PD Dr. Jürgen Dippon, Universität Stuttgart

Stochastische Analysis

Stuttgart, Wintersemester 2011/2012

Version: 15. Februar 2012

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.[1] Viel Spaß!

[1]PD Dr. Jürgen Dippon, Universität Stuttgart, juergen.dippon@mathematik.uni-stuttgart.de;
Jan-Cornelius Molnar, jan.molnar@studentpartners.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Die Stochastische Analysis verbindet Konzepte der Analysis mit denen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine zentrale Frage ist, wie sich die wohlbekannten Kalküle wie Differentiation und Integration übertragen, wenn die zugrundeliegenden Objekte auch vom Zufall abhängen.

Sie spielt in vielen Anwendungen eine fundamentale Rolle, z.B. in der Finanzmathematik, der stochastischen Physik und bei der Modellierung von biologischen Prozessen.

0-A Eine informelle Einführung

Einen stochastischen Prozess kann man als eine Familie von Zufallsvariablen auffassen. Im diskreten Fall ist diese Familie über eine endliche bzw. abzählbare Indexmenge parametrisiert und man erhält Folgen von Zufallsvariablen. Im kontinuierlichen Fall dagegen ist die Indexmenge überabzählbar, z.B. ein Intervall, eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ oder eine Teilmenge eines Hilbertraums.

Als zentrales Beispiel betrachten wir im Folgenden einen Aktienkurs

$$S = (S_t)_{t\in[0,T]},$$

dabei ist S_t für jedes $t \in [0,T]$ eine log-normalverteilte Zufallsvariable. Sind die Pfade $t \mapsto S_t(\omega)$ stetig, kann man S auch als Abbildung vom Ereignisraum in die stetigen Abbildungen auffassen

$$S : \Omega \to C^0([0,T]),$$

oder als reellwertige Abbildung, die stetig von einem Parameter abhängt,

$$S : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}.$$

Die einfachste Interpretation ist jedoch die, dass S jedem Zeitpunkt t eine Zufallsvariable S_t zuordnet.

Wie entwickelt sich der Aktienkurs? Ein erstes Modell stellte 1900 Louis Bachelier [1] vor. Er vermutete, dass die Zuwächse ΔS_t einem deterministischen Trend folgen, welcher durch eine zufällige Komponente gestört wird,

$$\Delta S_t = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t.$$

Für kleine Zeiträume von etwa einem Tag oder einem Monat ist dieses Modell durchaus annehmbar. Die zufällige Komponente ΔW_t ist hier eine $N(0, \Delta t)$-verteilte Zufallsvariable und W_t eine Brownsche Bewegung.

0.1 **Definition** *Eine Standard-Brownsche Bewegung (auch Wiener-Prozess) ist ein stochastischer Prozess mit unabhängigen, stationären und normalverteilten Zuwächsen. Es gilt also* $W_0 = 0$ *und für*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

sind die

$$\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$$

unabhängige und $N(0, t_{k+1} - t_k)$*-verteilte Zufallsvariablen.* ⋊

Meist nehmen wir noch zusätzlich an, dass die Pfade stetig sind, d.h. $W_t(\omega)$ ist stetig in t für jedes $\omega \in \Omega$.

Formal erhält man beim Übergang $\Delta t \to 0$ ein infinitesimales Modell für den Aktienkurs

$$\mathrm{d}S_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{$\star$}$$

Hierbei ist jedoch zunächst nicht klar, wie die Differentiale zu interpretieren sind. In der Tat ist eine Brownsche Bewegung W_t bis auf eine Nullmenge nirgends differenzierbar, denn ihre Totalvariation ist unbeschränkt,

$$\mathbf{Var}\left(\frac{\Delta W_t}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{Var}(\Delta W_t) = \frac{1}{\Delta t} \to \infty, \qquad \Delta t \to 0.$$

Eine Berechtigung für die Schreibweise ($\star$) liefert die Integration der Gleichung,

$$S_t = S_0 + \mu t + W_t.$$

[1] Louis Bachelier (* 11. März 1870 in Le Havre; † 26. April 1946 in St-Servan-sur-Mer) war ein französischer Mathematiker.

Es ist ein fundamentales Prinzip, dass stochastische Differentialgleichungen stets durch die zugehörigen stochastischen Integralgleichungen interpretiert werden.

Ein Problem des Modells von Bachelier ist jedoch, dass die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Aktienkurs strikt positiv ist

$$P(S_t < 0) > 0,$$

und dies wiederspricht der Realtiät. Dieser Misstand wurde erst 1965 durch ein alternatives Modell von Paul Samuelson[2] behoben. Er leitete aus der Beobachtung, dass hohe Kurse auch große Änderungsraten mit sich führen, folgende Beschreibung der Zuwächse ab

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t.$$

In diesem Modell werden also nicht die Zuwächse sondern die Renditen nach Bachelier modelliert

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t.$$

Statistische Beobachtungen belegen, dass Samuelsons Modell die Wirklichkeit wesentlich besser beschreibt als das von Bachelier.

Auch hier erhält man durch den Übergang $\Delta t \to 0$ eine infinitesimale Version

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

wobei bei Betrachtung der Differentiale ähnliche Probleme wie vorhin auftreten. Nach Integration erhält man die stochastische Integralgleichung

$$S_t - S_0 = \int_0^t \mu \, S_\tau \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \sigma \, S_\tau \, \mathrm{d}W_\tau.$$

Hier stellt sich nun die Frage wie der Integrand $S_\tau \, \mathrm{d}W_\tau$ zu interpretieren ist, denn aufgrund der Irregularität von W_t ist eine Auffassung als Riemann-Stieltjes-Integral nicht möglich. Im Laufe dieser Vorlesung widmen wir uns zunächst Fragen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen solcher Integralgleichungen. Weiterhin suchen wir nach Wegen, diese Lösungen zu beschaffen. Wie im klassischen Fall werden wir

[2]Paul Anthony Samuelson (* 15. Mai 1915 in Gary, Indiana; † 13. Dezember 2009 in Belmont, Massachusetts[1]) war ein US-amerikanischer Wirtschaftswissenschaftler und Träger des Wirtschaftsnobelpreises von 1970.

feststellen, dass für die Mehrzahl dieser Probleme keine geschlossenen Ausdrücke existieren, daher beschäftigen wir uns auch mit numerischer Approximation.

Als Motivation betrachten wir nun ein elementares Integral

$$\int_0^t W_\tau \, \mathrm{d}W_\tau.$$

Rechnen wir strikt formal nach dem aus der Analysis bekannten Kalkül, erhalten wir

$$\int_0^t W_\tau \, \mathrm{d}W_\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}(W_\tau^2) = \frac{1}{2} W_\tau^2 \Big|_0^t.$$

Es stellt sich nun heraus, dass diese Rechnung nicht korrekt ist, denn es gilt

$$\int_0^t W_\tau \, \mathrm{d}W_\tau = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t^2,$$

zumindest im L^2-Sinn. Wir wollen dies nun herleiten. Unter der Voraussetzung, dass die Pfade stetig sind, können wir das Integral auch als Limes von Riemmann-Summen betrachten

$$\int_0^t W_\tau \, \mathrm{d}W_\tau = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

wobei wir W_τ am linken Randpunkt t_i auswerten. Diese Wahl erleichtert nicht nur die Rechnung, sondern bewirkt auch, dass die entstehenden Objekte Martingale und folglich sehr angenehm zu handhaben sind. Um den Grenzwert zu berechnen, betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \\
&= \frac{1}{2}(W_t^2 - W_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert des letzten Terms ist

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t,$$

denn die Zuwächse $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ sind $N(0, t_{i+1} - t_i)$ verteilt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - t\right)^2 &= \mathbf{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2,
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Bienaymé. Nach Voraussetzung ist die Varianz der Zuwächse Δt, also $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \sqrt{\Delta t} \cdot Z$ mit einer standard normalverteilten Zufallsvariablen Z. Somit gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t^2 \mathbf{Var}(Z^2) = 3t \cdot \Delta t,$$

d.h. es liegt Konvergenz im L^2-Sinn vor

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad \xrightarrow{L^2} \quad \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_0^2 - \frac{1}{2}t$$

und folgende Definition ist sinnvoll

$$\int_0^t W_\tau \, \mathrm{d}W_\tau = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Wir benötigen also einen neuen Kalkül, um Integrale dieser Art zu berechnen. Die aus der Analysis bekannten Methoden wie der Hauptsatz, partielle Integration oder Substitution sind so nicht anwendbar, und der Weg über Riemmann-Summen ist aufwändig und lästig.

