \tilde{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(K_n(0))}^{\sim}.$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $\tilde{B}$ folgt nun mit dem Satz von Baire

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \exists\, \tilde{K}_r(y_0) \subseteq \overline{T(K_{n_0}(0))}^{\sim}.$$



3.1 Zum Verschieben von $\tilde{K}_r(y_0)$

2) *Verschieben von $\tilde{K}_r(y_0)$.* Sei $y \in \tilde{K}_r(0)$ und damit $\|y\|_\sim < r$, dann gilt

$$y + y_0 \in \tilde{K}_r(y_0) \subseteq \overline{T(K_{n_0}(0))}^{\sim}.$$

Betrachte nun eine Folge (x_n) in $K_{n_0}(0)$ mit

$$Tx_n \to y + y_0,$$

und eine Folge ξ_n in $K_{n_0}(0)$ mit $T\xi_n \to y_0$, so gilt

$$T(x_n - \xi_n) = Tx_n - T\xi_n \to y + y_0 - y_0 = y,$$

wobei $\|x_n - \xi_n\| \leq \|x_n\| + \|\xi_n\| < 2n_0$. Also ist $y \in \overline{T(K_{2n_0}(0)}^{\sim}$.
Somit ist auch $\tilde{K}_r(0) \subseteq \overline{T(K_{2n_0}(0)}^{\sim}$.

3) *Skalieren*. Für $a > 0$ ist

$$\tilde{K}_{ar}(0) \subseteq \overline{T(K_{a2n_0}(0))}^{\sim},$$

denn sei $\|y\|_\sim < ar$, so ist $\left\|\frac{y}{a}\right\|_\sim < r$ und daher

$$\frac{y}{a} \in \overline{T(K_{2n_0}(0))}^{\sim}.$$

Es existiert also eine Folge (x_n) in $K_{2n_0}(0)$ mit $Tx_n \to \frac{y}{a}$. Somit existiert eine Folge (ax_n) in $K_{2an_0}(0)$ mit $Tax_n \to y$ und daher ist $y \in \overline{T(K_{2an_0}(0)}^{\sim}$.
Insbesondere $\exists\, \delta > 0 : \tilde{K}_\delta(0) \subseteq \overline{T(K_1(0))}^{\sim}$.

4) *Einbetten* $\overline{T(K_1(0))}^{\sim} \subseteq T(K_3(0))$. Sei $y \in \overline{T(K_1(0))}^{\sim}$.

$$\Rightarrow \;\exists\, x_0 \in K_1(0) : \|y - Tx_0\|_\sim < \frac{\delta}{2}$$

also $y - Tx_0 \in \tilde{K}_{\delta/2}(0) \subseteq \overline{T(K_{1/2}(0))}^{\sim}$.

$$\Rightarrow \;\exists\, x_1 \in K_{1/2}(0) : \|y - Tx_0 - Tx_1\|_\sim < \frac{\delta}{4},$$

also $y - Tx_0 - Tx_1 \in \tilde{K}_{\delta/4}(0) \subseteq \overline{T(K_{1/4}(0))}$, usw. Wir erhalten somit eine Folge (x_n) mit

$$\left\|y - \sum_{j=0}^{n} Tx_j\right\| < \frac{\delta}{2^n}, \qquad \|x_j\| < \frac{1}{2^j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} Tx_j = T\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right) \to y$$

Weiterhin gilt

$$\left\|\sum_{j=0}^{n} x_j\right\| \leq \sum_{j=0}^{n} \left\|x_j\right\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Nun ist B Banachraum und daher ist $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \in B$ mit $\|x\| \leq 2$, also $x \in \overline{K_2(0)} \subseteq K_3(0)$. T ist beschränkt also stetig und daher gilt,

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} Tx_j = T\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j\right) = T(x),$$

$$\Rightarrow \overline{T(K_1(0))}^{\sim} \subseteq T(K_3(0)).$$

5) *Skalieren.* Aus $\tilde{K}_\delta(0) \subseteq T(K_3(0))$ folgt:

$$\tilde{K}_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(K_\varepsilon(0)), \qquad \text{mit } \tilde{\delta} = \delta\frac{\varepsilon}{3}.$$

6) *Abschluss (Offenheit).* Sei $O \subseteq B$ offen und $y \in T(O)$ ($y = Tx$, $x \in O$). Zeige nun

$$\exists\ \tilde{\delta} > 0 : K_{\tilde{\delta}}(y) \subseteq T(O).$$

O ist offen, also $\exists\ \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(0) \subseteq O$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{K}_{\tilde{\delta}}(T(x)) &= T(x) + \tilde{K}_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(x) + T(K_\varepsilon(0)) = T(x + K_\varepsilon(0)) \\ &= T(K_\varepsilon(x)) \subseteq T(O). \quad \text{«}\end{aligned}$$

3.9 **Satz (inverse mapping theorem)** *Seien $B, \tilde{B}$ Banachräume, $T : B \to \tilde{B}$ linear, beschränkt und bijektiv. Dann ist T^{-1} beschränkt.* ⋊

"T stetig $\Rightarrow$ T^{-1} beschränkt".

» Zeige T^{-1} ist stetig in $y = 0$, d.h.

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \|y\|_{\tilde{B}} < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left\|T^{-1}y\right\|_B < \varepsilon.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \tilde{K}_{\delta_\varepsilon}(0) \subseteq T(K_\varepsilon(0)).$$

Dies folgt aber direkt aus der Offenheit von T. «

3.10 **Korollar** *Sei B vollständig bezüglich $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\sim$ und $\|\cdot\|$ feiner als $\|\cdot\|_\sim$. Dann sind die Normen äquivalent.* «

» Die Abbildung $\mathbf{I} : (B, \|\cdot\|) \to (B, \|\cdot\|_\sim), x \mapsto x$ ist beschränkt (also stetig). Mit Satz 3.9 folgt, dass auch $\mathbf{I}^{-1}$ beschränkt (also stetig) ist. Damit ist $\|\cdot\|_\sim$ feiner als $\|\cdot\|$. «

4 Lineare Funktionale

Im Folgenden wollen wir zu einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ den Dualraum

$$E' = \mathcal{L}(E \to \mathbb{K})$$

und dessen Elemente $T \in E'$, die Funktionale genauer betrachten.

4-A Lineare Funktionale als verallgemeinerte Koordinaten

Ist $v = 0$ der Nullvektor, so sind alle Koordinaten von v Null. Sind v und w identische Vektoren, so sind auch alle Koordinaten identisch.

4.1 **Bsp** E sei endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Somit ist

$$e_k' : E \to \mathbb{K}, \; x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \mapsto x_k$$

linear und beschränkt, denn

$$\left\| e_k'(x) \right\| = |x_k| \leq \sum_{j=1}^{m} \left| x_j \right| = \|x\|_1 \leq c \, \|x\|_E .$$

$\{e_1', \ldots, e_n'\}$ ist Basis von E', die duale Basis zu $\{b_1, \ldots, b_n\}$. (Insbesondere haben E und E' die gleiche Dimension). Sei $T \in E'$, so gilt

$$T(x) = T\left(\sum_{j=0}^{n} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(b_j) = \sum_{j=1}^{n} e_j'(x) T(b_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} T(b_j) e_j'\right)(x)$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=1}^{n} T(b_j) e_j'.$$

Eindeutigkeit. Sei $T = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j' \Rightarrow T(b_k) = \sum_{j=1}^{n} t_j \delta_{jk} = t_k$.

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} 0 = x \in E &\Leftrightarrow \ \forall\ j = 1, \ldots, n : x_j = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ j = 1, \ldots, n : e_j'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \forall\ T \in E' : T(x) = 0. \end{aligned}$$

$T \in E'$ kann also als verallgemeinerte Koordinate betrachtet werden. ■

4.2 **Bsp** Sei $E = C([0,1] \to \mathbb{C})$ mit $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_\infty$. Zu $x \in [0,1]$ sei

$$\delta_x : E \to \mathbb{C} : f \mapsto f(x),$$

so ist δ_x linear sowie

$$|\delta_x f| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|\delta_x\| \leq 1.$$

Also ist $\delta_x \in E'$.

$$f = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ x \in [0,1] : \delta_x(f) = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ T \in E' : T(f) = 0.$$

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob $f = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ T \in E' : T(f) = 0$ in jedem normierten Raum. Zum Beweis benötigen wir jedoch noch etwas Vorbereitung. ■

4-B Lineare Funktionale als Hyperebene

4.3 **Definition** *Sei L ein linearer Raum. Ein linerarer Teilraum $M \subseteq L$ heißt Hyperebene, falls* $\dim L/M = 1$. ⋊

M ist also genau dann Hyperebene, wenn eine lineare, bijektive Abbildung $\varphi : L/M \to \mathbb{K}$ existiert.

4.4 **Satz** *1) Für einen linearen Teilraum M von L sind äquivalent:*

(i) M ist Hyperebene.

(ii) $\exists\ \varphi : L \to \mathbb{K}$ linear, so dass gilt: $M = \ker \varphi$ und $\varphi \neq 0$.

2) *Für $\varphi, \psi : L \to \mathbb{K}$ linear sind äquivalent:*

(i) $\ker \varphi = \ker \psi$.

(ii) $\exists\, \lambda \neq 0 : \varphi = \lambda \psi$. $\rtimes$

» 1) "$\Rightarrow$": Betrachte die Quotientenabbildung $q : L \to L/M : x \mapsto [x]$. q ist offensichtlich linear. Weitherhin gilt $\dim L/M = 1$, nach Definition 4.3 existiert also eine lineare bijektive Abbildung $\psi : L/M \to \mathbb{K}$. Setze nun $\varphi = \psi \circ q$, dann gilt

$$\begin{aligned}&\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(q(x)) = 0 \Leftrightarrow q(x) = [0] \Leftrightarrow [x] = [0]\\ &\Leftrightarrow x \in [0] \Leftrightarrow x \in M.\end{aligned}$$

Also ist $\ker \varphi = M$ und offensichtlich ist $\varphi \neq 0$.

"$\Leftarrow$": Setze $M := \ker \varphi$ und $\psi : L/M \to \mathbb{K},\ [x] \mapsto \varphi(x)$. ψ ist offensichtlich wohldefiniert und linear. Außerdem ist ψ injektiv, denn falls $\varphi(y) = \varphi(x)$, so ist $\varphi(x - y) = 0$, d.h. $x - y \in M \Leftrightarrow [x] = [y]$. Weiterhin ist ψ surjektiv, da φ surjektiv.

Also ist M Hyperebene.

2) Für den Spezialfall $\varphi = 0$ folgt die Behauptung trivialerweise.

"$\Rightarrow$": Sei $x_0 \in L$ mit $\varphi(x_0) = 1$, dann gilt $\psi(x_0) \neq 0$.

Sei $x \in L \setminus \ker \varphi$, dann gilt

$$\varphi(x - \varphi(x)x_0) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(x_0) = 0.$$

Somit ist $x - \varphi(x)x_0 \in \ker \varphi = \ker \psi$. Insbesondere gilt also,

$$\begin{aligned}&0 = \psi(x - \varphi(x)x_0) = \psi(x) - \varphi(x)\psi(x_0)\\ &\Rightarrow \psi(x) = \varphi(x)\psi(x_0)\\ &\Rightarrow \varphi = \frac{1}{\psi(x_0)}\psi.\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Trivial. «

4.5 **Satz** *Für $\varphi : E \to \mathbb{K}$ linear sind äquivalent* *(i)* φ *ist stetig (also beschränkt),*

(ii) $\ker\varphi$ *ist abgeschlossen.*

» "(i)⇒(ii)": $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$. $\{0\}$ ist abgeschlossen und daher auch $\ker\varphi$.

"(ii)⇒(i)": Sei $M = \ker\varphi$. Der Fall $M = L$ ist trivial. Sei also $M \subsetneq L$. Betrachte erneut die Quotientenabbildung $q : E \to E/M$, $x \mapsto [x]$. Mit 4.4 folgt, dass eine bijektive Abbildung $\psi : E/M \to \mathbb{K}$ existiert. Sei

$$\tilde{\varphi} := \psi \circ q \overset{\text{Bew. } 4.4}{\Rightarrow} \ker\tilde{\varphi} = M = \ker\varphi \overset{4.4}{\Rightarrow} \varphi = \lambda\tilde{\varphi}.$$

Zeige nun $\tilde{\varphi}$ ist stetig. q ist stetig, denn

$$||q(x)||_{E/M} = \inf_{y\in M} ||x+y||_E \leq \|x\|_E \Rightarrow ||q|| \leq 1.$$

ψ ist stetig, denn sei $\psi([x_0]) = 1$ und $[x] \in E/M$, so gilt

$$\psi(\psi([x])[x_0]) = \psi([x])\psi([x_0]) \overset{\psi \text{ bij}}{\Rightarrow} \psi([x])[x_0] = [x].$$

Insbesondere ist $\{[x_0]\}$ Basis von E/M und daher $\psi(\alpha[x_0]) = \alpha\psi([x_0]) = \alpha$, also gilt

$$|\psi([x])| = |\psi(\alpha[x_0])| = |\alpha| = |\alpha| \frac{\|[x_0]\|_{E/M}}{\|[x_0]\|_{E/M}} = \frac{\|\alpha[x_0]\|_{E/M}}{\|[x_0]\|_{E/M}} = \frac{\|[x]\|_{E/M}}{\|[x_0]\|_{E/M}}$$
$$\Rightarrow \|\psi\| = \frac{1}{\|[x_0]\|_{E/M}}.$$

Also ist ψ beschränkt. Somit ist $\psi \circ q$ stetig.

Einfacher. Betrachte den Spezialfall $T : E \to F$ bijektiv und E, F endlichdimensional. Definiere

$$\|x\| := \|Tx\|_F$$

ist Norm auf E. Es folgt mit 1.11, dass

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|_E &\leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_E \\ \Rightarrow \|Tx\|_F &= \|x\| \leq c_2 \|x\|_E\,. \end{aligned}$$

Ist also $T : E \to F$ linear und bijektiv und E, F endlichdimensonal, so ist T Isometrie. «

4-C Existenz linearer Funktionale

4.6 **Definition** *Sei L reeller linearer Raum,*

$$p : L \to \mathbb{R}$$

heißt sublinear, falls für $x, y \in L$ und $\lambda > 0$ gilt,

(a) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$,

(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. ⋊

Eine sublineare Abbildung erfüllt also die Dreiecksungleichung und ist homogen für positive Skalare.

4.7 *Bemerkung.* Jede Halbnorm (und damit auch jede Norm) ist sublinear. $p(x) < 0$ ist erlaubt. ⊸

4.8 **Satz von Banach** *Sei L reeller linearer Raum, $p : L \to \mathbb{R}$ sublinear, $M \le L$ linearer Teilraum und $f : M \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$\forall\, x \in M : f(x) \le p(x).$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung

$$F : L \to \mathbb{R}, \qquad F|_M = f,$$

so dass

$$\forall\, x \in L : F(x) \le p(x). \quad ⋊$$

4.9 *Bemerkung.* Im Allgemeinen ist der Nachweis der Existenz einer beliebigen Fortsetzung einfach, der Nachweis einer p-beschränkten Fortsetzung schwierig. ⊸

» *Beweis von Satz 4.8.* 1) *Fortsetzung auf* “$\dim M + 1$”.
Sei $x_0 \in L/M$. Angenommen es existiert eine Fortsetzung g von f auf $\langle M, x_0 \rangle$, dann hat diese die Eigenschaften

(a) $g|_M = f$.

(b) $g(y) = g(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda g(x_0)$. Ist die Darstellung $y = x + \lambda x_0$ eindeutig, so ist g eindeutig durch $g(x_0)$ bestimmt.

Sei also $y \in \langle M, x_0 \rangle$ mit $y = x + \lambda x_0$ und $y = \tilde{x} + \tilde{\lambda} x_0$, dann ist

$$0 = \underbrace{x - \tilde{x}}_{\in M} + (\lambda - \tilde{\lambda}) x_0.$$

Da $x_0 \notin M$ ist $(\lambda - \tilde{\lambda}) x_0$ nur dann Element von M, wenn $\lambda - \tilde{\lambda} = 0$, d.h. $\lambda = \tilde{\lambda}$ und $x = \tilde{x}$.

Sei $g_r : y = x + \lambda x_0 \mapsto f(x) + \lambda r$ für festes $r \in \mathbb{R}$, so ist g_r linear und Fortsetzung von f. Zu zeigen ist nun, dass r so gewählt werden kann, dass $g_r(y) \leq p(y)$, was äquivalent ist zu

$$f(x) + \lambda r \leq p(x + \lambda x_0). \tag{*}$$

(a) Sei $\lambda = 0$, dann nimmt (*) die Form

$$f(x) \leq p(x)$$

an und ist nach Voraussetzung erfüllt.

(b) Sei $\lambda > 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow f(x) + \lambda r \leq p(x + \lambda x_0) \\
&\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{\lambda} \left(p(x + \lambda x_0) - f(x) \right) \\
&\qquad = p\left(\frac{1}{\lambda} p(x) + x_0 \right) - f\left(\frac{1}{\lambda} x \right) \\
&\Leftrightarrow r \leq \inf \left\{ p(z + x_0) - f(z) \, : \, z \in M \right\}.
\end{aligned}$$

(c) Sei $\lambda < 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow f(x) + \lambda r \leq p(x + \lambda x_0) \\
&\Leftrightarrow r \geq \frac{1}{\lambda} \left(p(x + \lambda x_0) - f(x) \right) \\
&\qquad = -p\left(\frac{1}{-\lambda} p(x) - x_0 \right) + f\left(\frac{1}{-\lambda} x \right) \\
&\Leftrightarrow r \geq \sup \left\{ -p(z - x_0) + f(z) \, : \, z \in M \right\}.
\end{aligned}$$

Es existiert also ein p-beschränktes g_r, falls

$$\inf\{p(z+x_0)-f(z) : z \in M\} \geq \sup\{-p(z-x_0)+f(z) : z \in M\}. \tag{**}$$

Seien $x', x'' \in M$, dann gilt

$$\begin{aligned} -p(x'-x_0)+f(x') &= f(x'+x'')-f(x'')-p(x'-x_0) \\ &\leq p(x'+x'')-f(x'')-p(x'-x_0) \\ &\leq p(x'-x_0)+p(x''+x_0)-f(x'')-p(x'-x_0) \\ &= p(x''+x_0)-f(x'') \Rightarrow (**). \end{aligned}$$

g_r ist also genau dann p beschränkt, wenn

$$r \in R = \left[\sup_{z\in M}\{-p(z-x_0)+f(z)\}, \inf_{z\in M}\{p(z+x_0)-f(z)\}\right].$$

Falls $R^\circ \neq \emptyset$, so existieren unendlich viele Fortsetzungen.

2) *Es gibt einen “größten” linearen Teilraum N von L, auf dem eine lineare, p-beschränkte Fortsetzung existiert.*

Wir zeigen dies durch eine Anwendung des Lemmas von Zorn (engl. “zornification”). Sei dazu

$$\mathcal{A} := \{(N,g) : M \leq N \leq L \text{ und } g \text{ ist } p\text{-beschr. lin. FS von } f \text{ auf } N\}.$$

(a) $\mathcal{A} \neq \emptyset$, da $(M,f) \in \mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A}$ wird halbgeordnet durch $(N_1,g_1) \leq (N_2,g_2)$, falls

$$N_1 \leq N_2 \text{ und } g_2 \text{ FS von } g_1.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ heißt aufsteigende Kette, wenn $\mathcal{B}$ durch $\leq$ totalgeordnet ist.

(c) *Für jede aufsteigende Kette $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ existiert eine obere Schranke in $\mathcal{A}$.*

Sei $\mathcal{B} = \{(N_i,g_i) : i \in \mathcal{I}\}$ eine solche Kette. Definiere

$$N := \bigcup_{i\in\mathcal{I}} N_i,$$

so ist $N \le L$. Setze nun

$$g(x) := g_i(x), \qquad \text{falls } x \in N_i.$$

g ist wohldefiniert, linear und p-beschränkt und Forsetzung von f, denn

$$\forall\ i \in \mathcal{I} : g_i \text{ linear und } p\text{-beschr.},\ g_i|_M = f.$$

Also ist $(N, g) \in \mathcal{A}$. Weiterhin gilt, dass

$$\forall\ i \in \mathcal{I} : N_i \le N, \quad g|_{N_i} = g_i$$

also ist $(N_i, g_i) \le (N, g)$ für jedes $i \in \mathcal{I}$.

(a)-(c) und das Lemma von Zorn ergeben, dass $\mathcal{A}$ ein maximales Element enthält, d.h.

$$\exists\ (N, g) \in \mathcal{A} :\ \forall\ (\tilde{N}, \tilde{g}) \in \mathcal{A} : (\tilde{N}, \tilde{g}) \le (N, g).$$

3) *Sei (N, g) das maximale Element, dann ist $N = L$.* Angenommen $N \subsetneq L$, dann $\exists\ x_0 \in L/N$. Mit 1.) folgt, es existiert eine lineare, p-beschränkte Fortsetzung von g_r von g auf $\langle N, x_0 \rangle$. Da aber $\langle N, x_0 \rangle \le L$ und g_r FS von g ist $(\langle N, x_0 \rangle, g_r) \in \mathcal{A}$ und $(N, g) \le (\langle N, x_0 \rangle, g_r)$. ↯ «

4.10 **Fortsetzungssatz von Hahn-Banach** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum $M \le E$ linearer Teilraum, $f \in M'$. Dann existiert eine Fortsetzung $F \in E'$ von f mit $\|F\| = \|f\|$. (Im Allgemeinen ist diese Fortsetzung nicht eindeutig).* ⋊

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

4.11 **Lemma** *Sei L linearer Raum über $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

1) *Äquivalent sind:*

   (i) *$g : L \to \mathbb{C}$ ist linear und $f = \mathrm{Re}(g)$.*

   (ii) *$f : L \to \mathbb{R}$ reell linear, d.h.*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
$$\forall\ x, y \in L : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

und $g : L \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x) - i f(x)$.

2) *Sei* $\|\cdot\|^{\sim} : L \to \mathbb{R}$ *Halbnorm,* $g : L \to \mathbb{C}$ *linear. Dann sind äquivalent*

(i) $\forall\ x \in L : |g(x)| \le \|x\|^{\sim}$.

(ii) $\forall\ x \in L : |\operatorname{Re} g(x)| \le \|x\|^{\sim}$.

3) *Ist* $(E, \|\cdot\|)$ *normierter Raum über* $\mathbb{C}$, $g \in E'$ *so gilt:*

$$||g|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\operatorname{Re} g(x)|}{\|x\|}. \quad \rtimes$$

» 1) "$\Rightarrow$": Sei also $f := \operatorname{Re} g$, so ist f trivialerweise reell linear. Weiterhin gilt $\operatorname{Im} g(x) = -\operatorname{Re} ig(x) = -\operatorname{Re} g(ix)$, also

$$g(x) = \operatorname{Re} g(x) + i \operatorname{Im} g(x) = f(x) - if(ix).$$

"$\Leftarrow$": Setze $g(x) := f(x) - if(ix)$, so ist $\operatorname{Re} g(x) = f(x)$ und für $x, y \in L$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Sei nun $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= f(\lambda x) - if(i\lambda x) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(ix) - i\alpha f(ix) - i\beta f(-x) \\ &= (\alpha + i\beta)(f(x) - if(ix)) = \lambda g(x). \end{aligned}$$

2) "$\Rightarrow$": $|\operatorname{Re} g(x)| \le |g(x)| \le \|x\|^{\sim}$.
"$\Leftarrow$": Setze $\varphi = \arg g(x)$, so gilt

$$|g(x)| = e^{-i\varphi} g(x) = \underbrace{g(e^{i\varphi} x)}_{\in \mathbb{R}} = \operatorname{Re} g(e^{i\varphi} x) \le \left\| e^{-i\varphi} x \right\|^{\sim} = \|x\|^{\sim}.$$

3) Für $g \equiv 0$ folgt die Aussage sofort. Sei $g \neq 0$, so folgt mit 1), $\operatorname{Re} g(x) \neq 0$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \|x\|^{\sim} &:= ||g|| \, \|x\|, \\ \|x\|^{\approx} &:= ||\operatorname{Re} g|| \, \|x\|, \end{aligned}$$

so sind $\|\cdot\|^{\sim}$ und $\|x\|^{\approx}$ Normen auf E.
"$\Rightarrow$": Sei $x \in E$, so gilt

$$\begin{aligned} |g(x)| \le \|x\|^{\sim} &\overset{2)}{\Rightarrow} |\operatorname{Re} g(x)| \le \|x\|^{\sim} = ||g|| \, \|x\| \\ &\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|\operatorname{Re} g(x)|}{\|x\|} \le ||g||. \end{aligned}$$

"⇐": Analog erhalten wir,

$$\left|\operatorname{Re} g(x)\right| \le \|x\|^{\approx} \Rightarrow \left|g(x)\right| \le \|x\|^{\approx} = \|\operatorname{Re} g\| \, \|x\|$$
$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\left|g(x)\right|}{\|x\|} \le \|\operatorname{Re} g\| . \quad \text{«}$$

4.12 **Satz von Hahn-Banach für Halbnormen** *Sei L linearer Raum über $\mathbb{K}$, $\|\cdot\|^{\sim} : L \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $M \le L$ und $f : M \to \mathbb{K}$ linear mit*

$$\forall\ x \in M : \left|f(x)\right| \le \|x\|^{\sim} .$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $F : L \to \mathbb{K}$ mit

$$\forall\ x \in L : |F(x)| \le \|x\|^{\sim} . \quad \rtimes$$

» *Fall 1.* Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $p(x) := \|x\|^{\sim}$, dann existiert nach 4.8 eine lineare Fortsetzung $F : L \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall\ x \in L : F(x) \le \|x\|^{\sim} ,$$

wobei

$$\forall\ x \in L : -F(x) = F(-x) \le \|-x\|^{\sim} = \|x\|^{\sim} .$$

Fall 2. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachte zunächst L als linearen Raum über $\mathbb{R}$ und setze

$$g : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Re} f(x),$$

so ist g linear und $\left|g(x)\right| \le \left|f(x)\right| \le \|x\|^{\sim}$. Wenden wir Fall 1 an, erhalten wir eine lineare Fortsetzung $G : L \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall\ x \in L : |G(x)| \le \|x\|^{\sim} .$$

Betrachte L nun wieder als Raum über $\mathbb{C}$ und setze $F(x) := G(x) - iG(ix)$, so ist F linear und da

$$\forall\ x \in L : |\operatorname{Re} F(x)| = |G(x)| \le \|x\|^{\sim} ,$$

gilt ebenfalls $|F(x)| \le \|x\|^{\sim}$.

F ist auch Fortsetzung vn f, denn für $x \in M$ gilt,

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = f(x). \quad \text{«}$$

» *Beweis von Satz 4.10* Für $f = 0$ folgt die Behauptung trivialerweise. Sei also $f \neq 0$ und

$$\|x\|^{\sim} := \|f\|\,\|x\|\,,$$

so ist $\|\cdot\|^{\sim}$ Norm auf E und $\left|f(x)\right| \leq \|x\|^{\sim}$ für $x \in M$. Nach 4.12 existiert somit eine lineare Fortsetzung $F : E \to \mathbb{K}$, so dass

$$\forall\ x \in E : |F(x)| \leq \|x\|^{\sim} = \|f\|\,\|x\| \Rightarrow \|F\| \leq \|f\|\,.$$

F ist aber Fortsetzung und daher $\|f\| \leq \|F\|$, also $\|f\| = \|F\|$. «

4.13 **Korollar** *1)* $\forall\ x_0 \in E \setminus \{0\}\ \exists\ f \in E' : \|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

2) Seien $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *linear unabhängig und seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, *dann*

$$\exists\ f \in E'\ \forall\ j = 1, \ldots, n : f(x_j) = \alpha_j. \quad \rtimes$$

» 1) Sei $M := \langle x_0 \rangle$ und $g : M \to \mathbb{K},\ \alpha x_0 \mapsto \alpha\,\|x_0\|$. g ist offensichtlich linear und $\left|g(\alpha x_0)\right| = |\alpha|\,\|x_0\|$, also

$$\|g\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\left|g(y)\right|}{\|y\|} = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{\left|g(\alpha x_0)\right|}{\|\alpha x_0\|} = 1.$$

Durch Anwendung des Satzes von Hahn-Banach erhalten wir eine lineare Fortsetzung $G \in E'$ mit $\|G\| = 1$ und $G(x_0) = \|x_0\|$.

2) $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ist endlich dimensional. Aus der linearen Algebra wissen wir, es existier eine lineare Abbildung

$$g : M \to \mathbb{K}, \qquad g(x_j) = \alpha_j.$$

Da $\dim M < \infty$, ist g beschränkt. Wir können also den Fortsetzungssatz anwenden. «

4.14 *Diskussion.* Falls $E \neq 0$, so $\exists\ x_0 \in E \setminus \{0\}$, so dass

$$\exists\ f \in E' : f(x) = \|x\| \neq 0.$$

Somit ist der Dualraum $E' = \mathcal{L}(E \to \mathbb{K})$ nicht leer. Außerdem gilt

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ f \in E' : f(x-y) = 0 \Leftrightarrow \ \forall\ f \in E' : f(x) = f(y).$$

Man sagt, der Dualraum trennt die Elemente von E. Statt $f(x)$ schreibt man auch $\langle f, x\rangle$ (Dualitätsprodukt).

Erklärung. Betrachte $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $E = L^p([a,b])$, so ist $E' = L^q([a,b])$ (später). Dann gilt für $f \in L^p$ und $g \in L^q$,

$$g(f) = \int_a^b f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = \langle f, \overline{g}\rangle\,. \quad ⊸$$

4.15 **Korollar** *Für $x \in E$ gilt,*

$$\|x\| = \sup\left\{ \left| f(x) \right| \ : \ f \in E' \wedge \|f\| \le 1 \right\},$$

und das Supremum wird angenommen. ⋊

» $f \in E'$ ist beschränkt, d.h. $\left| f(x) \right| \le \|f\|\,\|x\| \le \|x\|$. Mit 4.13 folgt

$$\exists\ f \in E' : \|f\| = 1 \wedge f(x) = \|x\|\,. \quad «$$

4.16 **Korollar** *Sei $M \le E$ abgeschlossen, $x_0 \in E \setminus M$. Dann existiert ein $f \in E'$ mit*

$$f\big|_M = 0 \text{ und } f(x_0) \neq 0. \quad ⋊$$

» Betrachte die Quotientenabbildung

$$\pi : E \to E/M, \quad x \mapsto [x].$$

Setzen wir $\|[x]\|_{E/M} := \inf\limits_{y \in M} \|x + y\|$, so ist π stetig (siehe Beweis 4.5). Weiterhin ist $\pi(x) = [0]$, falls $x \in M$ und $\pi(x_0) \neq 0$. Mit 4.13 folgt nun

$$\exists\ \varphi \in (E/M)' : \varphi([x_0]) = \|\pi(x_0)\|_{E/M} \neq 0.$$

Sei $f = \varphi \circ \pi$, so ist f beschränkt und linear, also $f \in E'$, sowie

$$f(x_0) = \varphi(\pi(x_0)) \neq 0, \qquad f(x) = \varphi(\pi(x)) = 0 \text{ falls } x \in M. \quad «$$

4.17 **Korollar** *Sei $M \leq E$, dann gilt*

1) $\overline{M} = \bigcap \{\ker f \,:\, f \in E' \wedge M \leq \ker f\}$.

2) *M liegt genau dann dicht in E, wenn*

$$\forall\, f \in E' : (f|_M = 0 \Rightarrow f = 0)\,. \quad \rtimes$$

» 1) $M \leq \ker f$, also ist $\overline{M} \leq \ker f$ und da f beliebig

$$\overline{M} \leq K := \bigcap \{\ker f \,:\, f \in E' \wedge M \leq \ker f\}\,.$$

$\overline{M} \supseteq K$ ist äquivalent zu $E/\overline{M} \subseteq E/K$. Sei also $x_0 \in E/\overline{M}$, dann folgt mit 4.16

$$\exists\, f \in E' : f|_{\overline{M}} = 0 \wedge f(x_0) \neq 0.$$

Für dieses f gilt nun $M \leq \ker f$ und $x_0 \notin \ker f$, also ist $x_0 \notin K$, d.h. $x_0 \in E/K$.

2) "$\Rightarrow$": Sei $x \in E$, (x_n) in M, $x_n \to x$. Für $f \in E'$ mit $f|_M = 0$ gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

"$\Leftarrow$": $\overline{M} = \bigcap \{\ker f \,:\, f \in E' \wedge M \leq \ker f\} = E$. «

4-D Reflexive Räume

Auf $\mathbb{R}$ lässt sich der *Satz von Bolzano-Weierstraß* beweisen, der besagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Dieser Satz lässt sich dann auf $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner jeden normierten Raum V mit $\dim V < \infty$ ohne zusätzliche Voraussetzungen oder Abschwächung der Aussage verallgemeinern. Nun stehen in der Funktionalanalysis die unendlichdimensionalen Räume im Mittelpunkt, jedoch kennen wir hier bereits Gegenbeispiele, bei denen die Aussage des Satzes falsch wird. Man betrachte zum Beispiel eine Abzählung der Einheitsvektoren,

$$e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \qquad e_{kn} = \delta_{nk}.$$

Diese ist beschränkt, enthält aber sicher keine konvergente Teilfolge.

Ziel dieses Abschnitts ist es nun, den Satz dahingehend auf unendlich dimensionale Räume zu verallgemeinern, dass jede beschränkte Folge eine in einem noch zu definierenden Sinne "schwach konvergente" Teilfolge enthält.

4.18 **Definition** *$E'' = (E')'$ heißt Bidualraum von E.* $\rtimes$

E'' ist stets ein Banachraum, da $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ vollständig ist.

4.19 **Einbettung** *Es existiert eine Isometrie $J_E : E \to E''$.* $\rtimes$

» Für $E = (0)$ ist die Aussage trivial, sei also $E \supsetneq (0)$. Zu $x \in E$ sei

$$T_x : E' \to \mathbb{K}, \; f \mapsto f(x).$$

T_x ist offensichtlich linear und beschränkt, denn

$$|T_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_E \, \|f\|_{E'}\,.$$

Also ist $T_x \in E''$. Da $x \neq 0$, folgt mit 4.13 die Existenz einer Abbildung $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\| = 1$ und $f_0(x) = \|x\|$. Für diese gilt,

$$|T_x(f_0)| = |f_0(x)| = 1 \cdot \|x_0\|_E\,,$$

also ist $\|T_x\|_{E''} = \|x\|_E$. Setze nun

$$J_E : E \to E'', \quad x \mapsto T_x,$$

so ist J_E Isometrie. «

Im Allgemeinen ist jedoch $\operatorname{im} J_E \subsetneq E''$, die Gleichheit gilt nur in einer speziellen Klasse von Räumen.

4.20 **Definition** *E heißt reflexiv, falls J_E surjektiv ist.* $\rtimes$

4.21 *Bemerkungen.* A. E'' ist vollständig und damit auch $\overline{\operatorname{im} J_E}$. Man erhält durch diese Einbettung also auch eine Vervollständigung von E, denn $\operatorname{im} J_E$ liegt dicht in $\overline{\operatorname{im} J_E}$ und $\operatorname{im} J_E$ ist isometrisch isomorph zu E (schreibe $J_E \cong E$).

B. Ist E reflexiv, so ist $E = J_E^{-1}(E'')$ ein Banachraum.

C. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

D. Sei $1 < p < \infty$, dann sind l^p und $L^p([a,b])$ reflexiv. ⊸

4.22 **Satz** *l^1 ist nicht reflexiv.* ⋊

» 1) $(l^1)' \cong l^\infty$. Setze dazu

$$\varphi : l^\infty \to (l^1)', \quad (a_n) \mapsto \varphi(a_n) \text{ mit } \varphi(a_n)(x_n) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

$\varphi(a_n)$ ist offensichtlich linear und beschränkt, denn

$$|\varphi(a_n)(x_n)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x_n| \le \sup_n |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|(a_n)\|_\infty \|(x_n)\|_1 < \infty.$$

Somit ist $\varphi(a_n) \in (l^1)'$ mit $\|\varphi(a_n)\|_{(l^1)'} \le \|(x_n)\|_1$, man prüft leicht nach, dass sogar die Gleichheit gilt, also ist $\varphi : l^\infty \to (l^1)'$ Isometrie.

φ ist surjektiv. Sei $f \in (l^1)'$, $e_k := (\delta_{nk})_n \in l^1$. Setze $a_k = f(e_k)$ für $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi(a_n)(e_k) = f(e_k) \Rightarrow \varphi(a_n)(x_l) = f(x_l),$$

da $\varphi(a_n)$ und f linear und stetig und l_{abb} dicht in l^1. Also ist $\varphi : l^\infty \to (l^1)'$ bijektive Isometrie.

2) Konstruiere $F \in (l^1)'' \setminus J_{l^1}(l^1)$.

Sei $M := \{(a_n) \in l^\infty \,:\, (a_n) \text{ konvergent}\}$, dann ist $M \le l^\infty$. Setze

$$\lim : M \to \mathbb{C}, \quad (x_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n,$$

so ist $\lim \in (l^\infty)'$ mit $\|\lim\|_{M'} \le 1$. Eine Anwendung des Satzes von Hahn-Banach liefert eine lineare Fortsetzung $\mathrm{Lim} : l^\infty \to \mathbb{C}$ mit $\|\mathrm{Lim}\| \le 1$.

Nun ist $\mathrm{Lim} \circ \varphi^{-1} \in (l^1)''$. Zeige, dass $\mathrm{Lim} \circ \varphi^{-1} \notin J_{l^\infty}(l^\infty)$.

$$\begin{tikzcd} (l^1)' \arrow[rr, "\varphi^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{Lim}\circ\varphi^{-1}"'] & & l^\infty \arrow[dl, "\mathrm{Lim}"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

4.1 **Zur Konstruktion von** Lim**.**

Angenommen $\mathrm{Lim} \circ \varphi^{-1} \in J_{l^\infty}(l^\infty)$, d.h.

$$\exists\ (x_n) \in l^1 : T_{(x_n)} = \mathrm{Lim} \circ \varphi^{-1},$$
$$\Rightarrow \forall\ f \in (l^1)' : f(x_n) = T_{(x_n)}(f) = \mathrm{Lim} \circ \underbrace{\varphi^{-1}(f)}_{:=a_n}.$$

Dann ist $f(x_n) = \varphi(a_n)(x_n)$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ (a_n) \in l^\infty : \varphi(a_n)(x_n) = \mathrm{Lim}(a_n)$$

Setze also $(a_n) := e_k$, so gilt

$$\varphi(e_k)(x_n) = x_k = \mathrm{Lim}((\delta_{nk})_n) = \lim((\delta_{nk})_n) = 0.$$

Somit ist $x_n \equiv 0$ und $\mathrm{Lim}(a_n) \equiv 0,\ \ \forall\ (a_n) \in l^\infty$. Dies ist offensichtlich ein Wiederspruch. «

4.23 **Lemma** *1) Sind $E \cong F$ und E reflexiv, so ist F reflexiv.*

2) Ist E reflexiv und $M \leq E$ abgeschlossen, so ist auch M reflexiv.

3) Sei E Banachraum, so ist E genau dann reflexiv, wenn E' reflexiv ist. Insbesondere ist E genau dann reflexiv, wenn E'' reflexiv ist.

» 1) Zu $x'' \in F''$ setze

$$p^{**}(x'')(y' : E \to \mathbb{K}) := x''(y' \circ \varphi),$$

so ist $\varphi^{**}(x'') : E' \to \mathbb{K}$ linear und beschränkt, denn

$$\left|\varphi^{**}(x'')(y')\right| \leq \|x''\|_{F''} \|y' \circ \varphi\|_{F'} \leq \|x''\|_{E''} \|\varphi\|_{F\to E} \|y'\|_{E'}.$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
J_F(F) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] & J_E(E) \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] \\
F'' \arrow[r, "\varphi^{**}"] & E''
\end{tikzcd}$$

4.2 **Zur Konstruktion von φ^{**}.**

Also ist $\varphi^{**}(x'') \in E''$. E ist reflexiv, d.h. $\exists\ y \in E : \varphi^{**}(x'') = J_E(y)$.

Wir zeigen nun, dass $x'' = J_F(\varphi^{-1}(y))$.

Für $x' \in F'$ gilt,

$$\begin{aligned}
x''(x') &= x''(x \circ \varphi^{-1})(\varphi) = \varphi^{**}(x'')(x \circ \varphi^{-1}) \\
&= J_E(y)(x' \circ \varphi^{-1}) = x' \circ \varphi^{-1}(y) = J_F(\varphi^{-1}(y))(x'),
\end{aligned}$$

d.h. $\forall\ x'' \in F''\ \exists\ x \in F : x'' = J_F(x)$.

2) Sei $x'' \in M''$ wir haben zu zeigen, dass ein $x \in M$ existiert so dass $J_M(x) = x''$, d.h. $T_x(f) = x''(f)$, $\ \forall\ f \in M'$.

Zu $y' \in E'$, dann ist $y|_M \in M'$, setze $y''(y') := x''(y'|_M)$, so ist y'' offensichtlich linear und beschränkt, denn

$$|y''(y')| = |x''(y'|_M)| \le \|x''\|_{M''} \|y'|_M\|_{E'} \le \|x''\|_{M''} \|y'\|_{E'},$$

also ist $y'' \in E''$.

E ist reflexiv, also existiert ein $y \in E$, sodass $J_E(y) = T_y = y''$.

Sei nun $y' \in E'$ mit $y|_M = 0$, dann ist

$$y'(y) = T_y(y') = y''(y') = x''(y'|_M) = 0.$$

Also ist $y \in \ker y'$. 4.17 besagt

$$\overline{M} := \bigcap \{\ker f\ :\ f \in E' \wedge M \le \ker f\}$$

also ist $y \in \overline{M} = M$, da es in jedem dieser Kerne enthalten ist.

Sei nun $x' \in M'$, dann lässt sich x' mit dem Satz von Hahn-Banach fortsetzen zu $\xi' \in E'$ mit $||\xi'||_{E'} = \|x'\|_{M'}$. Dann ist

$$x'(y) = \xi'(y) = T_y(\xi') = y''(\xi) = x''(\xi|_M) = x''(x'),$$
$$\Rightarrow \forall\ x' \in M' : x''(x') = x'(y) = J_M(y)(x').$$

3) "$\Rightarrow$": Sei $x''' \in E'''$. Wir haben zu zeigen, dass ein $x' \in E'$ existiert mit $J_{E'}(x') = x'''$. Die Komposition

$$x''' \circ J_E : E \to \mathbb{K}$$

ist ein Element in E'. Da E reflexiv, ist J_E invertierbar. Für $x'' \in E''$ ist daher,

$$x'''(x'') = x'''(J_E \circ J_E^{-1}(x'')) = (x''' \circ J_E)\,(J_E^{-1}(x'')).$$

Setze $x := J_E^{-1}(x'') \in E$ und $f := x''' \circ J_E \in E'$, dann ist

$$\ldots = f(x) = T_x(f) = J_E(x)(f) = x''(f) = T_f(x'') = J_{E'}(f)(x'')$$

Also ist $x''' = J_{E'}(f) \in J_{E'}(E')$ und damit ist $J_{E'}$ surjektiv.

"$\Leftarrow$": E' ist reflexiv, also ist mit dem eben bewiesenen auch E'' reflexiv. $J_E(E) \leq E''$ ist als Bild des Banachraumes E unter einer Isometrie ebenfalls Banachraum und damit abgeschlossen. Also ist $J_E(E)$ reflexiv aber $J_E(E)$ und E sind isometrisch isomorph, also ist auch E reflexiv. «

4.24 **Definition** *Eine Folge (x_n) in E heißt schwach konvergent gegen $x \in E$, falls*

$$\forall\ f \in E' : f(x_n - x) \to 0.$$

Wir schrieben in diesem Fall $x_n \rightharpoonup x$. ⋊

4.25 **Bsp** a.) Sei $E = l^2$ und $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$.
Sei $f \in E' = l^2$, d.h. es gibt eine Folge $(a_n) \in l^2$, so dass

$$\forall\ (x_n) \in l^2 : f((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Somit gilt $f(e_k) = a_k \to 0$, da $\sum_{k \geq 1} |a_k|^2 < \infty$ unabhängig vom gewählten f, d.h.

$$\forall\ f \in E' : f(e_k) \to 0,$$

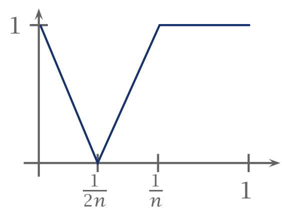
also $e_k \rightharpoonup 0$ obwohl $\|e_k\|_2 = 1$ also $\neg(e_k \to 0)$. Hier gilt also

$$\|0\|_2 < \lim_{k \to \infty} \|e_k\|_2 .$$

b.) Sei $E = C([0,1] \to \mathbb{C})$ mit $\|\cdot\|_\infty$.
Man kann zeigen, dass

$$f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x), \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

Schwache Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ entspricht also der punktweisen Konvergenz, während Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz entspricht. (Siehe [Werner] S. 107)



4.3 **Zur Konstruktion von f_n.**

Definiere f_n wie in Skizze, dann $f_n \to 1$ punktweise, d.h. $f_n \rightharpoonup 1$ mit

$$||f_n||_\infty = 1 = ||f||_\infty$$

aber $||f - f_n||_\infty = 1$, d.h. $\neg(f_n \to f)$. ■

4.26 **Satz** *1) Der schwache Grenzwert ist eindeutig.*

2) $x_n \to x$ impliziert $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

3) Ist (x_n) schwach konvergent, so ist (x_n) beschränkt.

4) Konvergiert $x_n \rightharpoonup x$, so gilt

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| . \quad \rtimes$$

» 1) Sei (x_n) Folge in E mit schwachen Grenzwerten x, y, d.h.

$$\forall\ f \in E' : f(x_n - x) \to 0 \wedge f(x_n - y) \to 0,$$

d.h. $f(x) - f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x - x_n) + f(x_n - y) = 0, \ \ \forall\ f \in E'$. Mit 4.14 folgt somit, dass $x = y$.

2) Übung.

3) Sei $x_n \rightharpoonup x$, d.h.

$$\forall\ f \in E' : f(x_n) \to f(x) \Leftrightarrow \ \forall\ f \in E' : T_{x_n}(f) \to T_x(f).$$

Da $T_{x_n} \to T_x$ punktweise, ist für jedes f die Folge $T_{x_n}(f)$ beschränkt. Der Satz von Banach-Steinhaus sagt somit, dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|T_{x_n}\right\| =: c < \infty$, d.h. $\forall\ n \in \mathbb{N} : \left\|T_{x_n}\right\| = \|x_n\| < c$.

4) Nach Voraussetzung konvergiert $T_{x_n}(f) \to T_x(f)$, wobei

$$\left\|T_{x_n}(f)\right\| \le \left\|T_{x_n}\right\| \left\|f\right\| = \|x_n\| \left\|f\right\| .$$

Somit gilt für $n \in \mathbb{N}$, $\|x\| = \|T_x\| \le \|x_n\|$ und damit

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| . \quad «$$

4.27 **Beobachtung** *Sei E reflexiv und (x_n) Folge in E. Dann ist*

$$M := \overline{\{\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\}} = \overline{\{\ \text{endliche Linearkombinationen}\ \}} \le E$$

abgeschlossen und daher reflexiv. Weiterhin liegt

$$M_{\mathbb{Q}} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\beta_j) x_j \ :\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

dicht in M und ist abzählbar. $\rtimes$

4.28 **Definition** *E heißt separabel, wenn E eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.* $\rtimes$

4.29 **Lemma** *Ist E' separabel, so ist E separabel.* $\rtimes$

» Sei $\{x_1', x_2', \ldots\} \subseteq E'$ dicht. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in E$ mit $\|x_n\| = 1$ und $|x_n'(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n'\|$, dann ist

$$M := \langle\{x_1, \ldots\}\rangle \leq E$$

Zu zeigen ist nun, dass $\overline{M} = E$. Sei $x' \in E'$ mit $x' \,|\, M = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x' - x_n'\| &\geq |(x' - x_n')(x_n)| = |x_n'(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n'\| = \frac{1}{2}\|x_n' - x' + x'\| \\ &\geq \frac{1}{2}(\|x'\| - \|x_n' - x'\|).\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}&\|x'\| \leq 3\|x_n' - x'\|, && n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow &\|x'\| \leq 3 \inf_n \|x_n' - x'\| = 0,\end{aligned}$$

Somit ist $x' = 0$, mit 4.17 folgt nun, dass $\overline{M} = E$. Nun ist $M_{\mathbb{Q}}$ abzählbar und dicht in E, also ist E separabel. «

4.30 **Satz** *Sei E reflexiv, dann besitzt jede beschränkte Folge in E eine schwach konvergente Teilfolge.* $\rtimes$

» Sei also (x_n) beschränkte Folge in E mit $\sup_n \|x_n\|_E = c < \infty$.

1) Setze $M = \overline{\langle x_1, x_2, \ldots\rangle}$, dann ist $M \leq E$ abgeschlossen, separabel und nach 4.23 außerdem reflexiv, d.h. $M'' = J_M(M)$. Somit ist M'' als Bild eines separablen Raumes unter einer Isometrie ebenfalls separabel und daher ist nach 4.29 auch M' separabel, d.h. $M' = \overline{\{y_1', y_2', \ldots\}}$.

2) *Konstruktion einer konvergenten Teilfolge von $J_M(x_n)$.* Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|J_M(x_n)(y_j')\right| \leq \|J_M(x_n)\|_{E''} \left\|y_j'\right\|_{E'} = \|x_n\|_E \left\|y_j'\right\|_{E'},$$

d.h. die Folge $\big(J_M(x_n)(y'_j)\big)$ ist beschränkt in $\mathbb{K}$. Somit existiert zu y'_1 eine konvergente Teilfolge $(J_M(x_n^{(1)})(y'_1))$. Nun ist auch $(J_M(x_n^{(1)})(y'_2))$ beschränkt und besitzt daher ebenfalls eine Konvergente Teilfolge $(J_M(x_n^{(2)})(y'_2))$ usw. Dies können wir nun *ad infinitum* fortführen.

Setze $\xi_n = x_n^{(n)}$, so ist diese Diagonalfolge ebenfalls Teilfolge von (x_n) und daher beschränkt und für jedes $j \in \mathbb{N}$ konvergiert $(J_M(\xi_n)(y'_j))$ für $n \to \infty$.