Die von Itô[3] entwickelte Theorie verallgemeinert die oben genannten Konzepte der Analysis auf Brownsche Bewegungen. Ist f eine differenzierbare Funktion und g von beschränkter Variation, so gilt

$$f(g(t)) = f(g(0)) + \int_0^t f'(g(\tau))\mathrm{d}g(\tau).$$

Wählen wir $g(\tau) = W_\tau$, so ist nach obiger Rechnung eine Korrektur dieses Terms notwendig. Genauer gilt die sogenannte Itô-Formel

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_\tau)\,\mathrm{d}W_\tau + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Grob gesprochen bezahlt man durch den letzten Term eine Strafe für die Irregularität der Pfade von W_t. Zur Motivation der Itô-Formel betrachten wir eine C^3-Funktion f und zerlegen $[0, t]$ in äquidistante Teilintervalle. Mit der Taylorformel erhalten

[3] Itô Kiyoshi (* 7. September 1915 in Hokusei-chō (heute Inabe), Präfektur Mie; † 10. November 2008 in Kyōto) war ein japanischer Mathematiker.

wir dann

$$
\begin{aligned}
f(W_t) = f(W_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{2} f''(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + \ldots \right).
\end{aligned}
$$

Wäre W von beschränkter Totalvariation, so würden für $\Delta t \to 0$ alle Terme von 2. Ordnung und höher verschwinden. Dies ist aber nicht der Fall, denn es gilt lediglich $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = O(\Delta t)$. Somit verschwinden nur die Terme der Ordnung 3 und höher, und die Itô-Formel folgt.

In der etwas allgemeineren Situation von $f \in C^{1,2}$, d.h. $f(t,x)$ ist C^1 in t und C^2 in x, existiert ebenfalls eine Itô-Formel, nämlich

$$
f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t \dot{f}(\tau, W_\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t f'(\tau, W_\tau)\mathrm{d}W_\tau + \int_0^t f''(\tau, W_\tau)\mathrm{d}\tau,
$$

oder kurz

$$
\mathrm{d}f = \dot{f}\mathrm{d}t + f'\mathrm{d}W + \frac{1}{2} f''\mathrm{d}t.
$$

Mit dieser Formel können wir zeigen, dass der Prozess

$$
S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t) \tag{$\star\star$}
$$

die stochastische Differentialgleichung

$$
\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t
$$

des Samuelson Modells für Aktienkurse löst. Setzen wir nämlich $f(t, W_t) \coloneqq S_t$, dann gilt nach obiger Itô-Formel

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f = \mathrm{d}S_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \mathrm{d}W_t \\
&= \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.
\end{aligned}
$$

Wir werden die Itô-Formel für Semimartingale beweisen. Diese bilden eine große Klasse von stochastischen Prozessen und schließen auch die Brownsche Bewegung mit ein. Anschließend werden wir eine Substitutionsformel sowie eine partielle Integration herleiten. Damit erhalten wir einen Kalkül zur eleganten Analyse von stochastischen Differential- und Integralgleichungen, mit dessen Hilfe wir die berühmte Black & Scholes Formel erarbeiten können.

1 Stochastische Prozesse

Wir wollen unseren stochastischen Integrationskalkül für Semimartingale als Integratoren entwickeln. Diese umfassen sowohl Wiener- und Poisson-Prozesse als auch die allgemeineren Lévy-Prozesse, welche spezielle Semimartingale sind. Ursprünglich wurde die Theorie für Wiener-Prozesse entwickelt. Diese eigenen sich z.B. zur Modellierung von Messgrößen, die sich als Summe von vielen kleinen Einflüssen denken lassen, z.B. dem Ort oder Impuls eines Teilchens oder der Rendite eines Aktienkurses. Poisson-Prozesse ermöglichen es, diskrete Ereignisse wie den radioaktiven Zerfall, Tod oder Geburt zu beschreiben. Sowohl Wiener- als auch Poisson-Prozesse sind spezielle Lévy-Prozesse, für die unsere Theorie anwendbar ist. Im Folgenden sammeln wir einige wesentliche Eigenschaften von allgemeinen Martingalen und gehen kurz auf die genannten Prozesse ein.

In letzter Zeit wurden auch fraktale Brownsche Bewegungen und andere spezielle Gauß-Prozesse betrachtet, die keine Semimartingale sind. Für diese ist unsere Theorie leider nicht anwendbar, und ein anderer Kalkül notwendig.

1-A Grundlegende Begriffe

Für alles Weitere sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ stets ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

An die Menge Ω stellen wir dabei keine Voraussetzungen, diese kann diskret sein, aber beispielsweise auch eine Teilmenge eines topologischen Vektorraums oder einer Banach-Algebra.

Hingegen setzen wir $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ als σ-Algebra voraus, d.h. $\mathcal{F}$ enthält sowohl Komplemente als auch abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte. Dies ist besonders relevant, wenn wir Grenzwertprozesse betrachten - wie es in der Analysis üblich ist. Bei der Betrachtung von zeitstetigen Prozessen wäre es auch hilfreich, wenn $\mathcal{F}$ überabzählbare Vereinigungen enthielte; dies ist jedoch im Allgemeinen eine zu starke Voraussetzung, die durch zusätzliche Voraussetzungen an den Prozess und/oder Ω umgangen werden muss. Eine Teilmenge $A \in \mathcal{F}$ von Ω nennen wir Ereignis, und sagen A tritt ein, wenn ein Element aus A beobachtet wird.

Schließlich ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. $P(\Omega) = 1$, und die Vollständigkeit von Ω besagt, dass jede Teilmenge einer P-Nullmenge ebenfalls eine P-Nullmenge ist.

1.1 **Definition** *Eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Familie von σ-Algebren, die monoton wächst, d.h.*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $\mathbb{F}$ heißt gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum; in Zeichen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. ⋊

Eine Filtration modelliert den Zuwachs von Informationen mit fortschreitender Zeit. Welche Fragen zum Zeitpunkt t beantwortbar sind, regelt dabei die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$. Grob gesprochen besagt die Monotonie, dass man hinterher immer schlauer ist als vorher.

Ein gefilterter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, P)$ erfüllt die sog. üblichen Bedingungen, falls

(a) $\mathcal{F}_0$ alle Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält, und

(b) $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig ist, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u, \qquad t \geqslant 0.$$

Die Rechtsstetigkeit besagt dabei, dass auf die Menge der zum gegenwärtigen Zeitpunkt t möglichen Ereignisse von der Menge zu zukünftigen Zeitpunkten $u > t$ möglichen Ereignissen zurückgeschlossen werden kann. Ein ähnlicher Schluss von in der Vergangenheit beobachteten Ereignissen auf die Gegenwart wird jedoch im Allgemeinen nicht gefordert.