3) *Definition des Grenzelementes.* Sei

$$x'' : \{y'_1, y'_2, \ldots\} \to \mathbb{K}, \quad y'_j \mapsto \lim_{n\to\infty} J_M(\xi_n)(y'_j),$$

so lässt sich x'' linear auf die lineare Hülle $\langle y'_1, y'_2, \ldots\rangle$ wie folgt fortsetzen,

$$x''\left(\sum_{k=1}^{K} \lambda_k y'_{j_k}\right) := \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \lim_{n\to\infty} J_M(\xi_n)(y'_{j_k}).$$

Die Fortsetzung ist ebenfalls beschränkt, denn für $x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k y'_{j_k}$ gilt

$$\begin{aligned} |x''(x)| &= \left|\lim_{n\to\infty} J_M(\xi_n)(x)\right| \le \limsup_{n\to\infty} ||J_M(\xi_n)||_{E''} \, \|x\|_{E'} \\ &= \limsup_{n\to\infty} ||\xi_n||_{E''} \, \|x\|_{E'} \le c \, \|x\|_{E'} . \end{aligned}$$

Da $\langle y'_1, y'_2, \ldots\rangle$ dicht in M' liegt, können wir den Fortsetzungssatz 2.5 anwenden und erhalten eine eindeutige Fortsetzung

$$x'' : M' \to \mathbb{K}, \qquad ||f||_{M''} = ||x''||_{M'} \le c.$$

4) Sei $x := J_M^{-1}(f)$. Wir haben nun zu zeigen, dass $\xi_n \rightharpoonup x$ in E. Sei also $f \in E'$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(\xi_n) - f(x)| &= |f|_M(\xi_n) - f|_M(x)| = |J_M(\xi_n)(f|_M) - J_M(x)(f|_M)| \\ &\le \underbrace{\left|J_M(\xi_n)(f|_M - y'_j)\right|}_{(1)} + \underbrace{\left|J_M(\xi_n)(y'_j) - x''(y'_j)\right|}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\left|x''(y'_j - f|_M)\right|}_{(2)} . \end{aligned}$$

Nun gilt

$$(1) \leq \|J_M(\xi_n)\|_{E''} \left\| f\,|_M - y_j' \right\|_{E'} \leq c \left\| f\,|_M - y_j' \right\|_{E'} < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$(2) \leq \|x''\|_{M''} \left\| y_j' - f\,|_M \right\|_{E'} \leq c \left\| f\,|_M - y_j' \right\|_{E'} < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$(3) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > N_\varepsilon \text{ bei } y_j' \text{ fest.}$$

Also ist der gesamte Ausdruck $< \varepsilon$, d.h. $f(\xi_n) \to f(x)$. «

4.31 **Definition** *$K \subseteq L$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in K$ gilt,*

$$\forall\ \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in K. \quad ⋊$$

4.32 **Bsp** Sei E ein normierter Raum.

a.) *Kugeln sind konvex.* Betrachte also die Kugel mit Radius R um x_0 und x, y seien so gewählt, dass $\|x - x_0\|_E < R$ und $\|y - x_0\|_E < R$, dann gilt auch

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda) y - x_0\|_E &= \|\lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - x_0)\|_E \\ &\leq \lambda \|x - x_0\|_E + (1-\lambda) \|y - x_0\|_E < R.\end{aligned}$$

b.) *Halbräume sind konvex.* Betrachte

$$K := \{x \in E : \operatorname{Re} f(x) \leq \alpha\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \in E'.$$

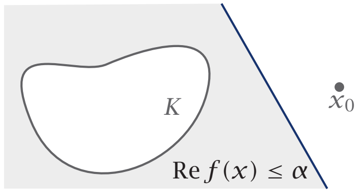
Sind $x, y \in K$, so gilt auch

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &= \lambda \operatorname{Re} f(x) + (1-\lambda) \operatorname{Re} f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\ &= \alpha. \quad ■\end{aligned}$$

4.33 **Trennungssatz** *Sei $K \subseteq E$ konvex und abgeschlossen, $x_0 \in E \setminus K$. Dann gibt es ein $f \in E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\operatorname{Re} f(x_0) > \alpha \text{ und } \forall\ x \in K : \operatorname{Re} f(x) \leq \alpha. \quad ⋊$$

» 1) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.



4.4 **Zum Trennungssatz.**

(a) Wir können ohne Einschrädnkung annehmen, dass $0 \in K^\circ$, denn andernfalls verschieben wir K und x_0 so, dass $0 \in K$ und ersetzen K durch,
$$\left\{x \in E : d(x, K) \geq \frac{1}{2} d(x_0, K)\right\}.$$
Man kann in leicht zeigen, dass diese Menge konvex ist.

(b) Sei $p : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \inf\{r > 0 : r^{-1}x \in K\}$. p ist wohldefiniert, da $K_\varepsilon(0) \subseteq K$ und damit $\left(\frac{2}{\varepsilon}\|x\|\right)^{-1} x \in K_\varepsilon(0)$, also ist die Menge nicht leer und das Infimum endlich.

p heißt Minkowskifunktional und hat folgende Eigenschaften,

(i) $0 \leq p(x) < \infty$.

(ii) $\forall\, x \in K : p(x) \leq 1$.

(iii) $p(x_0) > 1$.

(iv) $p(\lambda x) = \lambda x$, falls $\lambda \geq 0$

(v) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

(i)-(ii) sind klar.
Angenommen $p(x_0) = 1$, dann existiert eine Folge in K, die gegen x_0 konvergiert, K ist abgeschlossen also $x_0 \in K$. ↯Ist hingegen $p(x_0) < 1$, dann ist $\frac{x_0}{r} \in K$ für ein $r < 1$ und damit auch $(1-r)\cdot 0 + r\frac{x_0}{r} \in K$. ↯
Also folgt (iii).
Zu (iv): Sei $\lambda > 0$, dann ist $\frac{\lambda x}{\lambda r} \in K \Leftrightarrow \frac{x}{r} \in K$. $p(0) = 0$ ist klar.
Zu (v): Seien $r^{-1}x, s^{-1}y \in K$, dann ist
$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K.$$

Also ist p sublinear.

(c) Setze $T : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}, \lambda x_0 \mapsto \lambda p(x_0)$, dann ist T linear und p-beschränkt, denn

$$\lambda \le 0 : T\lambda x_0 \le 0 \le p(\lambda x_0),$$
$$\lambda > 0 : T\lambda x_0 = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0).$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt nun, dass eine lineare, p-beschränkte Fortsetzung $\tilde{T} : E \to \mathbb{R}$ existiert. Insbesondere gilt

$$\forall\ x \in K : \tilde{T}(x) \le p(x) \le 1,$$
$$\tilde{T}(x_0) = T(x_0) = p(x_0) > 1.$$

(d) $\tilde{T} \in E'$, denn $K_\varepsilon(0) \subseteq K$ und daher gilt $\forall\ x \in E : \frac{x}{\varepsilon/2\|x\|} \in K$,

$$\Rightarrow \forall\ x \in E : p(x) \le \frac{\varepsilon}{2} \|x\|,$$
$$\tilde{T}(x) \le p(x) \le \frac{\varepsilon}{2} \|x\|$$
$$-\tilde{T}(x) = \tilde{T}(-x) \le \frac{\varepsilon}{2} \|x\|.$$

2) Sie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Fasse E als Raum über $\mathbb{R}$ auf und konstruiere $\tilde{T}$ wie in 1.). Setze anschließend

$$f(x) = \tilde{T}(x) - i\tilde{T}(ix). \quad «$$

4.34 **Satz** *Eine konvexe abgeschlossene Menge $K \subseteq E$ ist schwach folgenabgeschlossen, d.h. der schwache Grenzwert x einer Folge (x_n) in K, die schwach in E konvegiert, liegt in K.* ⋊

» Sei also (x_n) Folge in K, die schwach in E konvergiert, d.h.

$$\forall\ f \in E' : f(x_n) \to f(x), \qquad x \in K.$$

Angenommen $x \in E \setminus K$. Wir können also den Trennungssatz auf x anwenden und erhalten somit ein $f \in E'$ mit

$$f(x) > \alpha, \qquad \forall\ y \in K : f(y) \le \alpha.$$

Nun gilt aber $x_n \rightharpoonup x$ und daher auch

$$\forall\ n \in \mathbb{N} f(x_n) \le \alpha \Rightarrow f(x) \le \alpha. ⚡ \quad «$$

4.35 **Satz** *Sei E reflexiv und $K \subseteq E$ konvex und abgeschlossen, $x_0 \in E \setminus K$. Dann gilt*

$$\exists\ y_0 \in K : ||x_0 - y_0||_E = d(x_0, K). \quad ⋊$$

» Sei (y_n) Folge in K mit $||x_0 - y_n|| \to d(x_0, K)$, dann ist (y_n) beschränkt. Somit existiert eine schwach konvergente Teilfolge (y_{n_k}) mit Grenzwert y. Nach 4.34 ist $y \in K$. Außerdem gilt $x_0 - y_{n_k} \rightharpoonup x_0 - y$ also mit 4.26 auch

$$||y - x_0|| = \liminf_n ||y_{n_k} - x_0|| = d(x_0, K). \quad «$$

4.36 **ANWENDUNG** Betrachte eine kreisförmige dünne Membran, die am Rand befestigt ist. Nun wird ein Hindernis unter die Membran geschoben, so dass diese sich diese nach oben ausdehnt. Wir interessieren uns nun für die Form, die die Membran annimmt, abhängig vom Hindernis.

Zur Modellierung der Membran, betrachte eine Funktion $z = u(x, y)$ mit $(x, y) \in G = K_r(0)$, die die Auslenkung im Punkt (x, y) beschreibt. Die Befestigung am Rand modellieren wir durch $u|_{\partial G} = 0$.

Die Membran beschreibt ein konservatives System. Die Energie ist also erhalten und aus der Physik wissen wir, dass sie folgende Form hat:

$$E : C_0^1(G) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto E(u) = \int_G |\partial_x u|^2 + \left|\partial_y u\right|^2 \mathrm{d}\mu(x, y),$$
$$C_0^1(G) := \left\{ f \in C^1(G \to \mathbb{R}) \ : \ f|_{\partial G} = 0 \right\}.$$

Gesucht ist nun ein $u \in C_0^1(G)$, so dass $E(u)$ minimal wird. Dazu führen wir auf $C_0^1(G)$ die Norm

$$\|u\|_2 = \int_G |u|^2 + |\partial_x u|^2 + \left|\partial_y u\right| \mathrm{d}\mu(x, y)$$

ein. Auf $C_0^1(G)$ sind $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|$ äquivalent. Die Vervollständigungen bezüglich dieser Normen sind also identisch:

$$W_0^{1,2}(G) = \overline{C_0^1(G)}^{\|\cdot\|_2} = \overline{C_0^1(G)}^{\|\cdot\|}.$$

$W_0^{1,2}(G)$ ist ein sogenannter Sobolveraum. Wir werden später zeigen, dass dieser reflexiv ist.

Modellieren wir das Hinderniss durch die Funktion $z = f(x,y)$, so besteht unser Problem darin, $u \in W_0^{1,2}(G)$ zu finden mit

$$u \in K := \overline{\left\{u \in C_0^1(G) \,:\, u(x,y) \geq f(x,y)\right\}}.$$

K ist abgeschlossen und konvex. Ist $\|u\|$ minimal, dann ist auch $E(u) = \|u\|^2$ minimal. Falls f stetig, existiert nun ein $(x,y) \in G$ mit $f(x,y) > 0$, d.h. $0 \notin K$. Mit 4.35 folgt nun

$$\exists\ u \in K : \|u - 0\| = d(0,K) = \inf_{v \in K} \|v - 0\|\,,$$
$$\Rightarrow \|u\| = \min_{v \in K} \|v\|\,.$$

Wir haben somit die Existenz *einer* Lösung nachgewiesen. Ob diese Eindeutig ist oder wie diese konkret aussieht, ist ein weiteres Problem. ■

5 Hilberträume

"…sind die schönsten Banach-Räume" — B. Kümmerer

5.1 **Definition** *Sei L ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L \times L \to \mathbb{K}$$

heißt Skalarprodukt, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(a) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha \langle x_1, y\rangle + \beta \langle x_2, y\rangle$.

(b) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(c) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(d) $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Sind nur (a)-(c) erfüllt, so heißt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Semiskalarprodukt. ⋊

Aus (a) folgt insbesondere, dass $\langle 0, y\rangle = 0$.
(a) und (b) besagen weiterhin, dass $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y_1\rangle + \overline{\beta} \langle x, y_2\rangle$.
(c) ist sinnvoll, da nach (b) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

5.2 **Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung** *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Semi-Skalarprodukt. Dann gilt*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle .$$

Falls $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt, dann gilt die Gleichheit genau dann, wenn $\{x, y\}$ linear abhängig. ⋊

» 1) Der Fall $\langle x, y\rangle = 0$ ist klar, sei also $\langle x, y\rangle \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda \langle x, y\rangle\, y, x + \lambda \langle x, y\rangle\, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \lambda \overline{\langle x, y\rangle} \langle x, y\rangle + \lambda \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle + \lambda^2 \left|\langle x, y\rangle\right|^2 \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\lambda \left|\langle x, y\rangle\right|^2 + \lambda^2 \left|\langle x, y\rangle\right|^2 \langle y, y\rangle =: p(\lambda). \end{aligned}$$

Da p Polynom 2. Grades und ≥ 0, hat p höchstens eine Nullstelle und daher ist die Diskriminante der Mitternachtsformel ≤ 0, d.h.

$$\begin{aligned} & 0 \geq 4 \left|\langle x, y\rangle\right|^4 - 4 \left|\langle x, y\rangle\right|^2 \langle y, y\rangle \langle x, x\rangle \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geq \left|\langle x, y\rangle\right|^2 - \langle y, y\rangle \langle x, x\rangle . \end{aligned}$$

2) “$\Leftarrow$”: Sei $\{x, y\}$ linear abhängig, d.h. $x = \alpha y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left|\langle x, y\rangle\right|^2 = \left|\langle x, \alpha y\rangle\right|^2 = |\alpha|^2 \left|\langle y, y\rangle\right|^2, \\ &\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle = \alpha\overline{\alpha} \langle y, y\rangle^2 |\alpha|^2 \left|\langle y, y\rangle\right|^2 . \end{aligned}$$

“$\Rightarrow$”: Seien $\langle x, y\rangle$ linear unabhängig, dann ist insbesondere $x \neq 0$. Nun existiert ein $\alpha \in \mathbb{K}$, so dass

$$\langle y, x\rangle - \alpha \langle x, x\rangle = 0,$$

wobei $y - \alpha x \neq 0$ aber $\langle y - \alpha x, x\rangle = 0$. Somit ist

$$\begin{aligned} \langle y, y\rangle &= \langle y - \alpha x + \alpha x, y - \alpha x + \alpha x\rangle \\ &= \underbrace{\langle y - \alpha x, y - \alpha x\rangle}_{>0} + |\alpha|^2 \langle x, x\rangle . \end{aligned}$$

Es gilt also $\langle y, y\rangle > |\alpha|^2 \langle x, x\rangle$ und wir erhalten

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 = \left|\langle x, y - \alpha x + \alpha x\rangle\right|^2 = |\alpha|^2 |\langle x, x\rangle|^2 < \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle . \quad «$$

5.3 **Satz** *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein (Semi)-Skalarprodukt auf L. Dann definiert*

$$\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine (Halb)-Norm. ⋊

» Die Abbildung ist wohldefiniert und (N1), (N2) und (N3) sind klar. Zu (N4) betrachte,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$ «

5.4 *Nota Bene.* $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. ⊸

5.5 **Definition** *Sei H ein linearer Raum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle x,x\rangle$ existiert, versehen mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm*

$$\|x\|_H := \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Dann heißt H Prähilbertraum. Ist H außerdem Banachraum, so heißt H Hilbertraum. Schreibe auch $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. ⋊

5.6 **Bsp** a.) $H = \mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$ und der dadurch induzierten Norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ ist ein Hilbertraum.

b.) $H = l^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle (x_n),(y_n)\rangle = \sum_{j=1}^\infty x_j\overline{y_j}$ und der dadurch induzierten 2-Norm $\|(x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2\right)^{1/2}$ ist ebenfalls ein Hilbertraum.

c.) $H = C([0,1] \to \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{[0,1]} f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$ und der dadurch induzierten 2-Norm $\|f\| = \left(\int_{[0,1]} |f|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$ ist lediglich ein Prähilbertraum. Seine Vervollständigung ist der $L^2([0,1] \to \mathbb{C})$. ■

5.7 **Lemma** *Das Skalarprodukt ist in beiden Argumenten stetig bezüglich der induzierten Norm.* ⋊

» Seien also (x_n), (y_n) Folgen in H, $x,y \in H$ sowie $\|x_n - x\|, \|y_n - y\| \to 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle - \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0}\underbrace{\|y_n\|}_{\leq C} + \|x\|\underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} \to 0. \end{aligned}$$ «

5.8 **Satz** *Ist H ein Prähilbertraum, so ist die Vervollständigung $\overline{H}$ (siehe 1.16) ein Hilbertraum.* ⋊

» H wird mit der induzierten Norm zum normierten Raum. Mit Satz 1.16 erhalten wir somit die eindeutige Vervollständigung $\overline{H}$. Definiere nun für $x, y \in \overline{H}$

$$\langle x, y\rangle_{\overline{H}} := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_H, \qquad x_n \to x, \quad y_n \to y.$$

Der Limes ist unabhängig von den gewählten Folgen (x_n) und (y_n), also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\overline{H}}$ ein Skalarprodukt und die Norm auf $\overline{H}$ induziert durch ebendieses. «

Der folgende Satz macht eine Aussage darüber, wie man — falls ein Skalarprodukt auf H existiert — dieses aus der induzierten Norm zurückerhält.

5.9 **Satz** *1) Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt die Polarisationsformel*

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right),$$

wobei im Fall eines reellen Hilbertraums der Imaginärteil ignoriert wird.

Außerdem gilt die Parallelogrammgleichung,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

2) Ist $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum, dann ist E genau dann ein Prähilbertraum, wenn $\|\cdot\|$ die Parallelogrammungleichung erfüllt. ⋊

5.10 **Definition** (a) *$x, y \in H$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y\rangle = 0$.*

(b) *$A, B \subseteq H$ heißen orthogonal, falls*

$$\forall\ x \in A\ \forall\ y \in B : \langle x, y\rangle = 0.$$

(c) *Sei $A \subseteq H$, dann heißt $A^\perp := \{y \in H : \ \forall\ x \in A : \langle x, y\rangle = 0\}$ orthogonales Komplement.* ⋊

5.11 *Bemerkungen.* A. Für $x, y \in H$ mit $x \perp y$ gilt der Satz des Pythagoras,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

B. $A^\perp$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von H, denn für $y, z \in A^\top$, $x \in A$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle y + z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = 0, \qquad \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = 0.$$

Sei nun (y_n) Folge in $A^\perp$ mit Grenzwert $y \in H$, dann gilt für $x \in A$

$$\langle y, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, x \rangle = 0.$$

Also ist $y \in A^\perp$, d.h. $A^\perp$ ist abgeschlossen. ⊸

5.12 **Satz** *Sei H Hilbertraum, $K \subseteq H$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \in H$ dann gibt es genau ein $x \in K$, so dass*

$$\|x - x_0\| = d(x_0, K). \quad ⋊$$

» *Existenz.* Sei (x_n) Folge in K mit $\|x_n - x_0\| \to d(x_0, K)$. Dann ist (x_n) Cauchyfolge, denn

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|x_n - x_0 - (x_m - x_0)\|^2 \\ &\overset{\text{PG}}{=} 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2 - 4\left\|x_0 - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2(d(x_0, K)^2 + \varepsilon) + 2(d(x_0, K)^2 + \varepsilon) - 4d(x_0, K)^2 = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Also $x_n \to x$ in H, da K abgeschlossen ist $x \in K$ und es gilt

$$\|x - x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = d(x_0, K).$$

Eindeutigkeit. Seien $x, \tilde{x} \in K$ und $\|x - x_0\| = \|\tilde{x} - x_0\| = d(x_0, K)$. Betrachte $x_n = (x, \tilde{x}, x, \tilde{x}, \ldots)$, dann ist nach obiger Rechnung x_n Cauchy und hat daher einen eindeutigen Grenzwert, also $x = \tilde{x}$. «

5.13 *Vereinbarung.* Im Folgenden sei H immer ein Hilbertraum. ⊸

5.14 **Projektionssatz** *Sei M abgeschlossener linearer Teilraum von H und $x_0 \in H$. Dann gilt*

1) *Für $y \in M : ||y - x_0|| = d(x_0, M)$ genau dann, wenn $y - x_0 \perp M$.*

2) Es gibt genau ein $u \in M$ und genau ein $v \in M^\perp$, so dass $x_0 = u + v$.

3) Die Abbildung $P_M : H \to M$, $x_0 \mapsto u$ ist linear und stetig. Falls $M \neq (0)$, so ist $\|P_M\| = 1$ und $P_M^2 = P_M$. P_M heißt orthogonale Projektion auf M. ⋊

» 1) Betrachte für $z \in M \setminus \{0\}$, $y + \alpha \frac{z}{\|z\|}$ mit $\alpha := \left\langle x_0 - y, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle$.

$$\begin{aligned} d(x_0, M)^2 &\leq \left\| x_0 - \left(y + \alpha \frac{z}{\|z\|} \right) \right\|^2 = \left\| (x_0 - y) - \alpha \frac{z}{\|z\|} \right\|^2 \\ &= \|x_0 - y\| + |\alpha|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\langle x_0 - y, \alpha \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \\ &= \|x_0 - y\|^2 - |\alpha|^2 . \end{aligned}$$

Also ist $\|x_0 - y\|^2 = d(x_0, M)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\forall\ z \in M \setminus \{0\} : \langle x_0 - y, z \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall\ z \in M : \langle x_0 - y, z \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x_0 - y \perp M . \end{aligned}$$

2) M ist linearer Teilraum also insbesondere konvex. Mit 5.12 folgt somit, dass genau ein $u \in M$ existiert, so dass

$$d(x_0, M) = \|u - x_0\| .$$

Mit a.) folgt dann auch $v = u - x_0 \in M^\perp$ und v ist eindeutig, da u eindeutig.

3) *Linearität.* Seien $x_1 = u_1 + v_1$, $x_2 = u_2 + v_2$ mit der eben bewiesenen Zerlegung. Dann ist

$$P_M(x_1 + x_2) = P_M(u_1 + u_2 + v_1 + v_2),$$

wobei $u_1 + u_2 \in M$ und $v_1 + v_2 \in M^\perp$, also

$$\ldots = u_1 + u_2 = P_M(x_1) + P(x_2).$$

Stetigkeit. $\|P_M(x)\|^2 = \|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \|u + v\|^2 = \|x\|^2$, also $\|P_M\| \leq 1$. Sei weiterhin $x \in M \setminus \{0\}$, dann ist $\|P_M(x)\| = \|x\|$, also ist $\|P_M\| = 1$.

Sei $x = u + v$, dann ist $P_M x = u$ und $P_M u = u$, also $P_M^2 = P_M$. «

5.15 *Bemerkung.* Zu $x \in H$ sei

$$\varphi_x : H \to \mathbb{K}, \quad y \mapsto \langle y, x \rangle,$$

dann ist φ_x offensichtlich linear. φ_x ist außerdem stetig, denn

$$|\varphi_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Da $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ gilt sogar $\|\varphi_x\| = \|x\|$ also ist φ_x Element von H'. ⊸

5.16 **Lemma von Riesz** *Zu jedem $f \in H'$ existiert genau ein $x \in H$, so dass*

$$f = \varphi_x = \langle \cdot, x \rangle. \quad \rtimes$$

» 1) *Konstruktion von x.* Der Fall $f = 0$ ist trivial. Sei also $f \neq 0$, dann gibt es ein $\tilde{x} \in H$, so dass $f(\tilde{x}) \neq 0$. Wenden wir nun den Projektionssatz an, erhalten wir $\tilde{x} = u + v$ mit $u \in \ker f$ und $v \in \ker f^{\perp}$.

Zu $\lambda > 0$ soll sein

$$\lambda f(v) = f(\lambda v) \stackrel{!}{=} \varphi_{\alpha v}(\lambda v) = \langle \lambda v, \alpha v \rangle = \lambda \overline{\alpha} \|v\|^2.$$

Setze also $\alpha = \dfrac{\overline{f(v)}}{\|v\|^2}$ und $x = \alpha v$ dann ist $f(x) \neq 0$.

2) *Zeige $f = \varphi_x$.* Sei $y \in H$, so schreibe $y = y - \beta x + \beta x$, wobei $\beta = \frac{f(y)}{f(x)}$, dann ist

$$f(y) = f(y - \beta x) + \beta f(x) = f(y - \beta x) + f(y) \Rightarrow f(y - \beta x) = 0,$$

also ist $y - \beta x \in \ker f$ und somit $0 = \langle y - \beta x, x \rangle$.

$$f(y) = \beta f(x) = \beta \langle x, x \rangle = \langle y, x \rangle.$$

3) *Eindeutigkeit.* Seien $x, \tilde{x} \in H$ so , dass

$$\forall\ y \in H : \langle y, x \rangle = f(y) = \langle y, \tilde{x} \rangle.$$

Dann gilt auch

$$\forall\ y \in H : \langle x - \tilde{x}, y \rangle = 0$$

also $x - \tilde{x} = 0$. «

5.17 *Diskussion.* A. Ist $f \in H'$, dann existiert ein $x \in H$, so dass $\ker f = \{x\}^{\perp}$.

B. Es gilt die Dimensionsformel,

$$\dim \ker f^{\perp} = \dim \mathbb{K} = 1. \quad \multimap$$

5.18 **Korollar** *1) Die Abbildung $H \to H'$, $x \mapsto \varphi_x$ ist eine bijektive antilineare Isometrie und H' ist ein Hilbertraum mit*

$$\left\langle \varphi_x, \varphi_y \right\rangle_{H'} = \langle y, x \rangle .$$

Man sagt auch H ist selbstdual.

2) Jeder Hilbertraum ist reflexiv. $\rtimes$

» 1) Die Bijektivität folgt aus 5.15, 5.16. Zur Antilinearität betrachte,

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) &= \langle y, \alpha x_1 + \beta x_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle y, x_1 \rangle + \overline{\beta} \langle y, x_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha} \varphi_{x_1}(y) + \overline{\beta} \varphi_{x_2}(y).\end{aligned}$$

Die Isometrieeigenschaft haben wir in 5.17 nachgewiesen.

H' ist stets ein Banachraum, da $\mathbb{K}$ vollständig. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}$ ist Skalarprodukt, denn die positive Definitheit folgt direkt aus $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zur Linearität betrachte beispielsweise,

$$\left\langle \alpha \varphi_x, \varphi_y \right\rangle_{H'} = \left\langle \varphi_{\overline{\alpha} x}, \varphi_y \right\rangle = \langle y, \overline{\alpha} x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \left\langle \varphi_x, \varphi_y \right\rangle_{H'} .$$

Die Norm auf H' wird durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}$ induziert, denn

$$\langle \varphi_x, \varphi_x \rangle_{H'} = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|\varphi_x\|^2 .$$

2) Zeige $J_H : H \to H''$ ist surjektiv. Da H Hilbertraum, gilt

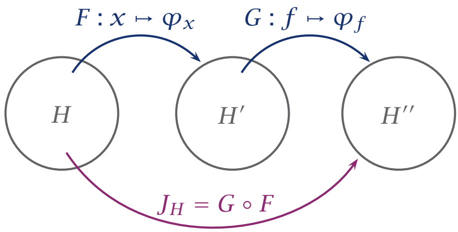
$$J_H(x)(\varphi_y) = \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle .$$

H' ist ebenfalls ein Hilbertraum, also folgt für $\phi \in H''$, dass genau ein $\varphi_x \in H'$ existiert, so dass gilt

$$\forall\ \varphi_y \in H' : \phi(\varphi_y) = \left\langle \varphi_y, \varphi_x \right\rangle_{H'} .$$

x ist dadurch eindeutig bestimmt und für $\varphi_y \in H'$ folgt,

$$J_H(x)(\varphi_y) = \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle = \left\langle \varphi_y, \varphi_x \right\rangle_{H'} = \phi(x, y). \quad «$$



5.1 **Zum Reflexivitätsbeweis.**

Schwache Konvergenz *In einem Hilbertraum gilt*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall\, y \in H : \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle\,. \quad \rtimes$$

5.19 **Definition** *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Eine Menge $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq H$ mit Indexmenge $\mathcal{I}$, heißt Orthonormalsystem (ONS), falls*

$$\forall\, i, j \in \mathcal{I} : \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij}. \quad \rtimes$$

5.20 **Bsp** a.) $H = l^2$ besitzt das ONS $\{e_1, e_2, \ldots\}$ mit $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$.

b.) Betrachte $H = L^2([-1,1])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{[-1,1]} f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$.

Orthonormalisiere die Folge x^n mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren. Hierbei ergeben sich die Legendre-Polynome. ■

5.21 **Satz** *Sei H ein Hilbertraum, $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ein ONS, $M := \overline{\langle e_i \;:\; i \in \mathcal{I}\rangle}$. Dann gelten*

1) Für $x \in H$ ist

$$I_x := \{i \in I \;:\; \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$$

höchstens abzählbar und es gilt,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2 := \sum_{i\in I_x} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,, \qquad \textit{Besselsche Ungleichung}.$$

2) Die orthogonale Projektion P_M auf M ist gegeben durch,

$$P_M x := \sum_{i \in \mathcal{I}_x} \langle x, e_i \rangle e_i$$

und unabhängig von der Reihenfolge in der Reihe. Die $\langle x, e_i \rangle$ heißen Fourierkoeffizienten von x. ⋊

» 1) Sei $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ endlich. Dann hat M die Form,

$$M := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \,:\, \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

Für $x \in M$ und $j \in \mathcal{I}$ gilt dann

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \left\langle x, e_j \right\rangle - \left\langle x, e_j \right\rangle = 0.$$

Also ist $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in M^{\perp}$, da aber auch

$$x = \underbrace{x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in M^{\perp}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in M}$$

folgt nach dem Projektionssatz, $P_M x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Somit ist

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \geq \|P_M x\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\left\langle x, e_j \right\rangle} \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 . \end{aligned}$$

und es folgen 1.) und 2.).

2) *Sei $\mathcal{I}$ unendlich.* Setze

$$I_n(x) := \left\{ i \in \mathcal{I} \,:\, |\langle x, e_i \rangle|^2 \geq \frac{1}{n} \right\},$$

dann ist $\# I_n(x) \leq n \|x\|^2$, denn falls $\# I_n(x) \geq m > n \|x\|^2$, so existieren $i_1, \ldots, i_m \in \mathcal{I}$ mit $\left| \langle x, e_{i_k} \rangle \right|^2 \geq \frac{1}{n}$ und dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \langle x, e_{i_k} \rangle \right|^2 \geq \frac{m}{n} > \|x\|^2$$

im Widerspruch zur Besselschen Ungleichung angewandt auf das endliche ONS $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$.

Somit ist $I(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(x)$ höchstens abzählbar. Sei nun $I(x) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots\}$, dann folgt aus 1.) für jedes $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \left\langle e_{i_j}, x \right\rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Die rechte Seite ist nun unabhängig von n, der Übergang zu $n \to \infty$ liefert die Besselsche Ungleichung.

Mit der Besselschen Ungleichung und dem Satz von Pythagoras, folgt nun

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} \left\langle x, e_{i_j} \right\rangle e_{i_j} \right\|^2 = \sum_{j=n}^{m} \left| \left\langle x, e_{i_j} \right\rangle \right|^2 < \varepsilon,$$

für $n, m > N_\varepsilon$, somit ist die Reihe Cauchy, also konvergent.

H ist Hilbertraum, also ist $y = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_{i_j} \right\rangle e_{i_j} \in H$ und es gilt,

$$\langle x - y, e_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } \forall\, j \in I(x) : k \neq j, \\ \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei auch

$$\begin{aligned} \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_{i_j} \right\rangle e_{i_j}, e_k \right\rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $x = (x - y) + y$, mit $y \in M$ und $x - y \in M^\perp$. Aufgrund des Projektionssatzes ist $P_M(x) = y$ und die Projektion ist unabhängig von der Abzählung der e_{i_j}, also auch y und man darf in der Reihe umsortieren. «

5.22 **Satz** *Sei $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ ein ONS im Hilbertraum H, dann sind äquivalent*

1) $\langle e_i : i \in \mathcal{I}\rangle$ *liegt dicht in* H,

2) $\forall\ x \in H : x = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle x_i, e_i\rangle\, e_i$,

3) $\forall\ x \in H : \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2$, *Parsevallsche Gleichung*,

4) $\forall\ x, y \in H : \langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle$.

Ist eine der obigen Aussagen erfüllt, heißt das ONS (e_i) vollständig (VONS) oder Orthonormalbasis. ⋊

Orthonormalbasen in unendlichdimensionalen Räumen unterscheiden sich von denen in endlichdimensionalen Räumen insbesondere dadurch, dass *nicht* jedes Element als *endliche* Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden kann, sondern durchaus unendliche Reihen zugelassen sind.

» "1)⇔2)": Sei $M := \overline{\langle e_i : i \in \mathcal{I}\rangle}$, dann ist

$$1) \Leftrightarrow M = H \Leftrightarrow\ \forall\ x \in H : P_M x = x \overset{5.21}{\Leftrightarrow}\ \forall\ x \in H : \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i = x \Leftrightarrow 2).$$

"2)⇒3)": Sei also $x \in H$, so gilt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{i_k}\rangle\, e_{i_k} = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \langle x, e_{i_k}\rangle\, e_{i_k},$$
$$\Rightarrow \|x\|^2 = \lim_{K\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{K} \langle x, e_{i_k}\rangle\, e_{i_k} \right\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |\langle x, e_{i_k}\rangle|^2.$$

"3)⇒2)": Analog zur obigen Rechnung folgt,

$$\|P_M x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{i_k}\rangle|^2$$

und somit insbesondere $\|x\|^2 = \|P_M x\|^2$. Der Projektionssatz liefert eine Zerlegung $x = u + v$, wobei $u = P_M x \in M$, $v \in M^\perp$. Nun ist

$$\|v\|^2 = \|x\|^2 - \|u\|^2 = 0 \Rightarrow x = u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{i_k}\rangle\, e_{i_k}.$$

"3)⇒4)": Aus 3) folgt für $x, y \in H$ die Darstellung,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{i_k} \rangle e_{i_k}, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, e_{i_k} \rangle e_{i_k}.$$

Mit der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt schließlich

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \langle x, e_{i_k} \rangle \overline{\langle y, e_{i_l} \rangle} \underbrace{\langle e_{i_k}, e_{i_l} \rangle}_{\delta_{il}} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{i_k} \rangle \langle e_{i_k}, y \rangle .$$

"4)⇒3)": Klar. «

5.23 **Satz** *Ist $H \neq (0)$ ein Hilbertraum, so besitzt H ein VONS.* ⋊

» Sei $\mathcal{A} := \{E \subseteq H : E \text{ ist ONS}\}$. Dann gilt

1) $\mathcal{A} \neq \emptyset$, denn $\exists\, x \in H \setminus \{0\}$ also $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\} \in \mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A}$ ist durch $\subseteq$ halbgeordnet.

3) Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ eine Kette (d.h. durch $\subseteq$ total geordnet). Setze $E_0 := \bigcup_{E \in \mathcal{K}} E$, dann ist E_0 trivialerweise ein ONS und offensichtlich obere Schranke.

Anwendung des Lemmas von Zorn ergibt, dass $\mathcal{A}$ mindestens ein maximales Element E_1 besitzt, d.h.

$$\forall\ E \in \mathcal{A} : E_1 \subseteq E \Rightarrow E = E_1.$$

Wir haben nun zu zeigen, dass das ONS E_1 auch vollständig ist. Angenommen es gibt ein $x \in H \setminus \overline{\langle E_1 \rangle}$, dann ist $x \neq 0$. Mit dem Projektionssatz erhalten wir die Zerlegung,

$$x = u + v, \qquad u \in \overline{\langle E_1 \rangle}, \quad v \in \overline{\langle E_1 \rangle}^{\perp}.$$

Dann ist $v \neq 0$ und $\tilde{E} = E_1 \cup \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ ein ONS, d.h. es gibt ein $\tilde{E} \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \subseteq \tilde{E}$ und $\tilde{E} \neq E_1$. Dies ist eine Widerspruch zur Maximalität von E_1.

Somit ist E_1 vollständig. Wir haben tatsächlich mehr gezeigt, denn jedes maximale Element von $\mathcal{A}$ ist liefert ein VONS und umgekehrt ist jedes VONS ein maximales Element von $\mathcal{A}$. «

5.24 **BSP** a.) Sei $H = l^2$ und $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, dann ist $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein VONS.

b.) Sei $H = L^2([-1, 1])$ und $e_k : x \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{ikx\pi}$, dann ist $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein VONS. ■

5.25 *Bemerkungen.* Sei H ein Hilbertraum.

A. H ist genau dann separierbar, wenn H ein abzählbares VONS besitzt.

» "⇒": Sei $H = \overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle}$. Wende das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf $\{x_1, x_2, \dots\}$ an.

"⇐": Sei $\{e_1, e_2, \dots\}$ abzählbares VONS, dann ist

$$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\beta_j) e_j \; : \; \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

abzählbar und dicht. «

B. Falls H separierbar, existiert ein Hilbertraumisomorphismus

$$\varphi : H \to l^2.$$

» Wir erhalten wie in 1.) ein VONS $\{e_1, e_2, \dots\}$. Setze dann

$$\phi : x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \mapsto \left(\left\langle x, e_j \right\rangle \right)_{j \in \mathbb{N}} \in l^2.$$

Aus 5.22 folgt, $\langle x, y \rangle_H = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{l^2}$. « ⊸

6 Lineare Operatoren auf normierten Räumen

Sofern nicht anders angegeben seien E und F normierte Räume mit Normen $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$. Sollte aus dem Zusammenhang hervorgehen, welcher Raum gemeint ist, wird auch nur $\|\cdot\|$ verwendet.

6-A Spektraltheorie beschränkter Operatoren

In diesem Abschnitt studieren wir zunächst die beschränkten Operatoren. Meißt sind die unbeschränkten Operatoren (wie z.B. Differentialoperatoren) von größerem Interesse, in einigen Fällen lassen sie sich jedoch zu einem beschränkten Operator invertieren, auf den wir dann die hier entwickelte Theorie anwenden können.

6.1 **Definition** *Sei E Banachraum und $A \in \mathcal{L}(E)$.*

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ *heißt regulär bezüglich A, falls*

$$A - \lambda \mathbf{I} : E \to E$$

bijektiv. (Dann ist $(A - \lambda \mathbf{I})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$)

(b) *Die Menge*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ regulär bezüglich } A\}$$

heißt Resolventenmenge von A. Die Abbildung

$$R : \rho(A) \to \mathcal{L}(E), \quad \lambda \mapsto R(\lambda) = (A - \lambda \mathbf{I})^{-1}$$

heißt Resolventenfunktion von A.

(c) *Die Menge*

$$\sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A)$$

heißt Spektrum von A; $\lambda \in \sigma(A)$ heißt Spektralwert von A. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert (EW) von A, falls $\ker(A - \lambda\mathbf{I}) \neq (0)$*. Der Kern von $A - \lambda\mathbf{I}$ heißt Eigenraum zum EW λ.* ⋊

6.2 **Bsp** a.) Sei $E = \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathcal{L}(E)$, so besitzt A in Koordinaten eine Darstellung als $n \times n$ Matrix. λ ist genau dann Eigenwert, wenn ein $x \neq 0$ existiert mit $Ax = \lambda x$. Dann ist $A - \lambda\mathbf{I}$ nicht injektiv also $\lambda \in \sigma(A)$.

Ist λ kein Eigenwert, dann ist $\ker(A - \lambda\mathbf{I}) = (0)$ und damit $A - \lambda\mathbf{I}$ injektiv. Die Dimensionsformel besagt nun, dass $\dim\ker(A - \lambda\mathbf{I}) + \dim\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I}) = n$, also ist $A - \lambda\mathbf{I}$ auch surjektiv und somit $\lambda \in \rho(A)$.

In diesem Fall ist $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ und $\#\sigma(A) \leq n$.

b.) Sei $E = l^2$. Betrachte den Shift-Operator

$$S : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots).$$

$(1, 0, 0, \ldots) \notin \operatorname{im}(S)$, also ist $S - 0\mathbf{I}$ nicht surjektiv, d.h. $0 \in \sigma(S)$. Aber 0 ist kein Eigenwert, denn

$$Sx = 0 \Leftrightarrow (0, x_1, x_2, \ldots) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

Tatsächlich besitzt S keine Eigenwerte aber $\sigma(S) = \overline{K_1(0)}$. ■

6.3 **Lemma** *Seien E, F Banachräume, $T \in \mathcal{L}(E \to F)$ bijektiv, $S \in \mathcal{L}(E \to F)$ mit $\|S - T\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$, dann ist S bijektiv.* ⋊

» Der Beweis wird in den Übungen behandelt. «

6.4 **Korollar** *$\rho(A)$ ist offen.* ⋊

» Sei $\lambda \in \rho(A)$, d.h. $T := A - \lambda\mathbf{I}$ ist invertierbar. Mit 6.3 folgt, dass $S = A - z\mathbf{I}$ invertierbar, also $z \in \rho(A)$, falls

$$\|S - T\| = \|A - z\mathbf{I} - (A - \lambda\mathbf{I})\| = |z - \lambda| < \left\|(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}\right\|^{-1} =: r > 0.$$

Also ist $K_r(\lambda) \subseteq \rho(A)$. «

6.5 **Satz** *Sei E Banachraum, $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann ist die Resolventenfunktion R analytisch auf $\rho(A)$, d.h. lokal als Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{L}(E)$ entwickelbar:*

$$\forall\ \lambda \in \rho(A)\ \exists\ r > 0\ \forall\ z \in K_r(\lambda) : R(z) = (A - z\mathbf{I})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - \lambda)^n$$

mit $A_n \in \mathcal{L}(E)$. ⋊

» Der Beweis wird in den Übungen behandelt. «

6.6 **Satz** *Sei E ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann gilt*

1) $\sigma(A) \neq \emptyset$,

2) $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$,

3) $\sigma(A)$ ist kompakt. ⋊

» “2)”: Sei $|\lambda| > \|A\|$. Wir zeigen, dass $A - \lambda\mathbf{I}$ invertierbar ist. Dazu wenden wir Satz 6.3 auf $T = \mathbf{I}$ und $S = \mathbf{I} - \frac{1}{\lambda}A$ an, dann ist S invertierbar, falls

$$\|S - T\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < \left\|\mathbf{I}^{-1}\right\|^{-1} = 1.$$

“3)”: Aus 6.4 folgt, dass $\sigma(A) = \rho(A)^c$ abgeschlossen und mit 2) folgt, dass $\sigma(A)$ beschränkt ist.

“1)”: Angenommen $\sigma(A) = \emptyset$, d.h. für jedes $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ist $A - \lambda_0\mathbf{I}$ bijektiv. Wir bezeichnen die Entwicklung der Resolventenfunktion um λ_0 als R_{λ_0} und zeigen nun, dass

$$\forall\ \lambda_0 \in \mathbb{C}\ \forall\ f \in E' : f(R_{\lambda_0}(z)) = 0.$$

Mit 4.14 folgt somit $\forall\ z \in \mathbb{C} : R_{\lambda_0}(z) = 0$, dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass $R(\lambda) = (A - z\mathbf{I})^{-1}$.

Sei also $f \in E'$ und $\varphi(z) = f(R(z))$, so existiert $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) *φ ist holomorph.* Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass nach 6.5

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_0)^j, \qquad \text{für } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Da f stetig und linear folgt somit auch

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j f(A_n), \qquad \text{für } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Somit ist φ in jedem Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar, also holomorph.

(b) *φ ist beschränkt.* Wir zeigen, dass $R(\lambda)$ beschränkt ist.

α) Sei $M = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|A\|\}$. $R(\lambda)$ ist stetig, also $\sup\limits_{\lambda \in M} \|R(\lambda)\| < c$.

β) Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 2\|A\|$. Betrachte $\mathbf{I} = \frac{1}{\lambda}(A - (A - \lambda\mathbf{I}))$, dann ist

$$R(\lambda) = (A - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{I} = \frac{1}{\lambda}\left(A(A - \lambda\mathbf{I})^{-1} - \mathbf{I}\right)$$

und es folgt,

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\left\|A(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}\right\| + 1\right) < \frac{1}{2}\|R(\lambda)\| + \frac{1}{|\lambda|}$$
$$\Rightarrow \|R(\lambda)\| < \frac{2}{|\lambda|} \to 0, \qquad |\lambda| \to \infty$$

α) und β) erlauben es uns, den Satz von Liouville anzuwenden, d.h. φ ist konstant. Aus β) folgt außerdem, $\varphi \equiv 0$. «

6-B Kompakte Operatoren

6.7 **Definition** *$T \in \mathcal{L}(E \to F)$ heißt kompakt, falls $\overline{T(K_1(0))}$ kompakt in F.*
Wir setzten $\mathcal{K}(E \to F) := \{T : E \to F : T \text{ ist kompakt}\}$, $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E \to E)$. ⋊

6.8 **Satz** *1) Für $T \in \mathcal{L}(E \to F)$ sind äquivalent:*

(i) $T \in \mathcal{K}(E \to F)$.

(ii) Für jede beschränkte Folge (x_n) in E besitzt (Tx_n) eine in F konvergente Teilfolge.

(iii) Für jede beschränkte Teilmenge $M \subseteq E$ ist $\overline{T(M)}$ kompakt.

2) *Seien $T \in \mathcal{L}(E \to F)$, $S \in \mathcal{L}(F \to G)$. Ist T oder S kompakt, so auch $S \circ T$.*

3) *Ist F Banachraum, so ist $\mathcal{K}(E \to F)$ linearer abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(E \to F)$.*

4) *Ist E Banachraum, so ist $\mathcal{K}(E)$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{L}(E)$.* ⋊

Vorbemerkung. In einem normierten Raum sind Überdeckungs- und Folgenkompaktheit äquivalent. ⊸

» 1) "(i)⇒(ii)": Sei (x_n) beschränkt in E, so ist $(\|x_n\|)$ beschränkt in $\mathbb{R}$ und besitzt daher eine konvergente Teilfolge $\|x_{n_k}\| \to c$. Setze $y_k := (1 + \|x_{n_k}\|)^{-1} x_{n_k}$, so ist $y_k \in K_1(0)$ und daher besitzt (Ty_k) eine konvergente Teilfolge, $y_{k_l} \to y$. Folglich ist

$$Tx_{n_{k_l}} = (1 + \left\|x_{n_{k_l}}\right\|) y_{n_{k_l}} \to cy.$$

"(ii)⇒(iii)": Sei $M \subseteq E$ beschränkt und (y_n) Folge in $\overline{T(M)}$. Zeige es existiert eine konvergente Teilfolge (y_{n_k}). Wähle dazu $\eta_n = Tx_n$ mit $x_n \in M$ und $\|\eta_n - y_n\| < \frac{1}{n}$. (x_n) ist Folge in M, also beschränkt und mit (ii) folgt $Tx_{n_k} \to y$ in F. Insbesondere $y \in \overline{T(M)}$, also

$$y_{n_k} = \underbrace{y_{n_k} - Tx_{n_k}}_{\to 0} + Tx_{n_k},$$

also $y_{n_k} \to y$.

"(iii)⇒(i)": Spezialisierung.

2) Sei (x_n) beschränkt in E. Ist T kompakt, dann ist $Tx_{n_k} \to y$ und S ist stetig, also $S \circ Tx_{n_k} \to Sy$. Ist S kompakt, nun ist (Tx_n) beschränkt also $S \circ Tx_{n_k} \to z$ in G.

3) Seien $S, T \in \mathcal{K}(E \to F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und (x_n) beschränkte Folge in E.

$$T(x_{n_k}) \to y \Rightarrow \alpha T(x_{n_k}) \to \alpha y$$

$$T(x_{n_k}) \to y_1, \quad S(x_{n_k}) \to y_2 \Rightarrow (S+T)(x_{n_k}) \to y_1 + y_2.$$

Also ist $\mathcal{K}(E \to F)$ linearer Teilraum von $\mathcal{L}(E \to F)$.

Sei nun (T_k) Folge in $\mathcal{K}(E \to F)$, $T \in \mathcal{L}(E \to F)$ und $\|T_k - T\| \to 0$. Sei (x_n) beschränkt in E, dann ist T_1 kompakt, d.h.

$$T_1(x_n^{(1)}) \to y^{(1)}, \qquad (x_n^{(1)}) \text{ Teilfolge von } (x_n).$$

Sei nun T_2 kompakt, dann

$$T_2(x_n^{(2)}) \to y^{(2)}, \qquad (x_n^{(2)}) \text{ Teilfolge von } (x_n^{(1)}),$$

usw. Setze $\xi_n := x_n^{(n)}$ (Diagonalfolge), dann folgt

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : T_k(\xi_n) \to y^{(k)}$$

und (ξ_n) ist Teilfolge von (x_n). Zeige nun $(T\xi_n)$ ist Cauchyfolge,

$$\begin{aligned} \|T\xi_n - T\xi_m\| &\leq \|T\xi_n - T_k\xi_n\| + \|T_k\xi_n - T_k\xi_m\| + \|T_k\xi_m - T\xi_m\| \\ &< \varepsilon\,\|\xi_n\| + \|T_k\xi_n - T_k\xi_m\| + \varepsilon\,\|\xi_m\|, \end{aligned}$$

für k hinreichend groß. Außerdem ist (ξ_n) konvergent also beschränkt, d.h. $\|\xi_n\| \leq c$. Für festes k ist $(T_k\xi_n)_n$ Cauchyfolge da konvergent und daher $\|T_k\xi_n - T_k\xi_m\| < \varepsilon$ für $n, m > N_\varepsilon$, d.h.

$$\|T\xi_n - T\xi_m\| < 2\varepsilon c + \varepsilon = (2c+1)\varepsilon, \qquad n, m > N_\varepsilon.$$

4) Folgt direkt aus 2.) und 3.). «

6.9 **Rieszsches Lemma (fast orthogonales Element)** *Sei L abgeschlossener echter Teilraum von E. Dann gilt*

$$\forall\, q \in (0,1)\ \exists\, x_q \in E \setminus L : \left\|x_q\right\| = 1 \textit{ und } d(x_q, L) \geq q. \quad \rtimes$$

» Sei $y \in E \setminus L$, dann folgt mit 3.4, dass $d(y, L) > 0$. Wähle nun $x_0 \in L$ mit

$$d(y, L) = \inf_{x \in L} \|y - x\| \leq \|y - x_0\| \leq \frac{d(y, L)}{q}.$$

Setze nun $x_q = \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$, so ist $\|x_q\| = 1$ und für $x \in L$ gilt,

$$\begin{aligned}\|x_q - x\| &= \frac{1}{\|y-x_0\|}\,\|y - x_0 - \|y-x_0\|\,x\| \\ &= \frac{1}{\|y-x_0\|}\left\| y - \underbrace{(x_0 + \|y-x_0\|\,x)}_{\in L}\right\| \geq \frac{d(y,L)}{\|y-x_0\|} \geq q. \quad «\end{aligned}$$

6.10 **Korollar** *Sei E normierter Raum, dann ist $\overline{K_1(0)}$ genau dann kompakt, wenn $\dim E < \infty$.* ⋊

6.11 **Bsp** a.) $\mathbf{I} : E \to E$ ist genau dann kompakt, wenn $\dim E < \infty$.

b.) Sei $T \in \mathcal{L}(E \to F)$ und $m := \dim \operatorname{im} T < \infty$, so ist T kompakt, denn ist (x_n) beschränkt in E, so ist (Tx_n) beschränkt in $\operatorname{im} T$. $\operatorname{im} T$ ist endlichdimensional und daher isomorph zum $\mathbb{K}^n$, also besitzt (Tx_n) eine konvergente Teilfolge.

c.) Sei $E := (C([a,b] \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ und $K \in C([a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C})$, so ist

$$T : E \to E, \quad Tf(x) := \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

kompakt. ■

6.12 **Satz** *Sei $T \in \mathcal{K}(E)$. Dann gelten*

1) $\dim \ker(\mathbf{I} - T) < \infty$.