1.2 **Definition** *Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to [0, \infty]$ heißt Stoppzeit (bzgl. $\mathbb{F}$), falls*

$$[T \leqslant t] \in \mathcal{F}_t, \qquad t \geqslant 0. \quad ⋊$$

Es kann also mit der bis zum Zeitpunkt t (einschließlich t) theoretisch verfügbaren Information entschieden werden, ob $T \leqslant t$. Dies ist eine echte Bedingung, d.h. nicht alle zufälligen Zeiten sind Stoppzeiten. Ein Beispiel für eine Stoppzeit ist der Zeitpunkt, an dem der Dax die 4.000 Punktegrenze überschreitet.

Aufgrund der Rechtsstetigkeit der Filtration erhalten wir die folgende Charakterisierung von Stoppzeiten.

1.1 **Satz** *Unter den oben genannten üblichen Bedingungen ist T genau dann eine Stoppzeit, wenn für alle $t \geqslant 0$*

$$[T < t] \in \mathcal{F}_t. \quad \rtimes$$

Beweis. $\Leftarrow$: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$[T \leqslant t] = \bigcap_{\substack{0<u<t+\varepsilon \\ u \in \mathbb{R}}} [T < u] \in \bigcap_{\substack{u>t \\ u \in \mathbb{R}}} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t,$$

aufgrund der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$, also ist T eine Stoppzeit.

$\Rightarrow$: Sei T eine Stoppzeit, dann ist

$$[T < t] = \bigcup_{\substack{0<\varepsilon<t \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} [T \leqslant t - \varepsilon],$$

wobei $[T \leqslant t - \varepsilon] \in \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$ für $\varepsilon > 0$. ∎

1.3 **Definition** *Sei I eine Indexmenge. Ein stochastischer Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Zufallsvariablen mit Werten in einem Messraum $(\Omega', \mathcal{F}')$.* $\rtimes$

Hierbei ist jede Zufallsvariable X_t zunächst nur als $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ messbar vorausgesetzt und verfügt daher im Allgemeinen über alle Informationen in der σ-Algebra $\mathcal{F}$ und nicht nur über die bis zum Zeitpunkt t verfügbaren Informationen aus $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

1.4 **Definition** *Ein stochastischer Prozess X heißt adaptiert (zu $\mathbb{F}$), falls X_t für jedes $t \in I$ auch $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}'$ messbar ist.* $\rtimes$

Es handelt sich hierbei um eine echte Einschränkung, denn $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, d.h. das Urbild der σ-Algebra $\mathcal{F}'$ muss in der kleinen σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ liegen.

1.5 **Definition** *Zwei stochastische Prozesse X und Y heißen Modifikationen von einander, falls*

$$X_t = Y_t \quad \text{f.s.}, \qquad t \in I.$$

Zwei stochastische Prozesse X und Y heißen ununterscheidbar, falls

$$P[X_t = Y_t,\, t \geqslant 0] = 1. \quad \rtimes$$

Zwei ununterscheidbare Prozesse sind auch immer Modifikationen voneinander, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Hält man ein $\omega \in \Omega$ fest, erhält man einen möglichen Pfad des stochastischen Prozesses

$$X(\omega) : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto X_t(\omega).$$

Früher hat man stochastische Prozesse über die Verteilung interpretiert, heute betrachtet man zunehmend die Pfade. Letzteres ist jedoch weitaus schwieriger, denn z.B. im Fall einer Brownschen Bewegung sind diese hochgradig irregulär, nirgends differenzierbar und nicht rektifizierbar.

1.6 **Definition** *Ein stochastischer Prozess, dessen Pfade f.s. rechtsstetig sind und linksseitige Grenzwerte besitzen, heißt càdlàg. Ein stochastischer Prozess, dessen Pfade f.s. linksstetig sind und rechtseitige Grenzwerte besitzen, heißt càglàd.* ⋊

1.2 **Satz** *Der stochastische Prozess X sei eine Modifikation des stochastischen Prozesses Y. Besitzen X und Y f.s. rechtsstetige Pfade, so sind X und Y ununterscheidbar.* ⋊

Beweis. Setze $A \coloneqq [X \text{ ist nicht rechtsstetig}]$ und $B \coloneqq [Y \text{ ist nicht rechtsstetig}]$, dann sind beide Mengen nach Voraussetzung P-Nullmengen. Sei weiterhin

$$N_t \coloneqq [X_t \neq Y_t], \qquad t \geqslant 0,$$

dann ist $N_t \in \mathcal{F}$, P-Nullmenge und

$$N \coloneqq \bigcup_{t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}} N_t$$

ist als abzählbare Vereinigung ebenfalls in $\mathcal{F}$ und eine P-Nullmenge. Also gilt

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}, \quad \omega \notin M \coloneqq A \cup B \cup N,$$

wobei $P(M) = 0$. Für irrationales $t \in [0,\infty)$ betrachten wir nun eine Folge rationaler Zahlen $t_n \downarrow t$, dann gilt

$$X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega), \qquad n \geqslant 1, \quad \omega \in M^c,$$

und somit ist aufgrund der Rechtsstetigkeit

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad t \geqslant 0, \quad \omega \in M^c. \quad \blacksquare$$

1.1 **Korollar** *Die beiden stochastische Prozesse X und Y seien càdlàg. Ist X eine Modifikation von Y, so sind X und Y ununterscheidbar.* $\rtimes$

1.7 **Definition** *Seien X ein stochastischer Prozess und Λ eine Borel-Menge. Die durch*

$$T(\omega) \coloneqq \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in \Lambda\}, \qquad \omega \in \Omega$$

definierte Zufallsvariable T heißt Eintrittszeit (hitting time) von X mit Λ. $\rtimes$

Genau genommen muss noch gezeigt werden, dass T messbar ist.

1.3 **Début-Theorem** *Ist X ein adaptierter càdlàg Prozess und $\Lambda \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, dann ist die Eintrittszeit von X mit Λ eine Stoppzeit.* $\rtimes$

Das Début-Theorem verallgemeinert die Aussage des Satzes für lediglich Borel-messbares Λ und eine schwächere Bedingung an X. Der Beweis ist allerdings ziemlich kompliziert, daher beschränken wir uns auf obigen Spezialfall.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung aus Satz 1.1, d.h. es genügt zu zeigen

$$[T < t] \in \mathcal{F}_t, \qquad t \geqslant 0.$$

Dazu zeigen wir die Darstellung

$$[T < t] = \bigcup_{q \in [0,t) \cap \mathbb{Q}} [X_q \in \Lambda].$$

Die Inklusion $\supset$ ist klar. Für die Umkehrung nehmen wir ohne Einschränkung an, dass alle Pfade rechtsstetig sind. Sei $\omega \in [T < t]$, dann ist

$$r \coloneqq T(\omega) < t,$$

und folglich existiert ein rationales q mit $r \leqslant q < t$ und $X_q \in \Lambda$, denn Λ ist offen und X rechtsstetig. ∎

1.4 **Satz** *Ist X ein adaptierter càdlàg Prozess und $\Lambda \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge, dann definiert*

$$T(\omega) \coloneqq \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in \Lambda \text{ oder } X_{t-}(\omega) \in \Lambda\}$$

eine Stoppzeit T. $\rtimes$

1.5 **Satz** *Sind S und T Stoppzeiten, so auch*

a) $S \wedge T$,

b) $S \vee T$,

c) $S + T$, *und*

d) αS *für jedes* $\alpha \geqslant 1$. $\rtimes$

Beweis. Siehe Aufgabe 1.2. ∎

Man macht sich klar, dass im Allgemeinen $S - T$ oder αS für $\alpha < 1$ keine Stoppzeiten sind. Insbesondere ist die Menge der Stoppzeiten kein Vektorraum.