2) $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T)$ *ist abgeschlossener linearer Teilraum von E.*

3) Ist $\ker(\mathbf{I} - T) = (0)$, *so ist* $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T) = E$ *und* $(\mathbf{I} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. ⋊

Für $\mathbf{I} - T$ mit T kompakt gilt also tatsächlich injektiv ⇒ surjektiv.

» 1) Sei $M = \ker(\mathbf{I} - T)$. Wir zeigen, dass $\mathbf{I} : M \to M$ kompakt ist, dann folgt mit 6.10, dass M endlichdimensional ist.

Sei also (x_n) beschränkt in M, dann gilt $Tx_{n_k} \to y$ und damit auch

$$x_{n_k} = \underbrace{(\mathbf{I} - T)(x_{n_k})}_{\to 0} + Tx_{n_k} \to y,$$
$$\Rightarrow (\mathbf{I} - T)y = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{I} - T)x_{n_k} = 0.$$

Also ist $y \in M$.

2) $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T)$ ist stets ein linearer Teilraum von E.

Sei nun y_n Folge in $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T)$, d.h. $y_n = (\mathbf{I} - T)x_n$, mit $y_n \to y \in E$.

a.) *(x_n) kann als beschränkte Folge gewählt werden.* Wähle $\xi_n \in \ker(\mathbf{I} - T)$ so, dass

$$||x_n - \xi_n|| \leq 2d(x_n, \ker(\mathbf{I} - T))$$

Dann gilt

$$(\mathbf{I} - T)(x_n - \xi_n) = y_n,$$
$$||x_n - \xi_n|| \leq 2d(x_n - \xi_n, \ker(\mathbf{I} - T)) =: d_n.$$

Angenommen $d_n \to \infty$. Setze $z_n := \frac{x_n - \xi_n}{d_n}$, so gilt

$$\|z_n\| \leq 1, \qquad d(z_n, \ker(\mathbf{I} - T)) = \frac{1}{d_n} d(x_n - \xi, \ker(\mathbf{I} - T)) = \frac{1}{2}.$$

Nun ist z_n beschränkt, also $Tz_{n_k} \to z$, wobei

$$z_{n_k} = \underbrace{(\mathbf{I} - T)(z_{n_k})}_{\to 0} + Tz_{n_k} \to z.$$

Somit gilt

$$(\mathbf{I} - T)z = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{I} - T)z_{n_k} = z - z = 0.$$

Also $z \in \ker(\mathbf{I}-T)$, wobei $z_{n_k} \to z$. Dies ist ein Widerspruch zu $d(z_n, \ker(\mathbf{I}-T)) = \frac{1}{2}$.

Somit ist $||x_n - \xi_n|| \leq d_n \leq c$ mit $(\mathbf{I} - T)(x_n - \xi_n) = y_n$. Im Folgenden sei daher (x_n) beschränkte Folge.

b.) (x_n) ist beschränkt, also $Tx_{n_k} \to x$, mit

$$x_{n_k} = (\mathbf{I} - T)x_{n_k} + Tx_{n_k} = y_{n_k} + Tx_{n_k} \to y + x,$$
$$\Rightarrow (\mathbf{I} - T)(y + x) = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{I} - T)(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y.$$

Also ist $y \in \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)$.

3) Sei $\ker(\mathbf{I} - T) = (0)$. Angenommen $\mathbf{I} - T$ ist nicht surjektiv, es gibt also ein $x \in E \setminus \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)$.

a.) Wir zeigen nun $\forall\, n \in \mathbb{N} : (\mathbf{I}-T)^n(x) \in E \setminus \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)^{n+1}$ durch Widerspruch. Angenommen

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, y \in E : (\mathbf{I} - T)^n(x) = (\mathbf{I} - T)^{n+1} y,$$

so ist $(\mathbf{I} - T)^n(x - (\mathbf{I} - T)y) = 0$, da $\ker(\mathbf{I} - T) = (0)$ gilt

$$(\mathbf{I} - T)^{n-1}(x - (\mathbf{I} - T)y) = 0.$$

Wir erhalten induktiv,

$$x - (\mathbf{I} - T)y = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{im}(\mathbf{I} - T). \ \lightning$$

b.) $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}$ *ist abgeschlossen.*

$$(\mathbf{I} - T)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-T)^j = \mathbf{I} - \underbrace{\left(- \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-T)^j \right)}_{\text{kompakt}}.$$

Anwendung von 2.) ergibt die Behauptung.

c.) Mit a.) und b.) folgt, $d((\mathbf{I} - T)^n x, \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}) > 0$. Es existiert also eine Folge (a_n) in $\operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}$ mit

$$0 \le \|(\mathbf{I} - T)^n x - a_n\| < 2d((\mathbf{I} - T)^n x, \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}).$$

Setze $x_n = \frac{1}{\|(\mathbf{I}-T)^n x - a_n\|}((\mathbf{I} - T)^n x - a_n)$, dann ist $\|x_n\| = 1$, also ist (x_n) beschränkt, und es gilt $x_n \in \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^n$. Jedoch

$$\begin{aligned} d(x_n, \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}) &= \frac{1}{\|(\mathbf{I} - T)^n x - a_n\|} d\left((\mathbf{I} - T)^n x - a_n, \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\|(\mathbf{I} - T)^n x - a_n\|} d\left((\mathbf{I} - T)^n x, \operatorname{im}(\mathbf{I} - T)^{n+1}\right) > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

denn $a_n \in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)^{n+1}$, also enthält Tx_n auch keine konvergente Teilfolge, denn für $m > n$ gilt,

$$\begin{aligned}\|Tx_m - Tx_n\| &= \|(\mathbf{I}-T)(x_m - x_n) - (x_m - x_n)\| \\ &= \|x_n - (x_m + (\mathbf{I}-T)(x_m - x_n))\|\,.\end{aligned}$$

Nun ist $x_m \in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)^n$ und $(\mathbf{I}-T)(x_m - x_n) \in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)^{n+1}$, also

$$\|x_n - (x_m + (\mathbf{I}-T)(x_m - x_n))\| \geq d(x_n, \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)^{n+1}) > \frac{1}{2},$$

im Widerspruch zur Kompaktheit von T. Also $\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) = E$.

d.) $(\mathbf{I}-T)$ ist also bijektiv und daher existiert $(\mathbf{I}-T)^{-1}$. Wir müssen noch zeigen, dass $(\mathbf{I}-T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Angenommen $(\mathbf{I}-T)^{-1}$ ist unbeschränkt, d.h.

$$\sup_{y \neq 0} \frac{||(\mathbf{I}-T)^{-1}||}{||y||} = \infty.$$

Wir können also (y_n) in E wählen mit $y_n \to 0$ und $||(\mathbf{I}-T)^{-1}y_n|| = 1$. Setze $x_n = (\mathbf{I}-T)^{-1}y_n$, so ist $\|x_n\| = 1$ und $y_n = (\mathbf{I}-T)x_n$. Nach Voraussetzung existiert eine konvergente Teilfolge (Tx_{n_k}) mit Grenzwert y. Für diese gilt dann

$$x_{n_k} = y_{n_k} + Tx_{n_k} \to 0 + y = y.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-T)y &= \lim_{k\to\infty}(\mathbf{I}-T)x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - Tx_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} + Tx_{n_k} - Tx_{n_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = 0.\end{aligned}$$

Da $\ker(\mathbf{I}-T) = (0)$ folgt $y = 0$ aber dies steht im Widerspruch zu $\|x_n\| = 1$ und $x_{n_k} \to y$. Also ist $(\mathbf{I}-T)^{-1}$ beschränkt. «

6.13 **Satz** *Sei $T \in \mathcal{K}(E)$. Dann gelten*

1) *Sei $\lambda \in \sigma(T)$ und $\lambda \neq 0$, dann ist λ Eigenwert endlicher Vielfachheit.*

2) *$\sigma(T)$ hat höchstens 0 als Häufungspunkt. Insbesondere ist $\sigma(T)$ endlich oder abzählbar und jeder Eigenwert $\neq 0$ ist isoliert.* $\rtimes$

» 1) Sei $\lambda \in \sigma(T)$ und $\lambda \neq 0$, dann ist $T - \lambda\mathbf{I}$ nicht bijektiv und somit auch $\frac{1}{\lambda}T - \mathbf{I}$.

λ ist Eigenwert, denn falls $\ker(\frac{1}{\lambda}T - \mathbf{I}) = (0)$, so ist nach 6.12 $\frac{1}{\lambda}T - \mathbf{I}$ bijektiv. Außerdem ist $\dim\ker(\frac{1}{\lambda}T - \mathbf{I}) < \infty$, also hat λ endliche Vielfachheit.

2) Sei $\lambda \neq 0$ Häufungspunkt, so existiert eine Folge (λ_n) in $\sigma(T)$ mit $\lambda_n \to \lambda$ und $\lambda_n \neq \lambda_m$, falls $n \neq m$.

Sei $Tx_n = \lambda_n x_n$ und $\|x_n\| = 1$, so gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$, $\{x_1, \ldots, x_N\}$ ist linear unabhängig. Sei $V_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, so ist $\dim V_n = n$ und $V_{n+1} \supsetneq V_n$. Außerdem ist V_n abgeschlossen, wir können also das Lemma von Riesz anwenden und erhalten so eine Folge (y_n) mit

$$y_n \in V_{n+1} \setminus V_n, \qquad \|y_n\| = 1, \qquad d(y_n, V_n) = \frac{1}{2}.$$

(y_n) ist beschränkt aber (Ty_n) enthält keine konvergente Teilfolge. Schreibe dazu $y_n = sx_{n+1} + \eta_n$ mit $s \neq 0$ und $\eta_n \in V_n$, so gilt für $m > n$

$$\begin{aligned}
&\|Ty_m - Ty_n\| = \|T(sx_{m+1} + \eta_m) - T(sx_{n+1} + \eta_n)\| \\
&= \|s\lambda_{m+1}x_{m+1} + T\eta_m - s\lambda_{n+1}x_{n+1} - T\eta_n\| \\
&= \|\lambda_{m+1}y_m - \lambda_{m+1}\eta_m + T\eta_m - \lambda_{n+1}y_n + \lambda_{n+1}\eta_n - T\eta_n\| \\
&= |\lambda_{m+1}| \left\| y_m - \underbrace{\frac{1}{\lambda_{m+1}}(\lambda_{m+1}\eta_m - T\eta_m + \lambda_{n+1}y_n - \lambda_{n+1}\eta_n + T\eta_n)}_{\in V_m} \right\| \\
&> |\lambda_{m+1}| \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}c > 0.
\end{aligned}$$ «

6-C Fredholmsche Alternative

In der linearen Algebra studiert man die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax,$$

der zugehörige Homomorphismus. Gesucht sind nun Lösungen von $Ax = y$, d.h. $Tx = y$. In endlichdimensionalen Räumen gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1) *T ist bijektiv.* So gilt $\forall\ y \in \mathbb{R}^n\ \exists\ !x \in \mathbb{R}^n : Tx = y$. Hier ist außerdem T genau dann bijektiv, wenn $\ker T = (0)$.

2) *T nicht bijektiv.* Hier ist T also weder surjektiv noch injektiv. Lösungen exisieren genau dann, wenn folgende Rangbedingung erfüllt ist,

$$\operatorname{rg}(A \mid y) = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A^\top \\ y^\top \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A^\top).$$

Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass $y^\top$ linear abhängig von den Zeilenvektoren von $A^\top$ ist, d.h.

$$\forall\ z \in \mathbb{R}^n : (A^\top z = 0 \Rightarrow y^\top z = 0).$$

Da $\mathbb{R}^n$ euklidisch, existiert ein Skalarprodukt und wir können dies schreiben als

$$\forall\ z \in \mathbb{R}^n : (T^\top z = 0 \Rightarrow \langle y, z\rangle = 0).$$

Wir wollen diese Fragestellung nun auf unendlichdimensionale normierte Vektorräume übetragen.

1) Betrachten wir dazu

$$\mathbf{I} - T : E \to E, \quad x \mapsto (\mathbf{I} - T)x,$$

so impliziert (nach Satz 6.12) $\ker(\mathbf{I} - T) = (0)$, dass $(\mathbf{I} - T)$ bijektiv und daher $(\mathbf{I} - T)x = y$ für jedes $y \in E$ eindeutig lösbar ist. Außerdem hängt die Lösung

$$x = (\mathbf{I} - T)^{-1} y$$

stetig von y ab.

2) Die Bedingung

$$\forall\; z \in \mathbb{R}^n : (T^\top z = 0 \Rightarrow \langle y, z\rangle = 0).$$

lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres auf einen normierten Raum E übertragen, da weder $T^\top$ noch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zur Verfügung stehen.

Für Hilbeträume kennen wir bereits die

6.14 **Riesz Abbildung** *Sei H ein Hilbertraum.*

$$R_H : H \to H', \quad x \mapsto \varphi_x,$$

mit $\varphi_x(y) = \langle y, x\rangle$ ist eine antilineare, bijektive und isometrische Abbildung. ⋊

Wir wollen nun ein Analogon des $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für normierte Räume durch Anwendung eines Elementes des Dualraumes finden.

6.15 **Definition** *Sei $L \subseteq E$ linearer Teilraum. Dann heißt*

$$L^\perp := \{x' \in E' : x'|_L = 0\} = \{x' \in E' : L \subseteq \ker x'\}$$

Annihilator von L. ⋊

6.16 **Satz** *1) $L^\perp$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von E'.*

2) $L^\perp = \overline{L}^\perp$.

3) Ist E reflexiv, so gilt $(L^\perp)^\perp = J_E(\overline{L}) = \overline{J_E(L)}$. ⋊

» 1) Sei (x_n') Folge in E' mit $x_n'(y) = 0$ und $x_n' \to x' \in E'$. Sei $y \in L$, dann gilt

$$x'(y) = \lim_{n\to\infty} x_n'(y) = 0.$$

2) $L \subseteq \overline{L}$, also $(\overline{L})^\perp \subseteq L^\perp$. Sei weiterhin $x' \in L^\perp$ und y_n Folge in L mit $y_n \to y \in E$, dann gilt

$$x'(y) = \lim_{n\to\infty} x'(y_n) = 0.$$

Somit ist $L^\perp \subseteq \overline{L}^\perp$.

3) Sei $x'' \in (L^\perp)^\perp \subseteq E''$, so existiert ein $x \in E$, so dass $J_E(x) = x''$.

$$\begin{aligned} x'' \in (L^\perp)^\perp &\Leftrightarrow \forall\, x' \in L^\perp : x''(x') = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, x' \in L^\perp : J_E(x)(x') = x'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, x' \in L^\perp : x \in \ker x'. \end{aligned}$$

Satz 4.17 besagt, dass

$$\overline{L} = \bigcap \{\ker y' \,:\, L \subseteq \ker y'\}\,,$$

also gilt

$$\forall\, x' \in L^\perp : x \in \ker x' \Leftrightarrow x \in \bigcap \{\ker x' \,:\, x' \in L^\perp\} = \overline{L}.$$

Somit ist $x'' = J_E(x) \in (L^\perp)^\perp \Leftrightarrow x \in \overline{L} \Leftrightarrow x'' = J_E(x) \in J_E(\overline{L})$. «

6.17 **Definition** *Sei $T \in \mathcal{L}(E \to F)$.*

$$T' : F' \to E', \quad y' \mapsto y' \circ T,$$

heißt adjungierter Operator zu T. ⋊

6.18 **Satz** *1) $\|T'\|_{\mathcal{L}(F' \to E')} = \|T\|_{\mathcal{L}(E \to F)}$.*

2) $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \alpha T_1' + \beta T_2'$.

3) Sei $T'' = (T')' : E'' \to F''$. Dann gilt

$$T''\big|_{J_E(E)} = J_F \circ T \circ J_E^{-1}$$

bzw.

$$T'' \circ J_E = J_F \circ T$$

bzw.

$$J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E = T. \quad ⋊$$

» Der Beweis findet sich in Übungsaufgabe (6.3). «

6.19 **Bsp** a.) $(\mathbf{I}_{E\to E})' = \mathbf{I}_{E'\to E'} : E' \to E', \quad y' \mapsto y' \circ \mathbf{I} = y'$.

b.) $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$ mit $A \in M^{n\times n}$. Da $(\mathbb{C}^n)' = \mathbb{C}^n$ gilt,

$$T' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto A^\top x. \quad \blacksquare$$

6.20 **Satz** *Sei* $T \in \mathcal{L}(E \to F)$. *Dann ist* $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T'$. ⋊

» Für $y' \in E$ gilt

$$\begin{aligned} y' \in \ker T' &\Leftrightarrow T'y' = 0 \Leftrightarrow \ \forall\, x \in E : (T'y')(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \forall\, x \in E : y' \circ Tx = 0 \Leftrightarrow \ \forall\, y \in \operatorname{im} T : y'(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{im} T \subseteq \ker y' \Leftrightarrow y' \in (\operatorname{im} T)^\perp. \end{aligned}$$ «

6.21 **Lemma** *Sei* $T \in \mathcal{K}(E \to F)$. *Dann ist* $\operatorname{im} T$ *separabel.* ⋊

» Es gilt $\operatorname{im} T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(K_n(0))$. Da T kompakt ist auch $\overline{T(K_n(0))}$ kompakt, also gilt

$$\forall\, l \in \mathbb{N} : \overline{T(K_n(0))} \subseteq \bigcup_{j=1}^{J(l)} K_{1/l}(y_j^{(l)}), \qquad y_j^{(l)} \in \overline{T(K_n(0))}, \quad J(l) < \infty.$$

Wähle $\eta_j^l \in T(K_n(0))$ mit $\left\| \eta_j^{(l)} - y_j^{(l)} \right\| < \frac{1}{l}$, so gilt

$$\overline{T(K_n(0))} \subseteq \bigcup_{j=1}^{J(l)} K_{2/l}(\eta_j^{(l)}), \qquad \eta_j^{(l)} \in T(K_n(0)).$$

Setze nun $A := \bigcup_{l=1}^{\infty} \left\{ \eta_1^{(l)}, \ldots, \eta_{J(l)}^{(l)} \right\}$, so ist A abzählbar und dicht in $\overline{T(K_n(0))}$ und $A \subseteq T(K_n(0))$, also ist A auch dicht in $T(K_n(0))$.

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ist abzählbar und dicht in } \bigcup_{n=1}^{\infty} T(K_n(0)) = \operatorname{im} T.$$ «

6.22 **Satz von Schauder** *Für* $T \in \mathcal{L}(E \to F)$ *gilt*

1) $T \in \mathcal{K}(E \to F) \Rightarrow T' \in \mathcal{K}(F' \to E')$.

2) *Falls* F *Banachraum, dann gilt* $T \in \mathcal{K}(E \to F) \Leftarrow T' \in \mathcal{K}(F' \to E')$. ⋊

» "⇒": Sei also $T \in \mathcal{K}(E \to F)$, (y'_n) beschränkte Folge in F', $\|(y'_n)\| \le C$. Zu zeigen ist nun, dass $(T' y'_n)$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

1) *Konstruktion eines Grenzelements.* Nach Lemma 6.21 ist $\operatorname{im} T$ separierbar, also $\operatorname{im} T = \overline{\{y_1, y_2, \dots\}}$.

   $(y'_n(y_1))_n$ ist Folge in $\mathbb{K}$ und beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $(y'^{(1)}_n)$.

   $(y'^{(1)}_n(y_2))$ ist Folge in $\mathbb{K}$ ..., besitzt also eine konvergente Teilfolge $(y'^{(2)}_n)$.

   Wähle die Diagonalfolge $y'_{n_k} = y'^{(k)}_k$.

2) (y'_{n_k}) *konvergiert auf* $\langle y_1, y_2, \dots \rangle =: L$. Sei

$$y' : L \to \mathbb{K}, \quad y \mapsto \lim_{k\to\infty} y'_{n_k}(y),$$

   so ist y' linear und beschränkt, denn

$$\|y'(y)\| \le \limsup_{k\to\infty} \left\| y'_{n_k} \right\| \|y\| \le C \|y\|,$$

   also $y' \in L'$. Mit dem Satz von Hahn-Banach setzen wir y' fort zu $y' \in F'$.

3) *Es gilt sogar für* $y \in \overline{L} = \overline{\operatorname{im} T}$, *dass* $y'_{n_k}(y) \to y'(y)$.

   Sei (y_l) Folge in L mit $y_l \to y$, so gilt

$$\begin{aligned} &\left| y'_{n_k}(y) - y'(y) \right| \\ &\le \underbrace{\left| y'_{n_k}(y - y_l) \right|}_{(1)} + \underbrace{\left| y'_{n_k}(y_l) - y'(y_l) \right|}_{(2)} + \underbrace{\left| y'(y_l) - y'(y) \right|}_{(3)}. \end{aligned}$$

   (1)$\le \sup \left\| y'_{n_k} \right\| \|y - y_l\| = c \, \|y - y_l\|$,
   (3)$\le \|y'\| \, \|y - y_l\|$,
   also (1),(3)$\le \varepsilon$ für l hinreichend groß.
   (2)$\le \varepsilon$ für l fest und k hinreichend, also

$$\left| y'_{n_k}(y) - y'(y) \right| \le 3\varepsilon,$$

   für k hinreichend groß.

4) *Für eine Teilfolge (y'_{n_j}) von (y'_{n_k}) gilt $T'(y'_{n_j}) \to y$.*

$$\left\|T'y'_{n_k} - T'y'\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left|(T'y'_{n_k} - T'y')(x)\right|.$$

Wähle (x_k) in E mit $\|x_k\| = 1$ und

$$\left\|T'y'_{n_k} - T'y'\right\| = \left|(T'y'_{n_k} - T'y')(x_k)\right| + \frac{1}{n_k}.$$

T ist kompakt also $Tx_{n_j} \to y \in \overline{\operatorname{im} T}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\left\|T'y'_{n_j} - T'y'\right\| &= \left|T'y'_{n_j}(x_{n_j}) - T'y'(x_{n_j})\right| + \frac{1}{n_j}\\ &= \left|y'_{n_j}(Tx_{n_j}) - y'(Tx_{n_j})\right| + \frac{1}{n_j}\\ &\le \underbrace{\left|y'_{n_j}(Tx_{n_j} - y)\right|}_{(1)} + \underbrace{\left|y'_{n_j}(y) - y'(y)\right|}_{(2)} + \underbrace{\left|y'(y) - y'(Tx_{n_j})\right|}_{(3)} + \frac{1}{n_j}\end{aligned}$$

(1)$\le \sup \left\|y_{n_j}\right\| \left\|Tx_{n_j} - y\right\| \to 0$,
(3)$\le \|y'\| \left\|Tx_{n_j} - y\right\| \to 0$,
(2)$\to 0$ nach b.), also

$$\left\|T'y'_{n_j} - T'y'\right\| \to 0, \qquad j \to \infty.$$

"$\Leftarrow$": Sei T' kompakt so ist nach "$\Rightarrow$" auch $T'' \in \mathcal{K}(E'' \to F'')$. Mit 6.18 folgt

$$T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E.$$

Sei (x_n) beschränkt in E, so ist $(J_E(x_n))$ beschränkt in E'' und daher

$$T'(J_E(x_{n_k})) \to y'' \in F''.$$

Da F vollständig ist $J_F(F)$ abgeschlossen und daher $y'' \in J_F(F)$, somit

$$T(x_{n_k}) = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E(x_{n_k}) \to J_F^{-1}(y''). \quad «$$

6.23 **Fredholmsche Alternative** *Sei E normierter Raum, $T \in \mathcal{K}(E)$. Dann gilt entweder* *(i)* $\ker(\mathbf{I}-T)=(0)$. *Dann besitzt die Gleichung*

$$(\mathbf{I}-T)x=y$$

für jedes $y\in E$ *eine Lösung. Die Lösung ist eindeutig und hängt stetig von* y *ab.*

— oder —

(ii) $\ker(\mathbf{I}-T)\neq 0$. *Dann besitzt*

$$(\mathbf{I}-T)x=y$$

genau für die $y\in E$ *Lösungen, für die*

$$\forall\ x'\in\ker(\mathbf{I}-T'):x'(y)=0.$$

Die dadurch gegebene Anzahl von Nebenbedingungen ist endlich. In diesem Fall ist x *nicht eindeutig.* ⋊

» "(i)": Siehe Satz 6.12.
"(ii)": Nach Satz 6.12 ist $\operatorname{im}(\mathbf{I}-T)=\overline{\operatorname{im}(\mathbf{I}-T)}$, also

$$\begin{aligned}&y\in\operatorname{im}(\mathbf{I}-T)=\bigcap\{\ker x'\ :\ x'\in E\wedge\operatorname{im}(\mathbf{I}-T)\subseteq\ker(x')\}\\ &\Leftrightarrow\ \forall\ z'\in\{x'\in E\ :\ \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)\subseteq\ker x'\}:y\in\ker(z')\end{aligned}\qquad(*)$$

T ist kompakt, also folgt mit 6.22, dass T' kompakt und daher ist $\ker(\mathbf{I}-T')$ endlichdimensional. Sei $\mathcal{B}=\left\{x_1',\ldots,x_k'\right\}$ Basis von $\ker(\mathbf{I}-T')$, so ist (*) äquivalent zu

$$\forall\ j=1,\ldots,k:x_j(y)=0.\quad «$$

6.24 **Definition** *Seien* U,V *lineare Teilräume von* L *mit*

(a) $U\cap V=(0)$,

(b) $\forall\ x\in L:\ \exists\ u\in U\ \exists\ v\in V:x=u+v$.

Dann schreiben wir $L=U\oplus V$ *und* $U\oplus V$ *heißt direkte Summe von* U *und* V. ⋊

Eine leichte Übung zeigt, dass u und v in obiger Definition eindeutig bestimmt sind.

Im Gegensatz zur Definition 1.13 muss die Norm auf $U \oplus V$ *nicht* äquivalent zur Norm auf L sein.