1-B Martingale

In der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie haben wir uns bereits mit zeitdiskreten Martingalen beschäftigt. Diese wollen wir nun in natürlicher Weise auf den zeitstetigen Fall verallgemeinern.

1.8 **Definition** *Ein reellwertiger adaptierter Prozess* $X = (X_t)_{t \in [0,\infty)}$ *mit*

(i) $\mathbf{E}|X_t| < \infty, \qquad t \geqslant 0,$

heißt Martingal, falls

(ii) $\mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t,$

Supermartingal, falls

(ii) $\mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant X_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t,$

und Submartingal, falls

(ii) $\mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geqslant X_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t.$ $\rtimes$

Die Integrierbarkeitsbedingung (i) garantiert hierbei, dass die bedingten Erwartungen (ii) definiert sind. Im Folgenden wollen wir bei der Verwendung von bedingten Erwartungen auch immer davon ausgehen, dass die betrachteten Zufallsvariablen integrierbar sind.

Während im zeitdiskreten Fall die üblicherweise auftretenden Mengenopertionen abzählbar sind, ist dies für zeitkontinuierlichen Martingale in der Regel nicht mehr so. Um sich dennoch auf abzählbare Opertionen zurückziehen zu können, benötigen wir zusätzliche Regularitätseigenschaften - wie etwa Stetigkeit. Die obige Definition lässt allerdings auch Martingale mit stark irregulären Pfaden zu. Um mehr Regularität zu erhalten, müssen wir daher zusätzliche Annahmen treffen.

1.6 **Satz** *Sei X ein Submartingal. Die Abbildung $t \mapsto \mathbf{E}X_t$ ist genau dann rechtsstetig, wenn es eine càdlàg Modifikation Y von X gibt. Eine solche Modifikation ist eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit) und wieder ein Submartingal.* ⋊

Sofern die relativ schwache Stetigkeitsvoraussetzung an die Kurve des Erwartungswertes von X_t erfüllt ist, können wir davon ausgehen, dass X càdlàg ist. Dies erlaubt es uns in vielen Situation uns von überabzählbaren Mengenoperationen auf abzählbar viele zurückzuziehen.

Um Satz 1.6 zu beweisen, benötigen wir noch etwas Vorbereitung. Sei $F \subset \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge der reellen Zahlen und bezeichne

$$U(X(\omega), F, [a,b]), \qquad \omega \in \Omega,$$

die Anzahl der positiven Überschreitungen des Intervalls $[a,b]$ durch den Pfad $X(\omega)$ an den Stellen $t_i \in F$.

Upcrossing Inequality (Doob) *Sei X ein Submartingal und F endlich mit maximalem Element $t^\star$, so gilt*

$$(b-a)\,\mathbf{E}\,U(X, F, [a,b]) \leqslant \mathbf{E}(X_{t^\star} - a)^+ - \mathbf{E}(X_{t^\star} - b)^+. \quad ⋊$$

Beweis. Siehe [2, Satz 11.5]. ∎

Die Anzahl der möglichen positiven Überschreitungen des Intervalls $[a,b]$ sind also durch den Erwartungswert des Positivteils von $X_{t^\star}$ beschränkt. Im nächsten Schritt wollen wir auch abzählbar viele Zeitpunkte zulassen. Dazu setzen wir für eine abzählbare Menge $T \subset \mathbb{R}$

$$U(X(\omega), T, [a,b]) \coloneqq \sup_{\substack{F \subset T \\ |F| < \infty}} U(X(\omega), F, [a,b]).$$

Zusatz zu Upcrossing Inequality *Sei X ein Submartingal und T abzählbar, so gilt*

$$(b-a)\,\mathbf{E}\,U(X, T, [a,b]) \leqslant \sup_{t \in T} \mathbf{E}X_t^+ + a^-. \quad ⋊$$

Beweis. Schöpfen wir T mit endlichen Mengen aus, d.h. mit einer Folge $T_n \uparrow T$ von endlichen Mengen $|T_n| < \infty$, so gilt

$$U(X(\omega), T, [a,b]) = \lim_{n\to\infty} U(X(\omega), T_n, [a,b]),$$

aufgrund der Monotonie von U. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz können wir Erwartungswert und Grenzwertbildung vertauschen, so dass

$$\begin{aligned}(b-a)\,\mathbf{E}\,U(X(\omega), T, [a,b]) &= \lim_{n\to\infty} (b-a)\,\mathbf{E}\,U(X(\omega), T_n, [a,b]) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{t_n} - a)^+ - \mathbf{E}(X_{t_n} - b)^+ \\ &\leqslant \sup_{t\in T} \mathbf{E} X_t^+ + a^-. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Als direkte Konsequenz erhalten wir den folgenden Martingalkonvergenzsatz.

1.7 **Submartingalkonvergenzsatz in diskreter Zeit** *Sei X ein Submartingal mit gleichmäßig L^1-beschränktem Positivteil, d.h. $\sup_{n\geqslant 0} \mathbf{E}X_n^+ < \infty$, so gilt*

$$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \quad \textit{existiert f.s.,}.$$

Gilt außerdem $\sup_{n\geqslant 0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, so ist $X_\infty \in L^1$. $\rtimes$

Beweis. Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\mathbf{E} \liminf_{n\to\infty} X_n \leqslant \mathbf{E} \limsup_{n\to\infty} X_n \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \mathbf{E}\, X_n^+ < \infty.$$

Die Existenz vorausgesetzt, folgt so sofort die Quasi-Integrierbarkeit von X_∞ und, unter der Zusatzvoraussetzung $\sup_{n\geqslant 0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, auch die Integrierbarkeit. Nehmen wir nun an, der Limes existiere nicht f.s., dann gibt es reelle Zahlen a, b so, dass

$$\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n$$

auf einer Nichtnullmenge A. Auf dieser Menge müssen die Pfade jedoch das Intervall $[a,b]$ unendlich oft in positiver Richtung überschreiten, also

$$P(U(X, \mathbb{N}, [a,b]) = \infty) \geqslant P(A) > 0.$$

Dann wäre aber auch $\mathbf{E}\,U(X, \mathbb{N}, [a,b]) = \infty$ im Widerspruch zur Upcrossing Inequality. $\blacksquare$

Zunächst ist nur die fast sichere Konvergenz gesichert. Selbst wenn wir voraussetzen, dass die X_n gleichmäßig L^1-beschränktem sind, erhalten im Allgemeinen keine L^1-Konvergenz. Eine hinreichende Bedingung ist die gleichmäßige $L^{1+\delta}$-Beschränktheit für ein $\delta > 0$ oder schwächer, die *gleichgradige Integrierbarkeit* - siehe Aufgabe 1.6 und [6, Kapitel 11].