6.25 **Lemma** *Sei $L = U \oplus V$ und $L = U \oplus \tilde{V}$ mit $\dim V, \dim \tilde{V} < \infty$, so ist*

$$\dim V = \dim \tilde{V}. \quad \rtimes$$

» Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von V. Dann gilt

$$x_i = u_j + \tilde{v}_j, \qquad u_j \in U, \quad \tilde{v}_j \in \tilde{V}.$$

$\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ ist linear unabhängig, denn sei

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{v}_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{\in V} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j u_j}_{\in U} \overset{U \cap V = (0)}{=} 0$$

und da $\mathcal{B}$ Basis, folgt $c_1 = \dots = c_n = 0$. Also ist $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ linear unabhängig und daher $\dim \tilde{V} \geq \dim V$. Die Situation ist jedoch vollkommen symmetrisch, also gilt auch $\dim V \geq \dim \tilde{V}$ und folglich $\dim V = \dim \tilde{V}$. «

6.26 **Definition** *Sei $L = U \oplus V$ mit $\dim V < \infty$. Dann heißt*

$$\operatorname{codim} U := \dim V$$

die Kodimension von U. $\rtimes$

6.27 **Lemma** *Sei E normierter Raum, $L \subseteq E$ abgeschlossener linearer Teilraum, $V \subseteq E$ endlichdimensionaler Teilraum und $L \cap V = (0)$. Dann ist $L \oplus V$ abgeschlossener linearer Teilraum.* $\rtimes$

» Sei (x_n) Folge in $L \oplus V$ mit $x_n \to x$ in E. Zeige $x \in L \oplus V$.

Da $x_n \in L \oplus V$ existiert eine eindeutige Zerlegung,

$$x_n = u_n + v_n, \qquad u_n \in L, \quad v_n \in V.$$

Wir bilden den Quotientenraum

$$E/L := \{[x] = x + L : x \in E\}.$$

Da L abgeschlossen ist

$$\|[x]\|_0 = \inf\{\|x - y\| : y \in L\} = d(x, L)$$

Norm auf E/L. $[x_n]$ ist konvergent bezüglich dieser Norm, denn

$$\|[x_n] - [x]\|_0 = \inf\{\|x_n - x - y\| : y \in L\} \le \|x_n - x\| \to 0.$$

Außerdem ist $([v_n])$ Cauchyfolge in $[V] := \{[v] : v \in V\}$, denn

$$\begin{aligned}\|[v_n] - [v_m]\|_0 &= \inf\{\|v_n - v_m - y\| : y \in L\} \\ &\le \|v_n + u_n - (v_m + u_m)\| = \|x_n - x_m\| \to 0.\end{aligned}$$

Da $L \cap V = (0)$, ist $\dim[V] = \dim V < \infty$ und daher ist $[V]$ vollständig und folglich $[v_n] \to [v]$. Insbesondere kann man für den Grenzwert ein $v \in V$ als Vertreter wählen. Für dieses v gilt

$$\|[x] - [v]\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|[x_n] - [v_n]\| = \lim_{n\to\infty} \|[u_n]\| = 0,$$

denn $u_n \in L$, also ist auch $x - v \in L$. Setze $u := x - v$, so ist $x = u + v \in L \oplus V$. «

Wir haben nicht bewiesen, dass $u_n \to u$ oder $v_n \to v$ sondern lediglich, dass $x = u + v$ mit $u \in L$ und $v \in V$. Über die Konvergenz von (u_n) und (v_n) lassen sich unter diesen allgemeinen Voraussetzungen keine genaueren Aussagen treffen.

6.28 **Lemma** *Sei E normierter Raum, $L \subseteq E$ abgeschlossener linearer Teilraum endlicher Kodimension. Dann gilt*

$$\operatorname{codim} L = \dim L^\perp.$$

» Sei $E = L \oplus \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ mit $\{x_1, \dots, x_n\}$ linear unabhängig.

$$L_j := L \oplus \left\langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \right\rangle$$

ist nach Lemma 6.27 abgeschlossen und $x_j \notin L_j$. Nach 4.16 existieren daher $x_j' \in E'$ mit $L_j \subseteq \ker x_j'$ und $x_j'(x_j) = 1$.

Wir zeigen nun, dass $\{x_1', \dots, x_n'\}$ eine Basis von $L^\perp$ bildet.

1) Die lineare Unabhängigkeit ist klar, denn $x_j'(x_k) = \delta_{jk}$.

2) Sei $x' \in L^\perp$. $x \in E = L \oplus \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, so besitzt x eine Darstellung,

$$x = u + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \qquad u \in L, \ \alpha_j \in \mathbb{K},$$

wobei

$$x'(x) = \underbrace{x'(u)}_{=0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j x'(x_j).$$

Nun besitzt auch x_j eine Darstellung als

$$x_j = \sum_{l=1}^n x_l x_l'(x_j),$$

also

$$\begin{aligned} x'(x) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j x'(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{l=1}^n x_l'(x_j) x'(x_l) \\ &= \sum_{l=1}^n x'(x_l) \sum_{j=1}^n \alpha_j x_l'(x_j) = \sum_{l=1}^n x'(x_l) x_l' \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}_{x-u} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n x'(x_l) x_l'(x). \quad « \end{aligned}$$

6.29 **Satz** *Sei $T \in \mathcal{K}(E)$. Dann gilt*

$$\operatorname{codim} \operatorname{im}(\mathbf{I} - T) \le \dim \ker(\mathbf{I} - T). \quad ⋊$$

» Sei $n = \dim\ker(\mathbf{I}-T)$. Angenommen es existiert eine linear unabhängige Teilmenge $\{y_1,\dots,y_m\}$ mit $\langle y_1,\dots,y_m\rangle \cap \operatorname{im}(\mathbf{I}-T) = (0)$ und $m \geq n+1$.

Sei $\{x_1,\dots,x_n\}$ Basis von $\ker(\mathbf{I}-T)$, dann folgt mit 4.16

$$\exists\, x_j' \in E' : x_j'(x_k) = \delta_{jk}.$$

Setze $\tilde{T}x := Tx + \sum_{j=1}^n x_j'(x)y_j$, so liefert scharfes Hinsehen, dass $\tilde{T}$ kompakt. Betrachte nun

$$(\mathbf{I}-\tilde{T})x = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{I}-T)x - \sum_{j=1}^n x_j'(x)y_j = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\mathbf{I}-T)x}_{\in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)} = \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j'(x)y_j}_{\in\langle y_1,\dots,y_n\rangle}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{I}-T)x = 0 \text{ und } \sum_{j=1}^n x_j'(x)y_j = 0$$

Für ein solches x folgt, da die y_j linear unabhängig, $x_j'(x) = 0$ für $j = 1,\dots,n$. Insbesondere

$$0 = x_j'(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_j'(x_k) = \alpha_j$$

und daher $x = 0$. Somit ist $\ker(\mathbf{I}-\tilde{T}) = (0)$ und daher nach 6.12, $\operatorname{im}(\mathbf{I}-\tilde{T}) = E$.

Zeige nun $\operatorname{im}(\mathbf{I}-\tilde{T}) \subseteq \operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \oplus \langle y_1,\dots,y_n\rangle$, denn dann folgt

$$\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \oplus \langle y_1,\dots,y_n\rangle = E,$$

im Widerspruch zu $\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \cap \langle y_1,\dots,y_m\rangle = (0)$, da $m \geq n+1$.

Für $x \in E$ gilt jedoch,

$$(\mathbf{I}-\tilde{T})x = \underbrace{(\mathbf{I}-T)x}_{\in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T)} - \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j'(x)y_j}_{\in\langle y_1,\dots,y_n\rangle} \in \operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \oplus \langle y_1,\dots,y_n\rangle. \quad «$$

6.30 **Satz** *Sei $T \in \mathcal{K}(E)$. Dann gilt*

$$\dim\ker(\mathbf{I}-T) = \operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) = \dim\ker(\mathbf{I}-T'). \quad ⋊$$

» 1) $\dim\ker(\mathbf{I}-T) \le \dim\ker(\mathbf{I}-T'')$, denn $J_E : E \to E''$ ist injektiv und nach 6.18 gilt

$$T'' \circ J_E = J_E \circ T.$$

Somit ist $(\mathbf{I}-T'') \circ J_E = J_E \circ (\mathbf{I}-T)$. (*)

Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Basis von $\ker(\mathbf{I}-T)$. In Gleichung (*) verschwindet die rechte Seite für jedes Basiselement,

$$(\mathbf{I}-T'')J_E(x_j) = 0 \Rightarrow \{J_E(x_1), \ldots, J_E(x_n)\} \subseteq \ker(\mathbf{I}-T'').$$

Da J_E injektiv, ist die Menge linear unabhängig, also

$$\dim\ker(\mathbf{I}-T) \le \dim\ker(\mathbf{I}-T'').$$

2) Aus 6.29 folgt $\operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \le \dim\ker(\mathbf{I}-T)$ also auch

$$\operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T') \le \dim\ker(\mathbf{I}-T').$$

3) $\dim\ker(\mathbf{I}-T') \overset{6.20}{=} \dim(\operatorname{im}(\mathbf{I}-T))^{\perp} \overset{6.28}{=} \operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T)$. Somit

$$\dim\ker(\mathbf{I}-T'') = \operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T').$$

Aus 1)-3) folgt,

$$\begin{aligned}\dim\ker(\mathbf{I}-T) &\le \dim\ker(\mathbf{I}-T'') = \operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T') \le \dim\ker(\mathbf{I}-T') \\ &= \operatorname{codim}\operatorname{im}(\mathbf{I}-T) \le \ker(\mathbf{I}-T).\end{aligned}$$

Somit gilt Gleichheit in der gesamten Gleichung. «

6.31 **Fredholmsche Integralgleichung** *Sei $E = C([a,b] \to \mathbb{C})$. Zu $g \in E$ ist $f \in E$ gesucht mit*

$$f(x) - \int_a^b K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \qquad a \le x \le b,$$

wobei $K \in C([a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C})$. ⋊

In Übungsaufgabe 4.2 haben wir gezeigt, dass falls

$$\max_{a \le x \le b} \int_a^b K(x,y)\,\mathrm{d}y < 1, \tag{*}$$

$(\mathbf{I} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ existiert, d.h.

$$\forall\ g \in E\ \exists\, !f \in E : (\mathbf{I} - T)f = g$$

und die Lösung f hängt stetig von g ab.

Nun ist T ein kompakter Operator und daher die Fredholm Theorie anwendbar. Falls $\ker(\mathbf{I} - T) = (0)$, so gilt dasselbe auch ohne die (*)-Bedingung.

Ist dagegen $\ker(\mathbf{I} - T) \neq (0)$, so gibt es genau dann Lösungen zu f, falls

$$\forall\ h \in \ker(\mathbf{I} - T') : h'(g) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\forall\ h \in E : \left(\underbrace{h(x) - \int_a^b \overline{K(y,x)} h(y)\,\mathrm{d}y = 0}_{(1)} \right) \Rightarrow \int_a^b g(x)\overline{h}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Insbesondere besagt 6.30, dass (1) genau so viele linear unabhängige Lösungen besitzt wie

$$f(x) - \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

6-D Ausblick

Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{K}(H)$ und T symmetrisch, d.h.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle .$$

6.32 **Satz** *$\lambda = \|T\|$ oder $\lambda = -\|T\|$ ist Eigenwert von T.* ⋊

Für diesen Satz ist die Symmetrie von T eine notwendige Voraussetzung, denn betrachte für $H = l^2$ den modifizierten Shift-Operator

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}),$$

so ist T kompakt (vgl. Übungsaufgabe 10.2). T besitzt aber keine Eigenwerte, denn sei $\lambda = 0$ und $Tx = \lambda x$, so ist $x = 0$ und sei $\lambda \neq 0$ und $Tx = \lambda x$, so ist ebenfalls $x = 0$ aber $\|T\| = \frac{1}{2}$.

6.33 **Satz** *Sei $T \in \mathcal{K}(H)$ symmetrisch. Dann existiert ein ONS $(e_j)_{j \in \mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}$ höchstens abzählbar und*

(a) $\forall\ j \in \mathcal{I} : Te_j = \lambda_j e_j, \quad \lambda_j \neq 0.$

(b) (λ_j) *ist monoton fallend.*

(c) *In (λ_j) kommt jeder Eigenwert so oft vor, wie es seiner endlichen Vielfachheit entspricht.*

(d) $(e_j)_{j \in \mathcal{I}}$ *ist vollständig in $\overline{\operatorname{im} T}$, d.h.*

$$\forall\ x \in \overline{\operatorname{im} T} : x = \sum_{j \in \mathcal{I}} \langle x, e_j \rangle e_j. \quad \rtimes$$

7 Sobolevräume

7-A Das Lebesgue-Integral

7.1 **Definition** $\Sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *heißt* σ*-Algebra, falls*

(a) $\emptyset \in \Sigma$,

(b) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

(c) $A_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma$. $\rtimes$

Es gibt zahllose σ-Algebren auf dem $\mathbb{R}^n$. Die σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, heißt Borel-σ-Algebra.

7.2 **Korollar** *1)* $\mathbb{R}^n \in \Sigma$.

2) $A_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma$.

3) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$. $\rtimes$

7.3 **Definition** *Eine Abbildung* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *heißt Maß, falls*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) μ *σ-additiv, d.h. für* $A_j \in \Sigma$ *mit* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *falls* $j \neq k$*, gilt*

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \quad \rtimes$$

Mit $A \dot{\cup} B$ bzw. $\dot{\bigcup}_j A_j$ fordern wir implizit, dass A und B bzw. die A_j disjunkt sind.

7.4 **Korollar** *1) Wenn $A, B \in \Sigma$ und $A \subseteq B$, dann folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2) $A_j \in \Sigma$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$,

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j). \quad \rtimes$$

7.5 **Satz** *Es existiert eine σ-Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und ein Maß μ auf Σ mit den Eigenschaften:*

1) $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow O \in \Sigma$.

2) $\mu([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

3) $N \in \Sigma$ mit $\mu(N) = 0$ und $M \subseteq N$, so ist $M \in \Sigma$ und $\mu(M) = 0$.

4) μ ist translationsinvariant, d.h.

$$A \in \Sigma,\ x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{cases} x + A \in \Sigma, \\ \mu(x + A) = \mu(A). \end{cases} \quad \rtimes$$

7.6 **Definition** *Für das Paar (Σ, μ), das von allen (Σ, μ), die 1)-4) aus 7.5 erfüllen, die kleinste σ-Algebra besitzt, heißt μ Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.* $\rtimes$

7.7 *Bemerkung.* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar $\Rightarrow A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$. $\multimap$

7.8 **Definition** *Sei $B \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus B) = 0$. Gilt eine Bedingung auf B, so sagt man die Bedingung gilt auf A fast überall.* $\rtimes$

7.9 **Definition** (a) *$f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt messbar, falls*

$$\forall\ a \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}([a, \infty]) \in \Sigma.$$

(b) *$f : D \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls $\operatorname{Re} f$ messbar und $\operatorname{Im} f$ messbar.* $\rtimes$

7.10 **Satz** *1) Sei $D \in \Sigma$ und f stetig, so ist f messbar.*

2) *Falls f, g messbar, dann auch*

   (a) $\min\{f, g\}$ *und* $\max\{f, g\}$.

   (b) $f \cdot g$ *mit der Konvention* $0 \cdot \infty = 0$.

   (c) $f + g$, *falls* $f(x) = \pm\infty \Rightarrow g(x) \neq \mp\infty$ μ-*f.ü.*.
   Insbesondere sind daher $c \cdot f$, $f_+ := \max\{f, 0\}$, $f_- := -\min\{f, 0\}$ *und* $|f| := f_+ + f_-$.

3) *Sei f_n messbar, dann sind es auch*

   (a) $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$,

   (b) $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$.

4) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setze*

$$f \circ g(x) := \begin{cases} \pm\infty, & g(x) = \pm\infty, \\ f \circ g(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

So ist auch $f \circ g$ messbar. ⋊

7.11 **Definition** (a) *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von A.

(b) *$A_j \in \Sigma$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ dann heißt,*

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j}$$

einfache Funktion. ⋊

7.12 **Satz** *Sei $A \in \Sigma$, $f : A \to [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge einfacher Funktionen (s_n) mit*

$$\forall\ x \in A : s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots$$

und $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Falls f beschränkt kann (s_n) so gewählt werden, dass $s_n \rightrightarrows g$ auf A. ⋊

7.13 **Satz** *Sei $A \in \Sigma$.*

1) *Für $A_j \in \Sigma$, $s = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \geq 0$ setze*

$$\int_A s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(A_j).$$

2) *Sei $f : A \to [0, \infty]$ messbar. Dann*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_A s \, \mathrm{d}\mu \, : \, s \text{ einfach, positiv und } s \leq f \right\}.$$

3) *Sei $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu,$$

falls nicht beide Integrale ∞. Andernfalls ist das Integral nicht definiert.

4) *$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue-integrierbar, falls*

$$\int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

5) *$f : A \to \mathbb{C}$ heißt Lebesgue-integrierbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Lebesgue-integrierbar. Schreibe dann $f \in L^1(A)$ und setze*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int_A \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

7.14 **Eigenschaften** *Seien $A, B \in \Sigma$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$ messbar.*

1) *$f \in L^1(A)$ genau dann, wenn $|f| \in L^1(A)$. Dann gilt*

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

2) *Sind $f \in L^1(A)$ und $|g| \leq f$, so ist $g \in L^1(A)$ und*

$$\int_A |g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

3) *Die Abbildung*

$$L^1(A) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

ist linear.

4) *Falls $\mu(A) < \infty$ und f μ-f.ü. beschränkt, so ist $f \in L^1(A)$ und*

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty \, \mu(A).$$

5) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq f(x) \leq b$ μ-f.ü. auf A und $\mu(A) < \infty$. Dann ist $f \in L^1(A)$ und*

$$a\mu(A) \leq \int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq b\mu(A).$$

6) *Sei $f \leq g$ μ-f.ü. auf A, so ist*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu,$$

falls beide Integrale existieren.

7) *Sei $f \in L^1(A)$ und $B \subseteq A$, so ist $f \in L^1(B)$ und*

$$\int_B |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

8) *Sei $\mu(A) = 0$, so ist $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$.*

9) *Sei $f \in L^1(A)$ und für jedes $B \in \Sigma$ gelte*

$$B \subseteq A \Rightarrow \int_B f \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

so ist $f = 0$ μ-f.ü. auf A.

10) *Sei $A \cap B = \emptyset$, $f \in L^1(A)$ und $f \in L^1(B)$, so ist $f \in L^1(A \cap B)$ und*

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

■ Konvergenzsätze

7.15 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Seien $A \in \Sigma$, $f_n : A \to [0,\infty]$ messbar und $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ auf A. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu. \quad ⋊$$

7.16 **Lemma von Fatou** *Seien $A \in \Sigma$, $f_n : A \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_A \liminf_n f_n \, d\mu \le \liminf_n \int_A f_n \, d\mu. \quad ⋊$$

7.17 **Satz von der majorisierten Konvergenz** *Seien $A \in \Sigma$, $f_n, f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $f_n \to f$. Existiert ein $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $\int_A g \, d\mu < \infty$ und $|f_n| \le g$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, d\mu = 0. \quad ⋊$$

7-B L^p-Räume

Für alles Weitere sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.18 **Definition** (a) *Für $1 \le p < \infty$ sei*

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Identifizieren wir Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, wird $\|\cdot\|_p$ zur Norm (Minkowski Ungleichung).

(b) *$u : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt wesentlich beschränkt, falls*

$$\exists\, K > 0 : |u| \le K \ \mu\text{-f.ü.}$$

In diesem Fall heißt

$$\operatorname{esssup}(|u|) := \inf \{K > 0 : |u| \le K \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

wesentliches Supremum von u.

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \|u\|_\infty := \operatorname{esssup} |u| < \infty\}.$$

Durch die obige Identifikation wird $\|\cdot\|_\infty$ zur Norm. ⋊

7.19 **Satz** *1) Für $1 \le p \le \infty$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm.*

2) Für $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum. $L^2(\Omega)$ ist mit

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u \overline{v} \, \mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum. ⋊

7.20 **Satz** *1) Die Menge*

$$C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega \to \mathbb{C}) : \operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \text{ ist kompakt} \right\}$$

ist dicht in $L^p(\Omega)$ im Fall $1 \le p < \infty$.

2) $L^p(\Omega)$ ist separabel. ⋊

Damit erhalten wir auch einen alternativen Zugang zum $L^p(\Omega)$ als Abschluss von $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ bezüglich der $\|\cdot\|_p$-Norm.

» Den Beweis verschieben wir auf später. «

7.21 **Satz** *Sei $1 \le p < \infty$. Die Abbildung*

$$\Phi : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)'$$

mit

$$\Phi(u)(f) = F_u(f) = \int_\Omega f \overline{u} \, \mathrm{d}\mu$$

ist eine isometrische antilineare Bijektion. ⋊

» 1) Seien $f \in L^p(\Omega)$, $u \in L^q(\Omega)$, so folgt mit der Hölder-Ungleichung, dass $f \cdot \overline{u} \in L^1(\Omega)$, sowie

$$\int_\Omega |f \overline{u}| \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \|u\|_q .$$

Somit ist $\Phi(u)$ wohldefiniert und linear, da das Integral linear ist. Es ist sofort ersichtlich, dass

$$\|\Phi(u)\| \le \|u\|_q ,$$

insbesondere ist $\Phi(u) \in L^q(\Omega)$.

2) Setzen wir

$$f(x) = \begin{cases} |u(x)|^{\frac{q}{p}-1}\, u(x), & u(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}\mu = \|u\|_q^p .$$

Folglich ist auch

$$\begin{aligned} |\Phi(u)(f)| &= \left| \int_\Omega f\overline{u}\,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_\Omega |u|^{\frac{q}{p}-1} u\overline{u}\,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_\Omega |u|^{\frac{q}{p}+1} \,\mathrm{d}\mu \right| \\ &= \int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}\mu = \|u\|_q^q \overset{!}{=} \|f\|_p \,\|u\|_q , \end{aligned}$$

denn $\|f\|_p \,\|u\|_q = \|u\|_q^{\frac{q}{p}+1} = \|u\|_q^q$, also existiert ein $f \in L^p(\Omega)$ mit

$$|\Phi(u)(f)| = \|f\|_p = \|u\|_q$$

Somit ist Φ normerhaltend.

3) $\Phi(\alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}\Phi(u) + \overline{\beta}\Phi(v)$ ist klar.

4) Φ ist injektiv, da isometrisch. Zur Surjektivität siehe [Alt] Kapitel 4.3. Der Beweis basiert auf dem Satz von Radon-Nikodym. «

7.22 **Korollar** *Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.* ⋊

» Analoger Beweis zu 5.18. «

7.23 **Satz** $L^p(\Omega)' = (C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)'$. ⋊

Insbesondere ist F_u (mit $u \in L^q(\Omega)$) und damit auch $u \in L^q(\Omega)$ eindeutig bestimmt durch die Werte $F_u(\varphi)$ für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$.

» Zu $F \in L^p(\Omega)'$ ist

$$F\Big|_{C_0^\infty(\Omega\to\mathbb{C})} \in (C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)'.$$

Umkehert existiert zu $f \in (C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)'$ nach dem Fortsetzungssatz 2.5 eine eindeutige Fortsetzung $F \in L^p(\Omega)'$, da $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ dicht in $L^p(\Omega)$. «

7-C Verallgemeinerung der Ableitung I

Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.24 **Bsp** Seien $\Omega = \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ und $f, \partial_{x_i} f \in L^p(\Omega)$. Identifiziere $L^p(\Omega)$ mit $L^q(\Omega)'$, also F_f mit f. Dann sind $\partial_{x_i} f$ bzw $F_{\partial_{x_i} f}$ eindeutig bestimmt durch die Werte auf $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} F_{\partial_{x_i} f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \overline{\partial_{x_i} f} \, \mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi \overline{\partial_{x_i} f} \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{part.int.}}{=} - \int_{\operatorname{supp}\varphi} \partial_{x_i} \varphi \overline{f} \, \mathrm{d}\mu \\ &= -F_f(\partial_{x_i} \varphi). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.25 **Definition** *Seien* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *und* $u \in L^p(\Omega)$ *mit*

$$\forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}) : F_u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F_f(\nabla^\alpha \varphi)$$

bzw.

$$\int_\Omega \varphi \overline{u} \, \mathrm{d}\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \nabla^\alpha \varphi \overline{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

Dann heißt u *schwache Ableitung von* f *der Ordnung* α. *Schreibweise*

$$u := \mathrm{D}^\alpha f. \quad \rtimes$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ gilt also

$$\langle \mathrm{D}^\alpha f, \varphi \rangle = \int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha f) \overline{\varphi} \, \mathrm{d}\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \nabla^\alpha \overline{\varphi} \, \mathrm{d}\mu = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \nabla^\alpha \varphi \rangle .$$

Für alles Folgende seien - sofern nicht anders angegeben - $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

7.26 **Korollar** *Sei* $f \in C^k(\Omega \to \mathbb{C})$ *mit* $\nabla^\alpha f \in L^p(\Omega)$ *für* $|\alpha| \le k$. *Dann gilt*

$$\nabla^\alpha f = \mathrm{D}^\alpha f. \quad \rtimes$$

» Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$,

$$\int_\Omega \varphi \overline{\nabla^\alpha f} \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{part.int.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \nabla^\alpha \varphi \overline{f} \, \mathrm{d}\mu. \quad «$$

7.27 **Bsp** Sei $\Omega = (a,b)$ mit $0 \in (a,b)$ und $f(x) = |x|$. Bestimme $\mathrm{D}^1 f$.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)\overline{D^1 f(x)}\,\mathrm{d}x &= -\int_a^b \varphi'(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^0 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part.int.}}{=} -\int_a^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \operatorname{sign}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}
$$

Die Definition von sign im Nullpunkt ist irrelevant.

Somit ist für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$

$$
\int_a^b \varphi\overline{\mathrm{D}^1 f}\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_a^b \varphi\overline{\operatorname{sign}(x)}\varphi\,\mathrm{d}\mu
$$

also $\mathrm{D}^1 f = \operatorname{sign}(x)$ in $L^p(\Omega)$.

$\operatorname{sign}(x)$ ist jedoch in $L^p(\Omega)$ nicht schwach differenzierbar (vgl. Distributionentheorie). ■

7.28 **Definition** *Sei $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann heißt*

$$
W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \ |\alpha| \le m\}
$$

versehen mit der Norm

$$
\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}
$$

Sobolevraum der Ordnung m. ⋊

7.29 **Satz** *$W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum. $W^{m,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum.* ⋊

» 1) Sei (u_n) Cauchyfolge in $W^{m,p}(\Omega)$, so ist für $|\alpha| \le m$ auch $(\mathrm{D}^\alpha u)$ Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ und damit konvergent, $\mathrm{D}^\alpha u_n \to g_\alpha$.

Wir zeigen nun $\mathrm{D}^\alpha g_0 = g_\alpha$ und $||u_n - g_0||_{m,p} \to 0$.

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} F_{g_\alpha}(\varphi) &= \lim_{n\to\infty} F_{\mathrm{D}^\alpha u_n}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} F_{u_n}(\nabla^\alpha \varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} F_{g_0}(\varphi)(\nabla^\alpha \varphi) = F_{\mathrm{D}^\alpha g_0}(\varphi). \end{aligned}$$

Also ist $g_\alpha = \mathrm{D}^\alpha g_0$ und daher

$$||u_n - g_0||_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\le m} ||\mathrm{D}^\alpha u_n - \mathrm{D}^\alpha g_0||_p^p = \sum_{|\alpha|\le m} ||\mathrm{D}^\alpha u_n - g_\alpha||_p^p \to 0.$$

2) $W^{2,m}$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\le m} \langle \mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v\rangle. \quad «$$

7.30 **Satz** *$W^{m,p}(\Omega)$ ist separabel und reflexiv.* ⋊

» Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ eine Nummerierung aller α mit $|\alpha| \le m$. Setze

$$P : W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^k, \quad u \mapsto (\mathrm{D}^{\alpha_1} u, \dots, \mathrm{D}^{\alpha_k} u),$$

so ist P linear und isometrisch, denn

$$\|u\| = \left(\sum_{j=1}^k \|\mathrm{D}^{\alpha_j} u\|_p^p \right)^{1/p} = \|(\mathrm{D}^{\alpha_1} u, \dots, \mathrm{D}^{\alpha_k} u)\|_{L^p(\Omega)^k}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur Standard-Norm des $L^p(\Omega)^k$ und daher ist $L^p(\Omega)^k$ auch bezüglich dieser Norm separabel und reflexiv.

P ist Isometrie, also ist $W^{m,p}(\Omega) \cong \operatorname{im} P \subseteq L^p(\Omega)^k$ ein Banachraum und damit abgeschlossen. Da $L^p(\Omega)^k$ separabel, ist somit auch $W^{m,p}(\Omega)$ separabel. Mit 4.23 folgt außerdem, dass $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv. «

Wir wollen nun die Produktregel auf die schwache Ableitung verallgemeinern. Für $u, v \in L^p(\Omega)$ ist jedoch nicht zwingend $u \cdot v \in L^p(\Omega)$. Somit ist klar, dass die Produktregel nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an u und v gelten kann.

7.31 **Produktregel** *Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und $f \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$. Dann gelten*

1) $f \cdot u \in W^{m,p}$.

2) $\forall\ |\alpha| \le m : \mathrm{D}^\alpha(f \cdot u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta f)(\mathrm{D}^{\alpha-\beta} u)$. ⋊

» Sei $m = 1$ und $\alpha = e_j$, so gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} -\langle f \cdot u, \nabla^{e_j} \varphi \rangle &= -\int_\Omega f \cdot u \overline{\partial_{x_j} \varphi} \,\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_\Omega u \partial_{x_j}(f \overline{\varphi}) \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega u(\partial_{x_j} f) \overline{\varphi} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega \mathrm{D}^{e_j} u \, f \, \overline{\varphi} \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega u \, \partial_{x_j} f \, \overline{\varphi} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \left\langle f D^{e_j} u + \partial_{x_j} f u, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Somit folgt, $\mathrm{D}^{e_j}(f \cdot u) = f \mathrm{D}^{e_j} u + \partial_{x_j} f \, u$ und insbesondere, $\mathrm{D}^{e_j}(f \cdot u) \in L^p(\Omega)$, also $f \cdot u \in W^{1,p}$.

Der Rest folgt mit Induktion über m. «

7.32 **Definition** *Sei die partielle Differentialgleichung*

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \nabla^\alpha u = f, \qquad a_\alpha \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}), \quad f \in L^p(\Omega)$$

gegeben. Falls $u \in L^p(\Omega)$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ gilt,

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \nabla^\alpha(\overline{a_\alpha} \varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

so heißt u schwache Lösung der Differentialgleichung. ⋊

In obiger Definition wird nicht $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vorausgesetzt, denn falls zusätzlich $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und u schwache Lösung, gilt sogar

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha u = f.$$

7.33 **Definition** $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})}^{W^{m,p}(\Omega)}$. ⋊

$W_0^{m,p}(\Omega)$ ist als abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $W^{m,p}(\Omega)$ selbst ein Banachraum und $W_0^{m,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum.

7.34 **Veranschaulichung** *Sei* $1 < p < \infty$ *und* $u \in W_0^{1,p}((0,1)) \cap C([0,1])$. *Dann gilt* $u(0) = u(1) = 0$. *Allgemeiner: Ist* $u \in W_0^{m,p}((0,1)) \cap C^{m-1}([0,1])$, *so gilt*

$$\forall\ j = 0,\dots,m-1 : u^{(j)}(0) = 0 = u^{(j)}(1). \quad \rtimes$$

» u ist stetig auf $[0,1]$, d.h. insbesondere ist

$$u(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h u(x)\,\mathrm{d}x$$

und da $u \in W_0^{1,p}((0,1))$, existiert eine Folge (u_n) in $C_0^\infty((0,1)\to\mathbb{C})$ mit $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$, wobei

$$u_n(x) = \int_0^x u_n'(s)\,\mathrm{d}s \le \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^{1/q}\left(\int_0^x |u_n'(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \le C\cdot x^{1/q},$$

mit $C = \sup\limits_{n\ge 1}\|u_n\|_p < \infty$. Sei $A \subset [0,1]$ messbar, so gilt $\|(u_n - u)\chi_A\|_1 \le \underbrace{\|\chi_A\|_q}_{\text{const}}\underbrace{\|u_n - u\|_p}_{\to 0}$. Somit gilt

$$\left|\int_0^h u(x)\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^h u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \le C\int_0^h x^{1/q}\,\mathrm{d}x = C\frac{h^{1+1/q}}{1+1/q}.$$

also

$$|u(0)| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left|\int_0^h u(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}C\frac{h^{1+1/q}}{1+1/q} = 0.$$

$u(1) = 0$ folgt analog. «

7.35 **Satz** *Das Dirichlet Problem*

$$-\Delta u + u = f \text{ in } \Omega, \qquad u\big|_{\delta\Omega} = 0$$

besitzt für $f \in L^2(\Omega)$ *in* $L^2(\Omega)$ *eine eindeutig bestimmte schwache Lösung* u *mit* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, *so dass für alle* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\to\mathbb{C})$ *gilt*

$$-\langle u, \Delta\varphi\rangle + \langle u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle. \quad \rtimes$$

» *Eindeutigkeit*. Seien u, v Lösungen der inhomogenen Gleichung, so ist $u - v$ Lösung der homogenen Gleichung. Es genügt also sich auf den homogenen Fall zu beschränken.

Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $-\Delta u + u = 0$ und (u_n) Folge in $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ mit $\|u_n - u\|_{1,2} \to 0$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle u, \Delta u_n \rangle + \langle u, u_n \rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \mathrm{D}^{e_j} u, \partial_{x_j} u_n \right\rangle + \langle u, u_n \rangle \\ &\to \langle \mathrm{D}^{e_j} u, \mathrm{D}^{e_j} u \rangle + \langle u, u \rangle = \|u\|_{1,2}^2 . \end{aligned}$$

Folglich ist $u = 0$ und damit die Lösung eindeutig.

Existenz. Sei $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{C}$ mit

$$F(v) = \langle v, f \rangle ,$$

so ist $F \in W_0^{1,2}(\Omega)'$, denn

$$|F(v)| \leq \|v\|_{0,2} \left\|f\right\|_2 \leq \left\|f\right\|_2 \|v\|_{1,2} .$$

Das Lemma von Riesz besagt nun, dass es genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert so dass für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$\langle v, f \rangle_2 = F(v) = \langle v, u \rangle_{1,2} = \sum_{j=1}^n \langle \mathrm{D}^{e_j} v, \mathrm{D}^{e_j} u \rangle + \langle v, u \rangle .$$

Für $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ folgt

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \mathrm{D}^{e_j} u, \nabla^{e_j} \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = -\sum_{j=1}^n \langle u, \Delta\varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle . \quad «$$

7.36 *Bemerkung.* Offensichtlich gilt

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{D}^{2e_j} u = f - u \in L^2(\Omega).$$

Die elliptische Regularitätstheorie zeigt, dass sogar $u \in W^{2,2}(\Omega)$, falls Ω “genügend gut”. ⊸

7·37 **Satz** *Sei* $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ *mit* $\mathrm{D}^\alpha u = 0$ *für* $|\alpha| = 1$. *Dann folgt* $u = c$. *Falls* $\mu(\Omega) = \infty$ *oder* $u \in W_0^{1p}(\Omega)$ *folgt sogar* $u = 0$. ⋊

» 1) Sei $n = 1$, $\Omega = (a, b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$. Sei $\psi \in C_0^\infty((a,b) \to \mathbb{C})$ mit

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

so lässt sich jedes $\varphi \in C_0^\infty((a,b) \to \mathbb{C})$ schreiben als

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\psi.$$

Insbesondere ist $\int_a^b \tilde{\varphi}\,\mathrm{d}\mu = 0$ und $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty((a,b) \to \mathbb{C})$. Setze nun

$$\Phi(x) := \int_a^x \tilde{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

so ist $\Phi \in C_0^\infty((a,b) \to \mathbb{C})$, denn

$$\Phi(x) = 0 \begin{cases} \text{für } a < x \le \min\operatorname{supp}\tilde{\varphi}, \\ \text{für } \max\operatorname{supp}\tilde{\varphi} \le x < b. \end{cases}$$

Damit können wir φ darstellen durch,

$$\varphi = \Phi' + \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\psi.$$

Sei nun u wie vorausgesetzt, so gilt

$$\begin{aligned} F_u(\varphi) &= \langle u, \varphi\rangle = \langle u, \Phi'\rangle + \int_a^b \overline{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\ \langle u, \psi\rangle \\ &= -\underbrace{\left\langle D^1 u, \Phi\right\rangle}_{=0} + \int_a^b \overline{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\ \underbrace{\langle u, \psi\rangle}_{=c} = \langle c, \varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

Und da φ beliebig war, ist $u = c$.

2) Wir behandeln exemplarisch den Fall $n = 2$, die übrigen Fälle ergeben sich dann automatisch.

a) Sei $(x_1, x_2) \in \Omega$ und $W_\varepsilon := (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \subseteq \Omega$. Wähle $\psi_j \in C_0^\infty((x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon) \to \mathbb{C})$ mit

$$\int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} \psi_j(x) = 1, \qquad j = 1, 2.$$

Wir zeigen nun, dass $u = 0$ auf W_ε.

Für festes $y_2 \in (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$ besitzt $\varphi \in C_0^\infty(W_\varepsilon \to \mathbb{C})$ analog zum Vorangegangenen eine Darstellung,

$$\varphi(y_1, y_2) = F'_{y_2}(y_1) + \underbrace{\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \varphi(t, y_2)\,\mathrm{d}t}_{:=g(y_2)}\ \psi_1(y_1)$$

mit $F_{y_2} \in C_0^\infty((x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \to \mathbb{C})$. Aus dem ersten Teil folgt ebenfalls, dass ein $G \in C_0^\infty((x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \to \mathbb{C})$ existiert, so dass

$$g(y_2) = G'(y_2) + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} g(s)\,\mathrm{d}s\, \psi_2(y_2).$$

Wir können somit φ schreiben als

$$\varphi(y_1, y_2) = \underbrace{F'_{y_2}(y_1)}_{\partial_1\Phi_1(y_1,y_2)} + \underbrace{G'(y_2)\psi_1(y_1)}_{\partial_2\Phi_2(y_1,y_2)} + \int_{W_\varepsilon} \varphi\,\mathrm{d}\mu\, \psi_1(y_1)\psi_2(y_2).$$

Somit gilt (wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ das Integral über W_ε beschreibt),

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle_\varepsilon &= \langle u, \partial_1\Phi_1\rangle_\varepsilon + \langle u, \partial_2\Phi_2\rangle_\varepsilon + \left(\int_{W_\varepsilon} \overline{\varphi}\,\mathrm{d}\mu\right) \underbrace{\langle u, \psi_1\psi_2\rangle_\varepsilon}_{:=c} \\ &= \langle u, \partial_1\Phi_1\rangle_\varepsilon + \langle u, \partial_2\Phi_2\rangle_\varepsilon + \langle c, \varphi\rangle_\varepsilon\end{aligned}$$

Setzen wir Φ_1, Φ_2 durch Null auf ganz Ω fort, so gilt

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle_\varepsilon &= \langle u, \partial_1\Phi_1\rangle + \langle u, \partial_2\Phi_2\rangle + \langle c, \varphi\rangle_\varepsilon \\ &= \underbrace{\langle \mathrm{D}^{e_1}u, \Phi_1\rangle + \langle \mathrm{D}^{e_2}u, \Phi_2\rangle}_{=0} + \langle c, \varphi\rangle_\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Also ist $u = c$ auf W_ε.

b) Seien $x, y \in \Omega$. Da Ω wegzusammenhängend, existiert ein Polygonzug Γ von x nach y, der ganz in Ω verläuft. Nun ist Γ kompakt, also kann ganz Γ mit endlich vielen $W_\varepsilon^{(j)}$ überdeckt werden, $j = 1, \dots, J$. Auf jedem $W_\varepsilon^{(j)}$ ist u konstant.

Da Γ alle $W_\varepsilon^{(j)}$ durchläuft und aneinandergrenzende $W_\varepsilon^{(j)}$ nichtleeren Schnitt haben, ist $u = c$ mit einer einzigen Konstanten für alle $W_\varepsilon^{(j)}$. Somit ist $u = c$ auf Ω.

3) Sei $u = c$ und $\mu(\Omega) = \infty$, so gilt

$$\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\mu = |c|^p \, \mu(\Omega) < \infty,$$

also ist $c = 0$.

4) Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\mu(\Omega) < \infty$. Eine leichte Übung zeigt

$$\langle \mathrm{D}^{e_j} v, u \rangle = - \langle v, \mathrm{D}^{e_j} u \rangle \,,$$

für $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Setzen wir $v(x) = \arctan(x_1)$, so ist

$$\partial_1 v(x) = \frac{1}{1 + x_1^2}, \qquad \partial_j v(x) = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Somit ist $v \in C^1(\Omega \to \mathbb{R})$ und $v, \nabla v$ sind beschränkt, also ist $v \in W^{1,p}(\Omega)$, da $\mu(\Omega) < \infty$.

Nach Voraussetzung ist $\langle v, \mathrm{D}^{e_j} u \rangle = 0$, also gilt

$$0 = - \langle v, \mathrm{D}^{e_1} u \rangle = \langle D^{e_1} v, u \rangle = \langle \partial_1 v, c \rangle = \overline{c} \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{1 + x_1^2} \, \mathrm{d}x}_{> \mu(\Omega) \neq 0}$$

und folglich ist $c = 0$. «

7-D Verallgemeinerung der Ableitung II

Für alles Weitere sei wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.38 **Definition** (a) *Seien* $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Falls eine Folge* (u_n) *in* $C^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ *existiert mit* $u_n \to u$ *und* $\nabla^\alpha u_n \to v$ *in* $L^p(\Omega)$, *so heißt* v *starke Ableitung von* u *der Ordnung* α. *Schreibe* $\mathrm{D}_s^\alpha u := v$.

(b) $H^{m,p}(\Omega) := \overline{\left\{\varphi \in C^\infty(\Omega \to \mathbb{C}) : \|\varphi\|_{m,p} < \infty\right\}}$ *heißt* *m-ter Sobolevraum*.
$H_0^{m,p}(\Omega) := W_0^{m,p}(\Omega)$. ⋊

7.39 **Satz** *1) Sei* $u \in L^p(\Omega)$ *mit* $\mathrm{D}_s^\alpha u \in L^p(\Omega)$ *für ein* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *so stimmen schwache und starke Ableitung überein,*

$$\mathrm{D}_s^\alpha u = \mathrm{D}^\alpha u.$$

2) $H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ *und* $H^{m,p}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.* ⋊

» 1) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ und u wie vorausgesetzt, dann

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}^\alpha u, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \nabla^\alpha \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \langle u_n, \nabla^\alpha \varphi \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n \overline{\nabla^\alpha \varphi}\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla^\alpha u_n \overline{\varphi}\, \mathrm{d}\mu \\ &= \langle \mathrm{D}_s^\alpha u, \varphi \rangle .\end{aligned}$$

Da die rechte Seite existiert, existiert auch die linke und somit ist $\mathrm{D}^\alpha u = \mathrm{D}_s^\alpha u$.

2) Sei $\varphi \in C^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ und $\|\varphi\|_{m,p} < \infty$, so ist $\varphi \in W^{m,p}(\Omega)$. Also ist $H^{m,p}(\Omega)$ sinnvoll definiert und $\subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Da $H^{m,p}(\Omega)$ abgeschlossener Teilraum von $W^{m,p}(\Omega)$ ist $H^{m,p}(\Omega)$ Banachraum. «

7.40 **Satz von Meyers und Serrin (1964)** *Für* $1 \leq p < \infty$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *ist*

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega). \quad ⋊$$

» Zum Beweis siehe [Adams, R.A]. «

7.41 **Definition** *Gilt* $u \in H^{m,p}(\Omega)$ *und*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha u = f, \qquad a_\alpha \in C_b(\Omega \to \mathbb{C}), \quad f \in L^p(\Omega).$$

Dann heißt u *starke Lösung der Differentialgleichung.*
Gilt sogar $u \in C^m(\Omega \to \mathbb{C})$, *so heißt* u *klassische Lösung.* ⋊

7-E Approximation

Für alles Weitere sei $\Omega \subset O$ offen.

7.42 **Definition** (a) *Seien M und K Mengen mit $K \subset M$ und K kompakt, so schreiben wir $K \Subset M$.*

(b) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, dann ist*

$$L^1_{loc}(A) := \left\{ u : A \to \mathbb{C} : \ \forall\ K \Subset A : u\big|_K \in L^1(K) \right\}.$$

(c) *Für $u : O \to \mathbb{C}$ sei die Nullfortsetzung von u bezeichnet mit*

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(d) *Sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit*

(i) $j(x) \geq 0$ *auf* $\mathbb{R}^n$,

(ii) $j(x) = 0$ *für* $|x| \geq 1$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} j \,\mathrm{d}\mu = 1$.

Zu $\varepsilon > 0$ sei

$$j_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

so ist

(i) $j_\varepsilon(x) = 0$ *für* $|x| \geq \varepsilon$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu = 1$.

Für $u \in L^1_{loc}(\overline{O})$ sei

$$J_\varepsilon u(x) := j_\varepsilon * u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

J_ε heißt Glättungsoperator (Mollifier). ⋊

Man rechnet leicht nach, dass eine Funktion j mit den obigen Eigenschaften gegeben ist durch

$$j(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x} f(x), \qquad f(x) = e^{-(1+|x|^2)^{-1}}.$$

7.43 **Satz** *Sei $u \in L^1_{loc}(\overline{O})$, so ist $J_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ und*

$$\nabla^\alpha J_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^\alpha j_\varepsilon(x-y)\tilde{u}(y)\,\mathrm{d}y\,. \quad \rtimes$$

» 1) j_ε ist stetig differenzierbar und hat kompakten Träger, ist also global Lipschitz-stetig mit Konstante L.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ und $K_\varepsilon(x)$ Umgebung von x. Da $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{O})$, wird das Integral über $\overline{K_{2\varepsilon}(x) \cap \Omega}$ durch eine Konstante C majorisiert. Also gilt für $x' \in K_\varepsilon(x)$,

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon u(x) - J_\varepsilon u(x')| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |j_\varepsilon(x-y) - j_\varepsilon(x'-y)|\,|\tilde{u}(y)|\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{K_{2\varepsilon}(x)} |j_\varepsilon(x-y) - j_\varepsilon(x'-y)|\,|\tilde{u}(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le L\,|x-x'| \int_{\overline{K_{2\varepsilon}(x)\cap\Omega}} |\tilde{u}(y)|\,\mathrm{d}y \le LC\,|x-x'|\,. \end{aligned}$$

Somit ist $J_\varepsilon u$ sogar lokal lipschitz stetig.

2) Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz und dem Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt man analog,

$$\nabla^\alpha J_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^\alpha j_\varepsilon(x-y)\tilde{u}(y)\,\mathrm{d}y\,. \quad «$$

7.44 **Abschneidefunktion** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und für $\varepsilon > 0$*

$$M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,M) < \varepsilon\} = \bigcup_{x\in M} K_\varepsilon(x),$$

so ist M_ε offen und damit messbar. Setze

$$\psi = J_\varepsilon \chi_{M_\varepsilon} = \int_{M_\varepsilon} j_\varepsilon(\cdot - y)\,\mathrm{d}y\,,$$

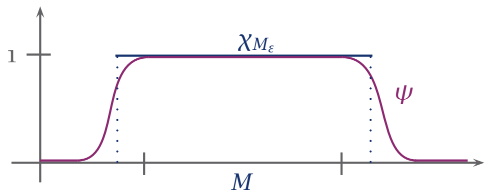
so gelten

(i) $0 \le \psi(x) \le 1$ *auf* $\mathbb{R}^n$,

(ii) $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$,

(iii) $\psi(x) = 0, \quad d(x, M_\varepsilon) > \varepsilon$,

(iv) $\psi(x) = 1$ *auf* M. $\rtimes$



7.1 **Zur Abschneidefunktion.**

7.45 **Satz** *1) Sei* $u \in L^1_{loc}(O)$ *und* $\operatorname{supp} u \Subset O$, *dann*

$$J_\varepsilon u \in C_0^\infty(O \to \mathbb{C}), \qquad \text{für } \varepsilon < d(\operatorname{supp} u, \partial O).$$

2) Für $1 \le p < \infty$ *und* $u \in L^p(O)$ *gelten,*

(a) $J_\varepsilon u \in L^p(O)$,

(b) $\|J_\varepsilon u\|_p \le \|u\|_p$,

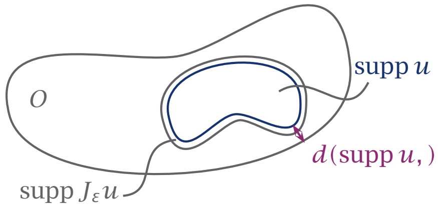
(c) $\|J_\varepsilon u - u\|_p \to 0, \quad$ *für* $\varepsilon \downarrow 0$.

3) Ist $u \in L^\infty(O)$, *so gilt* $|J_\varepsilon u(x)| \le \|u\|_\infty$.

4) Ist $u \in C(O \to \mathbb{C})$ *und* $K \Subset O$, *dann* $J_\varepsilon u \twoheadrightarrow u$ *auf* K *für* $\varepsilon \downarrow 0$. $\rtimes$

» "1)": Siehe Skizze, die Details sind eine leichte Übung.

"3)": $|J_\varepsilon u|(x) = \left| \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\tilde{u}(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \|u\|_\infty \underbrace{\|j_\varepsilon\|_1}_{=1} = \|u\|_\infty$.



7.2 **Zum Beweis von Satz 7.47.**

"4)": Für $x \in K$ gilt

$$|J_\varepsilon u(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)(u(y) - u(x))\,\mathrm{d}y \right| \\ \leq \sup_{|x-y|<\varepsilon} |u(y) - u(x)|\,.$$

Setzen wir $K_\varepsilon := \overline{\{z \in \mathbb{R}^n : d(z,K) < \varepsilon\}}$, so ist K_ε kompakt und Teilmenge von O für $\varepsilon < d(K, \partial O)$. Somit ist u dort gleichmäßig stetig, d.h.

$$\sup_{\substack{|x-y|<\varepsilon \\ x,y \in K_\varepsilon}} |u(y) - u(x)| \to 0, \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

unabhängig vom speziell gewählten $x \in K$.

"2)": Zu $p \neq 1$ sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt

$$|J_\varepsilon u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \tilde{u}(y)\,\mathrm{d}y \right| \\ \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \right)^{1/q}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,|\tilde{u}(y)|^p\,\mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

Für $p = 1$ ist diese Ungleichung trivialerweise ebenfalls erfüllt.

Für $1 \leq p < \infty$ gilt folglich,

$$\int_O |J_\varepsilon u(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_O \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,\left|\tilde{u(y)}\right|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_O j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x}_{=1} \left|\tilde{u(y)}\right|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_p^p\,.$$

Somit wären (a) und (b) bewiesen. Zum Beweis von (c) benötigen wir noch etwas Vorbereitung. «

7.46 *Bemerkung.* Es ist nicht einfach zu zeigen, dass für $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt auch

$$\|J_\varepsilon \chi_O - \chi_O\|_p \to 0,$$

denn es gibt solche O mit $\mu(\partial O) > 0$.