Definition/Satz *Sei $(X_t)_{t\in I}$ eine Familie von integrierbaren Zufallsvariablen, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) (X_t) *ist gleichgradig integrierbar,*

(ii) $\sup_{t\in I} \int_{[|X_t|>c]} |X_t| \mathrm{d}P \to 0, \qquad c \to \infty,$

(iii) $\sup_{t\in I} |X_t| \leqslant M < \infty$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, so dass*

$$P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{t\in I} \int_A |X_t| < \varepsilon. \quad \rtimes$$

Mit gleichgradiger Integrierbarkeit lässt sich von fast sicherer bzw. stochastischer Konvergenz auf L^1-Konvergenz schließen.

1.1 **Lemma** *Sei (X_n) eine Folge von gleichgradig integrierbaren Zufallsvariablen, so gilt*

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X_\infty \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty. \quad \rtimes$$

Die bisher definierten (Sub-/Super-)Martingale beschreiben die Abhängigkeit zukünftiger Beobachtungen von den bisherigen. Wir benötigen allerdings auch die andere Richtung.

1.9 **Definition** *Sei $(\mathcal{F}_n)$ eine monoton fallende Folge von Sub-σ-Algebren, d.h.*

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m, \qquad n \leqslant m \leqslant 0.$$

Eine Folge $X = (X_0, X_{-1}, X_{-2}, \ldots)$ mit $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ für $n \leqslant 0$ heißt reverses Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, falls

$$\mathbf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n, \qquad n \leqslant m \leqslant 0. \quad \rtimes$$

Auch für reverse Submartingale existiert ein Konvergenzsatz, dieser ist allerdings um einiges schärfer.

1.8 **Konvergenzsatz für reverse Submartingale** *Sei* $(X_n)_{n \leqslant 0}$ *ein reverses Submartingal, so gilt*

$$X_{-\infty} \coloneqq \lim_{n \to -\infty} X_n \quad \text{existiert f.s..}$$

Gilt zusätzlich $\sup_{n \leqslant 0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, *so ist* $(X_n)_{n \leqslant 0}$ *auch gleichgradig integrierbar,* $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$ *und*

$$\mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}) \geqslant X_{-\infty}, \qquad n \leqslant 0,$$

wobei $\mathcal{F}_{-\infty} \coloneqq \bigcap_{n \leqslant 0} \mathcal{F}_n$. ⋊

Beweis. Aus der Monotonie der bedingten Erwartung und der Submartingaleigenschaft folgt

$$\mathbf{E}(X_m^+ \mid \mathcal{F}_n) \geqslant \mathbf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n)^+ \geqslant X_n^+, \qquad n \leqslant m \leqslant 0.$$

Integration ergibt für die Erwartungswerte

$$\sup_{n \leqslant 0} \mathbf{E} X_n^+ \leqslant \mathbf{E} X_0^+$$

und letzterer ist endlich aufgrund der Submartingaleigenschaft. Damit zeigt man analog zum Beweis von Satz 1.7 die fast sichere Existenz von $X_{-\infty}$ und die Existenz in L^1 unter der Zusatzvoraussetzung.

Weiterhin ist für jedes $n \leqslant 0$

$$\int_{[|X_n|>c]} |X_n| \,\mathrm{d}P = \int_{[X_n>c]} X_n \,\mathrm{d}P - \mathbf{E}X_n + \int_{[X_n \geqslant -c]} X_n \,\mathrm{d}P,$$

und aufgrund der Submartingaleigenschaft $\mathbf{E}X_n \leqslant \mathbf{E}X_m$ falls $n \leqslant m$. Setzen wir nun $\sup_{n \leqslant 0} \mathbf{E}|X_n| \leqslant M < \infty$ voraus, so ist $\mathbf{E}X_n$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \leqslant 0$, so dass

$$\mathbf{E}X_n > \mathbf{E}X_{m_0} - \varepsilon, \qquad n \leqslant m_0.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\int_{[|X_n|>c]} |X_n| \,\mathrm{d}P &\leqslant \int_{[X_n>c]} X_{m_0} \,\mathrm{d}P - \mathbf{E}X_{m_0} + \int_{[X_n \geqslant -c]} X_{m_0} \,\mathrm{d}P + \varepsilon \\ &= \int_{[|X_n|>c]} |X_{m_0}| \,\mathrm{d}P + \varepsilon.\end{aligned}$$

Nach der Markov-Ungleichung ist

$$P[|X_n| > c] \leqslant \frac{1}{c} \sup_{n\leqslant 0} \mathbf{E}|X_n| \leqslant \frac{M}{c} \to 0, \qquad c \to \infty,$$

also ist X_n gleichgradig integrierbar. Gleichgradige Integrierbarkeit ergibt schließlich $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$.

Sei $n \leqslant m \leqslant 0$, dann gilt für $\Gamma \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$,

$$\int_\Gamma X_n \mathrm{d}P \leqslant \int_\Gamma X_m \mathrm{d}P, \qquad \int_\Gamma X_{-\infty} \mathrm{d}P = \lim_{n\to-\infty} \int_\Gamma X_n \mathrm{d}P,$$

aufgrund der L^1-Konvergenz. ∎

Wir können nun die fast sichere Existenz von rechts und linksseitigen Limiten zeigen.

1.9 **Satz** *Sei X ein Submartingal, so existiert eine Menge Ω_0 mit $P(\Omega_0) = 1$, so dass die Limites*

$$X_{t^-}(\omega) \coloneqq \lim_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega), \qquad t > 0,$$

und

$$X_{t^+}(\omega) \coloneqq \lim_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega), \qquad t \geqslant 0,$$

für alle $\omega \in \Omega_0$ existieren. ⋊

Man beachte, dass die Limites nicht nur für einen festen Zeitpunkt t fast sicher existieren, sondern gleichzeitig für alle Zeitpunkte fast sicher.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem der Konvergenzsätze, wir müssen lediglich argumentieren, wieso bis auf eine Nullmenge die Limites gleichzeitig für alle t existieren.

a): Sei $I = [t_0, t_1] \subset (0, \infty)$ ein kompaktes Zeitintervall. Wir betrachten für rationale Zahlen a, b die Menge

$$M_{ab} \coloneqq \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) < a < b < \limsup_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) \text{ für ein } t \in I \right\}.$$

Da X ein Submartingal ist auch $(X-a)^+$ ein Submartingal und folglich

$$\mathbf{E}(X_s - a)^+ \leqslant \mathbf{E}(X_t - a)^+, \quad s \leqslant t.$$

Somit gilt nach der Upcrossing Inequality

$$(b-a)\mathbf{E}U(X, I\cap\mathbb{Q}, [a,b]) \leqslant \mathbf{E}(X_{t_1}-a)^+ < \infty,$$

und es ist $P[U(X, I\cap\mathbb{Q}, [a,b]) = \infty] = 0$, so dass $P(M_{ab}) = 0$. Somit ist ebenfalls $M = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} M_{ab}$ eine Nullmenge und auf $\Omega_0 = \Omega - M$ gilt

$$\lim_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) \text{ existiert für alle } t\in I,\ \omega\in\Omega_0,$$

wobei $P(\Omega_0) = 1$. Ausschöpfung von $(0,\infty)$ durch abzählbar viele kompakte Intervalle ergibt die allgemeine Behauptung.

b): Man verfährt analog zu a) und dem Beweis von Satz 1.8. ∎

Wir sind nun in de Lage zu beweisen, dass jedes Submartingal mit stetiger Erwartungswertfunktion $t\mapsto \mathbf{E}X_t$ eine càdlàg Modifikation besitzt, die eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit ist.

Beweis von Satz 1.6. $\Rightarrow$: Die Idee des Beweises liegt darin, X_t durch den rechtsseitigen Limes X_{t^+} aus Satz 1.9 zu ersetzen und alle Eigenschaften zu verifizieren.

Sei also Ω_0 wie vorhin, und

$$Y_t(\omega) \coloneqq X_{t^+}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega), & \omega\in\Omega_0,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

so ist Y_t rechsstetig.

Aufgrund der üblichen Bedingungen ist $\mathbb{F}$ rechtsstetig und $\mathcal{F}_t$ enthält alle Nullmengen von $\mathcal{F}$. So folgt die $\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}$-Messbarkeit d.h. Y ist ein adaptierter càdlàg Prozess.

Fixiere ein $t\geqslant 0$ und eine rationale Folge $q_n\downarrow t$. Dann ist (X_{q_n}) ein reverses Submartingal mit $\mathbf{E}X_{q_n}\geqslant \mathbf{E}X_t$, denn

$$\mathbf{E}(X_{q_n}\mid\mathcal{F}_t)\geqslant X_t.$$

Wie in Satz 1.8 folgt, dass X_{q_n} gleichgradig integrierbar ist und $X_{q_n}\xrightarrow{L^1} X_t$. Es gilt also einerseits aufgrund der Stetigkeit von $t\mapsto\mathbf{E}X_t$

$$\mathbf{E}Y_t = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}X_{q_n} = \mathbf{E}X_t,$$

sowie andererseits aufgrund der gleichgradigen Integrierbarkeit

$$X_t \leqslant \mathbf{E}(X_{q_n} \mid \mathcal{F}_t) \to \mathbf{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) = Y_t.$$

Somit ist $X_t = Y_t$ f.s. und Y ist eine Modifikation von X.

Insbesondere gilt für jedes $s \leqslant t$

$$\mathbf{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_{q_n} \mid \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{q_n} \mid \mathcal{F}_s) \geqslant X_s \overset{\text{f.s.}}{=} Y_s,$$

womit die Submartingaleigenschaft folgt. Satz 1.9 liefert nun auch die Existenz linksseitiger Grenzwerte, also ist Y eine càdlàg Modifikation von X.

Jede andere càdlàg Modifikation stimmt aufgrund von Satz 1.9 für alle $t \geqslant 0$ gleichzeitig mit Y f.s. überein, also ist Y eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit.

$\Leftarrow$: Sei Y eine càdlàg Modifikation von X. Wir fixieren erneut ein $t \geqslant 0$ und eine Folge $t_n \downarrow t$, so ist (X_{t_n}) ein reverses Submartingal und gleichgradig integrierbar. Insbesondere gilt

$$P([X_{t_n} = Y_{t_n},\ Y_t = X_t]) = 1,$$

so dass $X_{t_n} = Y_{t_n} \to Y_t = X_t$ f.s. und aufgrund der gleichgradigen Integrierbarkeit auch $\mathbf{E}X_{t_n} \to \mathbf{E}X_t$. Somit folgt die Rechtsstetigkeit von $t \mapsto \mathbf{E}X_t$. ∎

Nach diesen etwas technischen Vorbereitungen können wir uns nun stets auf Martingale mit càdlàg Pfaden zurückziehen, sofern zumindest die Erwartungswertkurve $t \mapsto \mathbf{E}X_t$ stetig ist. Davon wollen wir im Folgenden aber immer ausgehen.

1.10 **Submartingalkonvergenzsatz in kontinuierlicher Zeit** *Sei (X_t) ein Submartingal mit $\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}X_t^+ < \infty$, so gilt*

$$X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t \quad \textit{existiert f.s.}.$$

Gilt außerdem $\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}|X_t| < \infty$, so ist $X_\infty \in L^1$. ⋊

Beweis. Der Beweis ist analog zu Satz 1.9. ∎

1.2 **Korollar** *Ist X ein nichtnegatives Supermartingal, so gilt*

$$X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t \quad \textit{existiert f.s.}. \quad ⋊$$

Beweis. Aufgrund der Supermartingaleigenschaft ist $\mathbf{E}X_t \leqslant \mathbf{E}X_0$ für alle $t \geqslant 0$ und damit

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}|X_t| = \sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}X_t \leqslant \mathbf{E}X_0 < \infty,$$

also können wir Satz 1.10 auf $-X_t$ anwenden. ∎

Um neben fast sicherer Konvergenz auch L^1-Konvergenz zu erhalten, müssen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Integrierbarkeit des Prozesses stellen. Der folgende Satz liefert nun eine sehr befriedigende Charakterisierung der L^1-Konvergenz.

1.11 **Satz** *Für ein (rechtsstetiges) Martingal $X = (X_t)$ sind äquivalent:*

(i) $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty \coloneqq \lim_{t\to\infty} X_t$,

(ii) Es gibt ein $X_\infty \in L^1$ mit $X_t = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)$ (X_∞ heißt Abschluss des Martingals X),

(iii) X ist gleichgradig integrierbar. ⋊

Ist X abschließbar, also Bedingung (ii) erfüllt, so kann man den gesamten Prozess X aus einer einzigen integrierbaren Zufallsvariable X_∞ wiedergewinnen.

Beweis. (ii)⇒(iii): Sei $\alpha > 0$, dann gilt einerseits

$$\begin{aligned}\int_{[|X_t|>\alpha]} |X_t| \,\mathrm{d}P &= \int_{[|X_t|>\alpha]} |\mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)| \,\mathrm{d}P \\ &\leqslant \int_{[|X_t|>\alpha]} \mathbf{E}(|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t) \,\mathrm{d}P \\ &= \int_{[|X_t|>\alpha]} |X_\infty| \,\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

und andererseits nach Markov

$$P([|X_t| > \alpha]) \leqslant \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}|\mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)| \leqslant \frac{\mathbf{E}|X_\infty|}{\alpha} \to 0, \qquad \alpha \to \infty.$$

Also ist X gleichgradig integrierbar.

(iii)⇒(i): Sei X gleichgradig integrierbar, dann gilt insbesondere $\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}|X_t| < \infty$. Mit Satz 1.10 folgt somit die fast sichere Existenz von $X_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} X_t$ und gleichgradige Integrierbarkeit ergibt dann L^1-Konvergenz.

(i)⇒(ii): Nach Voraussetzung ist $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s. und in L^1. Wähle $h \geqslant 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_t - \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)| &\leqslant \mathbf{E}|X_t - \mathbf{E}(X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)| + \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) - \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)| \\
&= \mathbf{E}|X_t - X_t| + \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_{t+h} - X_\infty \mid \mathcal{F}_t)| \\
&\leqslant \mathbf{E}\mathbf{E}(|X_{t+h} - X_\infty| \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbf{E}|X_{t+h} - X_\infty| \to 0, \qquad h \to \infty.
\end{aligned}$$

Da der linke Ausdruck unabhängig von h ist, gilt $X_t = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_t)$ f.s.. ∎

1-C Optional Sampling und Optional Stopping

Die bisher betrachteten Prozesse $X = (X_t)$ hingen deterministisch von der Zeit t ab. Wir wollen nun untersuchen, welche Eigenschaften des Prozesses X erhalten bleiben, wenn man die Zeit ebenfalls als zufällige Größe modelliert. Es sinnvoll zu verlangen, dass die zufällige Zeit selbst nicht von Informationen aus der Zukunft abhängt, daher sind Stoppzeiten kanonische Kandidaten.