Sei z.B. $n = 1$ und (q_j) eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-2, 2]$. Setzen wir

$$O := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(q_j - \frac{1}{2^j}, q_j + \frac{1}{2^j} \right),$$

so ist O offen und

$$\mu(O) \le \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{j-1}} = 2.$$

Da $\left\{q_j\right\} \subset O$, folgt $[-2, 2] \subset \overline{O}$, d.h. $\mu(\overline{O}) \ge 4$ also ist

$$\mu(\partial O) = \mu(\overline{O} \setminus O) = \mu(\overline{O}) - \mu(O) = 2. \quad ⊸$$

7.47 **Satz von Lusin** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $\mu(A) < \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar, $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ f_\varepsilon \in C_0(A \to \mathbb{R}) : \|f_\varepsilon\|_\infty \le \|f\|_\infty \wedge \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : f_\varepsilon(x) \ne f(x)\right\} < \varepsilon. \quad ⋊$$

» Siehe [Alt] Anhang 4.7. «

7.48 **Satz** *Sei $1 \le p < \infty$.*

1) *Die Menge $\{s_n : O \to \mathbb{C} : s_n$ einfach und $\operatorname{supp} s_n \Subset O\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$.*

2) *$C_0(O \to \mathbb{C})$ ist dicht in $L^p(\Omega)$.* ⋊

» Sei $f \in L^p(O)$ gegeben. Ohne Einschränkung ist f reellwertig und positiv ansonsten zerlege f in $(\operatorname{Re} f)_\pm$, $(\operatorname{Im} f)_\pm$.

7.3 **Zur Konstruktion von O_k.**

1) Sei $O_k := \left\{x \in O : |x| < k \wedge d(x, \partial O) > \frac{1}{k}\right\}$.

   Setze $f_k = \chi_{O_k} f$, dann ist f_k messbar, $\operatorname{supp} f_k \subset \overline{O}_k \Subset O$ und auf O gilt

   $$0 \le f_k(x) \le f(x), \qquad f_k(x) \to f(x).$$

   Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir somit,

   $$\|f_k - f\|_p^p = \int_\Omega |f_k - f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

   Aus der Maßtheorie wissen wir weiterhin dass eine Folge einfacher Funktionen (s_n) existiert, die auf O monoton geen f_k konvergiert,

   $$0 \le s_n(x) \le f_k(x), \qquad s_n(x) \to f_k(x).$$

   Ebenfalls mit majorisierter Konvergenz folgt, dass $\|s_n - f_k\|_p \to 0$.

   Somit folgt 1).

2) Sei nun $s = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ mit $\|f - s\|_p < \varepsilon$, $\operatorname{supp} s \Subset O$ und $A_j \subset \operatorname{supp} s$. Für jedes der endlich vielen $j \in \{1, \dots, N\}$ existiert nach dem Satz von Lusin ein $g_j \in C_0(A_j \to \mathbb{C})$ mit $\left|g_j(x)\right| \le 1$ auf A_j und

   $$\mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \neq \chi_{A_j}(x)\right\} < \varepsilon.$$

   Somit folgt

   $$\left\|\chi_{A_j} - g_j\right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|\chi_{A_j} - g_j\right|^p}_{\le 2} \mathrm{d}\mu \le 2^p \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \neq \chi_{A_j}(x)\right\} < 2^p \varepsilon.$$

   Da g_j stetig und $\operatorname{supp} g_j \Subset O$ erhalten wir analog für s,

   $$\left\|s - \sum_{j=1}^N a_j g_j\right\|_p^p \le N 2^p \varepsilon. \quad «$$

» *Beweis von 7.47 2) (c).* Zu $u \in L^p(\Omega)$ wähle $g \in C_0(\Omega \to \mathbb{C})$ mit $\|u - g\|_p < \varepsilon$. Aus 7.47 1) wissen wir

$$J_\varepsilon g \in C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C}), \qquad \text{für } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Für $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt außerdem $J_\varepsilon g \subset \{x \in \Omega : d(x, \operatorname{supp} g) < \varepsilon\} \Subset \Omega$. Setzen wir daher

$$K := \{x \in \Omega : d(x, \operatorname{supp} g) \leq \varepsilon_0\},$$

so folgt mit 7.47 4)

$$J_\varepsilon g(x) - \tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus K \\ \to 0, & \text{gleichmäßig auf } K. \end{cases}$$

Nun gilt

$$\|J_\varepsilon g - g\|_p^p = \int_K |J_\varepsilon g - g|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{x \in K} |J_\varepsilon g(x) - g(x)|^p \, \mu(K) \to 0, \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\|u - J_\varepsilon u\|_p \leq \|u - g\|_p + \|g - J_\varepsilon g\|_p + \|J_\varepsilon(g - u)\|_p < \delta,$$

für ε hinreichend klein. «

7.49 **Korollar** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$ dicht in $L^p(O)$.* ⋊

» Aus dem Beweis von 7.47 verwenden wir

$$\|u - J_\varepsilon g\|_p \leq \|u - g\|_p + \|g - J_\varepsilon g\|_p < 2\delta,$$

für ε hinreichend klein wobei $J_\varepsilon g \in C_0^\infty(O \to \mathbb{C})$ für ε hinreichend. «

7.50 **Satz** *Sei $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ und $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\forall \ |\alpha| \leq m : J_\varepsilon \mathrm{D}^\alpha u = \nabla^\alpha (J_\varepsilon u). \quad ⋊$$

» Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\langle J_\varepsilon \mathrm{D}^\alpha u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) \mathrm{D}^\alpha u(y) \,\mathrm{d}y\, \overline{\varphi} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{D}^\alpha u(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\varphi(x) \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}y\,,
\end{aligned}
$$

da j_ε reellwertig. Nun ist $j_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ wir können somit die Definition der schwachen Ableitung anwenden und erhalten,

$$
\begin{aligned}
\ldots &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y^\alpha j_\varepsilon(x-y)\varphi(x) \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla^\alpha j_\varepsilon)(x-y)\varphi(x) \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\nabla^\alpha j_\varepsilon)(x-y) \,\mathrm{d}y\, \overline{\varphi}(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \langle \nabla^\alpha J_\varepsilon u, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

und da φ beliebig war, folgt die Behauptung. «

7.51 **Satz** *Sei* $\Omega = \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$
W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n). \quad \rtimes
$$

» "$\subset$": $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt nach Definition.
"$\supset$": Sei $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Zeige

$$
\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : \|\varphi - u\|_{m,p} < \varepsilon.
$$

Abschneiden von u. Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit $0 \le \psi \le 1$ und

$$
\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \ge 2. \end{cases}
$$

Setzen wir $u_k(x) = \psi(k^{-1}x)u(x)$, dann gilt für $|\alpha| \le m$:

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathrm{D}^\alpha u - \psi(k^{-1}\cdot)\mathrm{D}^\alpha u \right\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}^\alpha u(x)|^p \left| 1 - \psi(k^{-1}x) \right|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

nach majorisierter Konvergenz. Nun ist

$$\|\mathrm{D}^\alpha u - \mathrm{D}^\alpha u_k\|_p \le \left\|\mathrm{D}^\alpha u - \psi(k^{-1}x)\mathrm{D}^\alpha u\right\|_p + \sum_{\substack{\beta\le\alpha\\ \beta\neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\nabla_x^\beta \psi(k^{-1}x)\mathrm{D}^{\alpha-\beta}u\right\|_p$$

und $\left|\nabla_x^\beta \psi(k^{-1}x)\right| \le \frac{1}{k^{|\beta|}}\left|(\nabla^\beta\psi)(k^{-1}x)\right|$ also

$$\ldots \le \left\|\mathrm{D}^\alpha u - \psi(k^{-1}x)\mathrm{D}^\alpha u\right\|_p + \frac{1}{k}c\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\|\mathrm{D}^{\alpha-\beta}u\right\|_p \to \infty.$$

Somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|u - u_k\|_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $\varphi = J_\delta u_k$ mit δ noch zu bestimmen. Nun ist $\operatorname{supp} u_k \subset K_{2k}(0)$, da ψ außerhalb verschwindet. Somit ist $J_\delta u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$. Für $|\alpha| \le m$ gilt also

$$\|\mathrm{D}^\alpha(u_k - J_\delta u_k)\|_p \overset{7.50}{=} \|\mathrm{D}^\alpha u_k - J_\delta D^\alpha u_k\|_p \overset{7.47}{\to} 0.$$

Somit existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass

$$\|u_k - J_\delta u_k\|_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \delta \ge \delta_0.$$

Zusammenfassend also

$$\left\|u - J_{\delta_0} u_k\right\|_{m,p} < \varepsilon. \quad «$$

7.52 **Korollar** *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $C_0^m(O \to \mathbb{C}) \subset W_0^{m,p}(O)$.* ⋊

» Sei $u \in C_0^m(O \to \mathbb{C})$. Setze $\varphi_\varepsilon := J_\varepsilon u$, so ist nach 7.47 $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(O \to \mathbb{C})$ für $\varepsilon < d(\operatorname{supp} u, \partial O)$. Wie im Beweis von Satz 7.51 sieht man sofort, dass

$$\|\mathrm{D}^\alpha\varphi_\varepsilon - \mathrm{D}^\alpha u\|_p = \|J_\varepsilon \nabla^\alpha u - \nabla^\alpha u\|_0 \to 0.$$

Somit $\|\varphi_\varepsilon - u\|_{m,p} \to 0.$ «

7.53 **Produktregel** *Sei* $m \in \mathbb{N}$, $u \in W^{m,p}(O)$ *und* $f \in C^m(O \to \mathbb{C})$ *mit* $\|\nabla^\alpha f\|_\infty \le c$ *für* $|\alpha| \le m$. *Dann gilt*

$$f \cdot u \in W^{m,p}(O)$$

und

$$\mathrm{D}^\alpha(f \cdot u) = \sum_{\beta \le \alpha} \nabla^\beta f \cdot \mathrm{D}^{\alpha-\beta} u. \quad \rtimes$$

» Wir beweisen lediglich den Fall $m = 1$, die übrigen Fälle ergeben sich analog. Sei $\varphi \in C_0^\infty(O \to \mathbb{C})$, so ist

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}^{e_j}(f \cdot u), \varphi \rangle &= -\langle f \cdot u, \nabla^{e_j} \varphi \rangle = -\left\langle u, \overline{f} \nabla^{e_j} \varphi \right\rangle \\ &= -\left\langle u, \nabla^{e_j}(\overline{f} \cdot u) \right\rangle + \langle u, (\nabla^{e_j} f)\varphi \rangle .\end{aligned}$$

In Übung 14.1 haben wir bewiesen $-\left\langle u, \nabla^{e_j}(\overline{f} \cdot \varphi) \right\rangle = \langle (\mathrm{D}^{e_j} u) f, \varphi \rangle$ also gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}^{e_j}(f \cdot u), \varphi \rangle &= \langle f(\mathrm{D}^{e_j} u), \varphi \rangle + \langle (\nabla^{e_j} f) u, \varphi \rangle \\ &= \langle f(\mathrm{D}^{e_j} u) + (\nabla^{e_j} f) u, \varphi \rangle . \quad «\end{aligned}$$

8 Unbeschränkte Operatoren in Hilberträumen

Erinnerung. Ein linearer Operator $A : H \to H$ auf dem Hilbertraum H heißt symmetrisch, falls

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad x, y \in H. \quad ⊸$$

Der folgende Satz zeigt, dass auf ganz H definierte symmetrische Operatoren nichts neues ergeben.

8.1 **Satz von Hellinger-Toeplitz** *Jeder symmetrische Operator $A : H \to H$ ist beschränkt.* ⋊

» Übungsaufgabe 8.4 «

8.2 *Vereinbarung.* Im Folgenden sei H stets Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $A : D(A) \to H$ mit $D(A) \subset H$ linearer Operator. ⊸

8.3 **Definition** *A heißt symmetrisch, wenn für $x, y \in D(A)$ gilt*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle. \quad ⋊$$

8.4 **Bsp** Sei $H = L^2(O)$, $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$Au = -\Delta u := -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}^{2e_j} u$$

für $u \in D(A) = W^{2,2}(O) \cap W_0^{1,2}(O)$. A ist symmetrisch, denn seien $u, v \in D(A)$, so ist

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle &= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle \mathrm{D}^{2e_j} u, v\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathrm{D}^{e_j} u, \mathrm{D}^{e_j} v\rangle = -\sum_{j=1}^{n} \left\langle u, \mathrm{D}^{2e_j} v\right\rangle \\ &= \langle u, \Delta v\rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

8.5 **Definition** *Sei $D(A)$ dicht in H. Der Operator*

$$\mathrm{D}(A^*) := \{y \in H : \ \exists\, y^* \in H \ \forall\, x \in D(A) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle\},$$
$$A^* y = y^*$$

heißt zu A adjungierter Operator. ⋊

8.6 **Satz** *1) y^* ist durch y und die Bedingung*

$$\forall\, x \in D(A) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

eindeutig bestimmt.

2) A^* ist linear. ⋊

» 1) Sei $\tilde{y} \in H$ und erfülle ebenfalls die Bedingung, dann folgt für alle $x \in D(A)$,

$$\langle x, y^* - \tilde{y} \rangle = \langle x, y^* \rangle - \langle x, \tilde{y} \rangle = 0$$

und da $D(A) \subset H$ dicht folgt auch

$$\langle y^* - \tilde{y}, y^* - \tilde{y} \rangle = 0.$$

2) Seien $y_1, y_2 \in D(A^*)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ so gilt

$$\langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha}\, \langle x, y_1^* \rangle + \overline{\beta}\, \langle x, y_2^* \rangle = \langle x, \alpha y_1^* + \beta y_2^* \rangle$$

also ist $\alpha y_1 + \beta y_2 \in D(A^*)$ und

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1^* + \beta y_2^*. \quad «$$

8.7 **Satz** *Sei $D(A) \subset H$ dicht und A symmetrisch. Dann ist A^* eine Fortsetzung von A, d.h.*

$$D(A) \subset D(A^*), \qquad A^* x = Ax \text{ für } x \in D(A).$$

Schreibe $A \subset A^*$. ⋊

» Sei $y \in D(A)$, so gilt

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, A^*y\rangle .$$

Also ist $y \in D(A^*)$ und $A^*y = Ay$. «

8.8 **Definition** *Sei $D(A)$ dicht. A heißt selbstadjungiert, falls*

$$A = A^*. \quad \rtimes$$

8.9 **Satz** *Jeder selbstadjungierte Operator ist symmetrisch.* $\rtimes$

» Seien $x, y \in D(A)$. Dann gilt

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, Ay\rangle . \quad «$$

8.10 **Bsp** Sei $H = L^2((-1,1))$ und $D(A) = C_0^\infty((-1,1) \to \mathbb{C})$ mit $A\varphi = -\varphi''$.

a.) A ist symmetrisch. Spezialisierung von Beispiel 8.4.

b.) $D(A^*) = W^{2,2}((-1,1))$ und $A^*u = \mathrm{D}^2u$.

"$\supset$": Seien $u \in W^{2,2}((-1,1))$ und $\varphi \in D(A)$ so gilt

$$\langle A\varphi, u\rangle = -\left\langle \varphi, \mathrm{D}^2 u\right\rangle .$$

Da $u \in W^{2,2}$, ist $\mathrm{D}^2u \in L^2$ also $u^* = -\mathrm{D}^2u$. Somit ist $u \in D(A^*)$ und $A^*u = -\mathrm{D}^2u$.

"$\subset$": Sei $u \in D(A^*)$, so gilt für $\varphi \in D(A)$

$$\langle \varphi, A^*u\rangle = \langle A\varphi, u\rangle = -\langle \varphi'', u\rangle = -\langle \varphi, \mathrm{D}^u\rangle .$$

Da φ beliebig gilt $\mathrm{D}^2u = -A^*u \in L^2(\Omega)$. Setzen wir

$$v(x) = \int_{-1}^x \mathrm{D}^2u \,\mathrm{d}\mu,$$

so ist $v \in L^2((-1,1))$ und $\mathrm{D}^1v = \mathrm{D}^2u$. (Übungsaufgabe 13.1)

Da $\mathrm{D}^1(v - \mathrm{D}^1u) = 0$ folgt $v - \mathrm{D}^1u = \mathrm{const}$ und somit ist $\mathrm{D}^1u = v - \mathrm{const} \in L^2((-1,1))$ und somit $u \in W^{2,2}((-1,1))$ und $A^*u = -\mathrm{D}^2u$.

c.) A^* ist nicht symmetrisch.

Seien $u \equiv 1$ und $v(x) = x^2$, so sind $u, v \in W^{2,2}((-1,1))$ aber

$$\langle Au, v\rangle = 0, \qquad \langle Av, u\rangle = -\langle v'', u\rangle = -\langle 2, 1\rangle = -4 \neq 0.$$

A ist also insbesondere *nicht* selbstadjungiert.

d.) Wir vergrößern nun $D(A)$ in der Hoffnung, dass A dadurch selbstadjungiert wird.

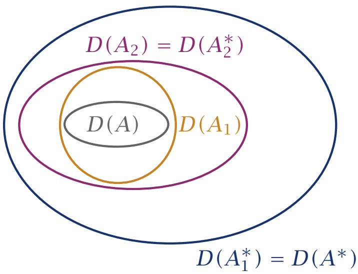
$$D(A_1) := \overline{D(A)}^{W^{2,2}} = W_0^{2,2}((-1,1)),$$
$$A_1 u = \mathrm{D}^2 u.$$

A_1 ist symmetrisch aber $A_1^* = A^*$. Somit ist der Versuch fehlgeschlagen.

e.) Wir vergrößern $D(A)$ noch weiter.

$$D(A_2) := W^{2,2}((-1,1)) \cap W_0^{1,2}((-1,1)),$$
$$A_2 u = -\mathrm{D}^2 u.$$

Dieser Operator ist selbstadjungiert (später).



8.1 **Zur Wahl von A, A_1 und A_2.**

Man sagt A_2 ist eine selbstadjungierte Erweiterung von A. Selbstadjungierte Erweiterungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Operatoren bei denen das der Fall ist heißen wesentlich selbstadjungiert. ■

8.11 **Definition** *A heißt abgeschlossen, falls der Graph $G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ in $H \times H$ abgeschlossen ist.* ⋊

8.12 **Satz** *Jeder selbstadjungierte Operator ist abgeschlossen.* ⋊

» Sei (x_n) Folge in $D(A)$ mit $(x_n, Ax_n) \to (x, y) \in H \times H$.
Für $z \in D(A)$ gilt nun

$$\langle Az, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Az, x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, Ax_n \rangle = \langle z, y \rangle .$$

Somit ist $x \in D(A*)$ und $A^* x = y$. Insbesondere ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$ also $(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$. «

8.13 **Definition** (a) *Die Resolventenmenge von A ist gegeben durch*

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{array}{c} A - \lambda\mathbf{I} \text{ ist injektiv, } \overline{\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})} = H \\ \text{und } (A - \lambda\mathbf{I})^{-1} \in \mathcal{L}(H) \end{array} \right\}$$

(b) *$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt Spektrum von A.*

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &:= \{\lambda \in \sigma(A) : A - \lambda\mathbf{I} \text{ ist nicht injektiv}\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \end{aligned}$$

heißt Punktspektrum.

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \begin{array}{c} A - \lambda\mathbf{I} \text{ ist injektiv, } \overline{\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})} = H \\ \text{aber } (A - \lambda\mathbf{I})^{-1} \notin \mathcal{L}(H) \end{array} \right\}$$

heißt stetiges (kontinuierliches) Spektrum von A.

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) : A - \lambda\mathbf{I} \text{ ist injektiv aber } \overline{\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})} \subsetneq H \right\}$$

heißt residuales Spektrum von A. ⋊

8.14 **Satz** *Falls A abgeschlossen, ist*

$$\begin{aligned} \rho(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbf{I} \text{ ist injektiv und } \operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I}) = H\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbf{I} \text{ bijektiv}\} . \end{aligned}$$ ⋊

» "⊂": Sei nun $\lambda \in \rho(A)$. Zeige $\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I}) = H$. Zu $y \in H$ sei (x_n) in $D(A)$ mit $(A - \lambda\mathbf{I})x_n \to y$. Insbesondere ist dann $((A - \lambda\mathbf{I})x_n)$ Cauchyfolge und da $(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ beschränkt auch (x_n), d.h. $x_n \to x$ in H.

$$Ax_n = \underbrace{(A - \lambda\mathbf{I})x_n}_{\to y} + \underbrace{\lambda x_n}_{\to \lambda x} \to y + \lambda x.$$

Somit $(x_n, Ax_n) \to (x, y + \lambda) \in G(A)$ und insbesondere $x \in D(A)$ und $Ax = y + \lambda x$ also $y = Ax - \lambda x \in \operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})$. D.h. $\operatorname{im}(A + \lambda\mathbf{I}) = H$.

"⊃": Sei $A - \lambda\mathbf{I} : D(A) \to H$ bijektiv. Zeige $(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ beschränkt. Ist A abgeschlossen, so ist auch $A - \lambda\mathbf{I}$ abgeschlossen und daher $(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ abgeschlossen, da $G(A - \lambda\mathbf{I}) = G((A - \lambda\mathbf{I})^{-1})$.

Aus dem closed Graph theorem folgt, dass $(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ beschränkt ist. «

8.15 **Lemma** *1) Ist A selbstadjungiert, so ist $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.*

2) Ist $D(A)$ dicht, so gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$: $\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})^{\perp} = \ker(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{I})$. ⋊

» Der Beweis ist eine leichte Übung. «

8.16 **Satz** *Sei A selbstadjungiert. Dann gilt*

1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

2) $\sigma_r(A) = \emptyset$. ⋊

» 1) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Zeige $\lambda \in \rho(A)$. Für $x \in D(A)$ rechnet man ohne Umwege nach,

$$\|(A - \lambda\mathbf{I})x\|^2 = \|(A - (2\operatorname{Re}\lambda)\mathbf{I})x\|^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2 \|x\|^2 \geq (\operatorname{Im}\lambda)^2 \|x\|^2 .$$

Da $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ist $\ker(A - \lambda\mathbf{I}) = (0)$ und daher λ kein Eigenwert. Weiterhin ist für $y = (A - \lambda\mathbf{I})x$,

$$\left\|(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \|y\|,$$

also ist $(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ beschränkt. Nach Lemma 8.16 ist

$$\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})^{\perp} = \ker(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{I}) = \ker(A - \overline{\lambda}\mathbf{I}) = (0)$$

und daher $\overline{\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})} = H$.

2) Sei $\lambda \in \sigma(A)$, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $A - \lambda\mathbf{I}$ injektiv, so gilt

$$\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})^{\perp} = \ker(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{I}) \overset{\substack{A^*=A \\ \lambda=\overline{\lambda}}}{=} \ker(A - \lambda\mathbf{I}) = (0)$$

und daher $\overline{\operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I})} = H$, d.h. $\lambda \notin \sigma_r(A)$. «

8.17 **Satz** *Sei $D(A)$ dicht und A symmetrisch. Dann sind äquivalent*

(i) A ist selbstadjungiert.

(ii) $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(A - \lambda\mathbf{I}) = H = \operatorname{im}(A - \overline{\lambda}\mathbf{I})$. ⋊

» "(i)⇒(ii)": Klar, denn ist A selbstadjungiert, so gilt $(A - \lambda\mathbf{I}) = H$ für jedes $\lambda \in \rho(A)$.

"(ii)⇒(i)": Sei $y \in D(A^*)$. Zeige $y \in D(A)$. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in D(A)$, so dass

$$(A - \lambda\mathbf{I})x = (A^* - \lambda\mathbf{I})y.$$

Da $A \subset A^*$ ist

$$(A^* - \lambda\mathbf{I})(x - y) = 0$$

und daher gilt für alle $z \in D(A)$,

$$\left\langle (A - \overline{\lambda}\mathbf{I})z, x - y \right\rangle = \langle z, (A^* - \lambda\mathbf{I})(x - y) \rangle = 0$$

und da $\operatorname{im}(A - \overline{\lambda}\mathbf{I}) = H$ ist $x - y = 0$, d.h. $y = x \in \mathrm{D}(A)$. «

8.18 **Bsp** Wir setzen hier Beispiel 8.10 fort. A_2 ist symmetrisch und $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ dicht in $H = L^2$. Wir zeigen nun für $\lambda = -1$, dass

$$\operatorname{im}(A_2 - \lambda\mathbf{I}) = \operatorname{im}(A_2 + \mathbf{I}) = H.$$

Sei also $f \in L^2$ und $\phi : W_0^{1,2} \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \langle u, f \rangle_2$, so ist $\phi \in W_0^{1,2\,\prime}$ und daher existiert nach dem Lemma von Riesz ein $v \in W_0^{1,2}$ mit

$$\phi = \langle \cdot, v \rangle_{1,2} = \langle \cdot, f \rangle_2 .$$

Für $u \in W_0^{1,2}$ gilt somit

$$\langle u, f\rangle_2 = \langle u, v\rangle_2 + \left\langle D^1 u, D^1 v\right\rangle_2 = \langle u, v\rangle_2 - \left\langle u, D^2 v\right\rangle_2 = \left\langle u, v - D^2 v\right\rangle.$$

Also ist $v - D^2 v = f$ und $D^2 v = v - f \in L^2$. Somit ist $v \in W_0^{1,2} \cap W^{2,2}$ und $(A_2 + \mathbf{I})v = f$.

A_2 ist daher nach Satz 8.17 selbstadjungiert. ■

Index

Literaturverzeichnis

[Adams, R.A] Adams, R.A.: Sobolev-spaces. Academic Press 1975

[Alt] Alt, Hans Wilhelm: Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung. Springer 1999

[Heuser] Heuser, Harro: Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung. Teubner 1992

[Hirzebruch] Hirzebruch, F. und Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. BI-Wiss.-Verl. 1985

[Reed, Simon] Michael Reed and Barry Simon: Methods of modern mathematical physics, Band 1. Academic Press 1995

[Werner] Werner, Dirk: Funktionalanalysis. 6. Auflage, Springer 2007

[Kosaku Yosida] Kosaku Yosida: Functional analysis. Springer 1980