1.10 **Definition** *der T Vergangenheit* *Die zur Stoppzeit T gehörige σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ der T-Vergangenheit ist definiert durch*

$$\mathcal{F}_T \coloneqq \{A \in \mathcal{F} : A \cap [T \leqslant t] \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geqslant 0\}. \quad \rtimes$$

Im Gegensatz zu X_T hängt $\mathcal{F}_T$ nicht vom Zufall ab, sondern bezeichnet eine feste σ-Algebra. Diese enthält alle Ereignisse A, für die mit der zum Zeitpunkt t verfügbaren Information entschieden werden kann, ob A und $[T \leqslant t]$ gemeinsam eingetreten sind. Eine Menge A ist dann nicht in $\mathcal{F}_T$, wenn A zu „detailliert" ist, um mit den zum zufälligen Zeitpunkt T verfügbaren Informationen eine Aussage über das gemeinsame Eintreten von A und $[T \leqslant t]$ zu treffen.

Der folgende Satz charakterisiert die σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ mittels adaptierter càdlàg Prozesse.

1.12 **Satz** *Ist T eine Stoppzeit, so ist $\mathcal{F}_T$ die kleinste σ-Algebra, die von allen zum Zeitpunkt T beobachteten adaptierten Prozessen mit càdlàg Pfaden erzeugt wird.* $\rtimes$

Beweis. Sei $\mathcal{G} \coloneqq \sigma(\{X_T : X \text{ adaptierter càdlàg Prozess}\})$, und der Einfachheit halber $T < \infty$ vorausgesetzt.

$\mathcal{F}_T \subset \mathcal{G}$: Wähle $A \in \mathcal{F}_T$, dann ist $A \cap [T \leqslant t] \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geqslant 0$. Folglich definiert

$$X_t(\omega) := \mathbf{1}_{A\cap[T\leqslant t]} = \mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_{[T(\omega)\leqslant t]}$$

einen zur Filtration $\mathbb{F}$ adaptierten stochastischen Prozess mit càdlàg Pfaden. Weiterhin ist $X_T = \mathbf{1}_A$ und somit $A \in \mathcal{G}$.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_T$: Sei X ein adaptierter càdlàg Prozess, so ist zu zeigen, dass X_T $\mathcal{F}_T$-messbar ist, was nach der Definition von $\mathcal{F}_T$ äquivalent ist zu

$$[X_T \in B] \cap [T \leqslant t] \in \mathcal{F}_t, \qquad t \geqslant 0,$$

für jede Borel-Menge B. Wir interpretieren dazu X als

$$X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad (s,\omega) \mapsto X(s,\omega) := X_s(\omega).$$

Da X rechtsstetig ist, ist $X : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $t \geqslant 0$ auch $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}$-messbar und adaptiert (ohne Beweis). Weiterhin sei für beliebiges $t > 0$,

$$\varphi_t : [T \leqslant t] \to [0,\infty) \times \Omega, \qquad \omega \mapsto \varphi(\omega) := (T(\omega),\omega),$$

so ist φ_t $\mathcal{F}_t \cap [T \leqslant t] - \mathcal{B} \otimes (\mathcal{F}_t \cap [T \leqslant t])$-messbar. Die Hintereinanderausführung $X \circ \varphi$ ist daher $\mathcal{F}_t \cap [0,t) - \mathcal{B}$-messbar und folglich

$$[X_T \in B] \cap [T \leqslant t] = [X \circ \varphi \in B] \in \mathcal{F}_t$$

für jedes $B \in \mathcal{B}$. Da t beliebig war folgt die $\mathcal{F}_T - \mathcal{B}$-Messbarkeit von X_T. ∎

1.13 **Optional Sampling Theorem von Doob** *Sind X ein Martingal mit Abschluss X_∞ und S, T Stoppzeiten mit $S \leqslant T$ f.s., dann sind X_S und X_T integrierbar und es gilt*

$$X_S = \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S). \qquad \rtimes$$

Ersetzen wir die deterministische Zeit t durch die zufällige Stoppzeit T, so wird die Martingaleigenschaft nicht zerstört. Die Stoppzeiteigenschaft ist dabei essentiell und stellt sicher, dass S und T keine Informationen aus der Zukunft verwenden.

Bemerkung. Das Optional Sampling Theorem bleibt richtig, wenn man die Existenz des Abschlusses X_∞ durch gleichgradige Integrierbarkeit oder $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$ ersetzt - siehe Satz 1.11. ⊸

Man mache sich klar, dass X_T eine einzige Zufallsvariable bezeichnet, während X einen Prozess und damit eine Familie solcher darstellt. Unser erster Schritt zum Beweis des Optional Sampling Theorems besteht darin sicherzustellen, dass für einen Prozess X und eine Stoppzeit T überhaupt $\mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_T) = X_T$ f.s. gilt.

1.14 **Satz** *Seien X ein adaptierter càdlàg Prozess und T eine Stoppzeit. Dann ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.* ⋊

Beweis. Dies haben wir bereits im Beweis von Satz 1.12 gezeigt. ∎

Im nächsten Schritt betrachten wir den Spezialfall, dass die Stoppzeiten lediglich endlich viele verschiedene Werte annehmen.

1.15 **Satz** *Seien $S \leqslant T$ zwei Stoppzeiten mit endlich vielen Werten (eventuell einschließlich ∞). Ist X ein gleichgradig integrierbares Martingal, so gilt*

$$X_S = \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S) \quad \textit{f.s.}. \quad ⋊$$

Beweis. Wir zeigen, dass $\int_F (X_T - X_S)\mathrm{d}P = 0$ für alle Mengen $F \in \mathcal{F}_S$ gilt. Somit stimmen dann $\mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S)$ und $\mathbf{E}(X_S \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ fast sicher überein.

Seien $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ die möglichen Werte von S und T, und $F \in \mathcal{F}_S$, so gilt

$$(X_T - X_S)\mathbf{1}_F = \sum_{j=0}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\mathbf{1}_{[S<t_j\leqslant T]} \cdot \mathbf{1}_F.$$

Schreiben wir $[S < t_j \leqslant T] = [S \leqslant t_{j-1}] \cap [T > t_{j-1}]$, so ist $\mathbf{1}_{[S<t_j\leqslant T]} \cdot \mathbf{1}_F$ offenbar $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-messbar und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left((X_T - X_S)\mathbf{1}_F\right) &= \mathbf{E}\,\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\mathbf{1}_{[S<t_j\leqslant T]} \cdot \mathbf{1}_F \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) \cdot \mathbf{1}_{[S<t_j\leqslant T]} \cdot \mathbf{1}_F\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

denn $\mathbf{E}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}})$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ aufgrund der Martingaleigenschaft. Somit gilt fast sicher $\mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(X_S \mid \mathcal{F}_S) = X_S$.

Aus der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt, dass X abschließbar ist. Betrachten wir nun $T \equiv \infty$, so nimmt T nur endlich viele Werte an und es gilt $S \leqslant T$ für alle Stoppzeiten S. Somit folgt die 2. Behauptung. ∎

Im letzten Schritt gehen wir von Stoppzeiten mit endlich vielen Werten über zu Stoppzeiten, die überabzählbar viele verschiedene Werte annehmen können. Essentiell für diesen Übergang ist hier die Rechtsstetigkeit des Martingals.

Beweis des Optional Sampling Theorems 1.13. Wir zeigen zunächst, dass für eine beliebige Stoppzeit S gilt

$$X_S = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S). \tag{$\star$}$$

Die allgemeine Aussage folgt daraus, denn für jede Stoppzeit $T \geqslant S$ gilt $\mathcal{F}_T \supset \mathcal{F}_S$ und somit

$$\mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S) = X_S.$$

Wir betrachten wieder beide Seiten von ($\star$) unter Integration über $F \in \mathcal{F}_S$. Definiere dazu für jedes $k \geqslant 1$

$$S_k := \begin{cases} \infty, & S \geqslant k, \\ \frac{q}{2^k}, & \frac{q-1}{2^k} \leqslant S < \frac{q}{2^k}, \end{cases}$$

so nimmt $S_k \geqslant S$ nur endlich viele Werte an, es gilt $S_k \downarrow S$, und

$$[S_k \leqslant t] = \left[S < \frac{p}{2^k}\right], \qquad p = \max\left\{q : \frac{q}{2^k} \leqslant t\right\}.$$

Aufgrund der üblichen Bedingungen ist S_k eine Stoppzeit und es gilt nach Satz 1.15

$$X_{S_k} = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_{S_k}). \tag{$\star\star$}$$

Da $S_k \geqslant S$ ist, gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_k}$ und somit

$$\mathbf{E}(X_{S_k} \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_{S_k}) \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S).$$

Mit Satz 1.11 folgt aus ($\star\star$), dass $(X_{S_k})_{k \geqslant 0}$ gleichgradig integrierbar ist. Ferner gilt $X_{S_k} \to X_S$ f.s. und damit auch $X_{S_k} \xrightarrow{L^1} X_S$. Insbesondere gilt auch

$$\int_F X_{S_k} \mathrm{d}P \to \int_F X_S \mathrm{d}P$$

für jedes $F \in \mathcal{F}_S$ und somit ist $\mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S) = \mathbf{E}(X_S \mid \mathcal{F}_S) = X_S$, was zu zeigen war. ∎

Für Submartingale existiert ein zum Optional Sampling Theorem analoges Resultat. Auch hier zerstört das Ersetzen der deterministischen Zeit durch eine Stoppzeit die Submartingaleigenschaft nicht.

1.16 **Satz** *Sind X ein rechtsstetiges Submartingal und S, T Stoppzeiten mit $S \leqslant T$ f.s., dann sind X_S und X_T integrierbar und es gilt*

$$X_S \leqslant \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S). \quad \rtimes$$

Der Beweis verläuft ähnlich zu dem von Satz 1.13. Allerdings können wir uns nicht auf den Spezialfall ($\star$) zurückziehen, da es im Allgemeinen nicht sinnvoll ist die Existenz eines Abschlusses für ein Submartingal zu fordern.

In den Anwendungen ist es oftmals schwierig nachzuweisen, dass ein gegebener Prozess ein Martingal ist. Im Folgenden wollen wir daher eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Martingaleigenschaft angeben, die ganz ohne bedingte Erwartungswerte auskommt.

1.17 **Satz** *Ein adaptierter càdlàg Prozess X ist genau dann ein Martingal, falls für jede beschränkte Stoppzeit T gilt*

(i) $X_T \in L^1$, *und*

(ii) $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$. $\rtimes$

Beweis. $\Rightarrow$: Aus Satz 1.13 folgt für jede beliebige Stoppzeit T und $0 \equiv S \leqslant T$, dass X_T integrierbar ist und $\mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}\mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}X_T$.

$\Leftarrow$: Seien $s \leqslant t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Wir setzen $T = t \cdot \mathbf{1}_{A^c} + s \cdot \mathbf{1}_A$, dann ist T eine Stoppzeit und nach Voraussetzung

$$\mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}X_T = \mathbf{E}(X_t \mathbf{1}_{A^c}) + \mathbf{E}(X_s \cdot \mathbf{1}_A).$$

Andererseits ist auch $T \equiv t$ eine Stoppzeit und daher

$$\mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}X_T = \mathbf{E}(X_t \mathbf{1}_{A^c}) + \mathbf{E}(X_t \cdot \mathbf{1}_A).$$

Subtrahieren der beiden Gleichungen ergibt

$$\mathbf{E}(X_s \cdot \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(X_t \cdot \mathbf{1}_A).$$

Da $s \leqslant t$ und $A \in \mathcal{F}_s$ beliebig waren, folgt die Martingaleigenschaft. ∎

Neben der Auswertung eines stochastischen Prozesses zu einem zufälligen Zeitpunkt T, spielt das Stoppen eines Prozesses zu einem zufälligen Zeitpunkt in den Anwendungen eine bedeutende Rolle.

1.11 **Definition** *Für einen stochastischen Prozess X und eine zufällige Zeit T heißt der durch*

$$X_t^T \coloneqq X_{t \wedge T}, \quad t \geqslant 0,$$

definierte stochastische Prozess X^T der bei T gestoppte Prozess.

Der bei T gestoppte Prozess X^T ist nicht zu verwechseln mit der Zufallsvariable X_T, denn X^T beschreibt eine ganze Familie von Zufallsvariablen, die sich ab einem zufälligen Zeitpunkt nicht mehr ändert.

1.18 **Optional Stopping Theorem von Doob** *Sei X ein rechtsstetiges Martingal oder Submartingal, und T eine Stoppzeit. Dann ist auch X^T ein Martingal respektive Submartingal bzgl. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$. Ist X zusätzlich gleichgradig integrierbar, so auch X^T.* ⋊

Zufälliges Stoppen zerstört also die (Sub-)Martingaleigenschaft nicht.

Bemerkung. Man kann direkt aus dem Optional Sampling Theorem die Behauptung ableiten, dass X^T ein (Sub-)Martingal bzgl. der Filtration $\mathbb{F}^\star = (\mathcal{F}_{t \wedge T})_{t \geqslant 0}$ ist. Allerdings ist dies eine schwächere Behauptung als das hier formulierte Optional Stopping Theorem, denn $\mathcal{F}_{T \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$, weshalb die Filtration $\mathbb{F}^\star$ gröber ist als $\mathbb{F}$. ⊸

Beweis des Optional Stopping Theorems 1.18. Wir verwenden Satz 1.17 und zeigen, dass für jede beschränkte Stoppzeit S gilt $X_S^T \in L^1$ und $\mathbf{E}X_S^T = \mathbf{E}X_0^T$.

Sei X zunächst als gleichgradig integrierbar vorausgesetzt und S eine beschränkte Stoppzeit. So ist auch $S \wedge T$ eine Stoppzeit und daher das Optional Sampling Theorem 1.13 anwendbar. Insbesondere ist $X_S^T = X_{S \wedge T}$ integrierbar und es gilt

$$\mathbf{E}X_S^T = \mathbf{E}X_{S \wedge T} = \mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}X_0^T.$$

Somit ist X^T ein Martingal bezüglich $\mathbb{F} = \mathcal{F}_t$. ∎

Die folgenden Ungleichungen spielen eine fundamentale Rolle in der stochastischen Analysis.

1.19 **Ungleichungen von Doob** *Für ein positives Submartingal X gelten die Maximalungleichung*

$$P\left[\sup_{t\leqslant T} X_t \geqslant \lambda\right] \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\mathbf{E}X_T^p, \qquad p \geqslant 1, \quad T \in [0,\infty)$$

und die die sogenannte L^p-Ungleichung

$$\left\|\sup_{t\geqslant 0}|X_t|\right\|_{L^p} \leqslant q \sup_t \|X_t\|_{L^p}, \qquad p > 1,$$

wobei q die zu p konjugierte Zahl ist, d.h. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. ⋊

Man kann die Maximalungleichung als Verallgemeinerung und Verschärfung der Markov-Ungleichung

$$P[|X| \geqslant \lambda] \leqslant \frac{\mathbf{E}|X|^p}{\lambda^p}, \qquad p \geqslant 1,$$

betrachten, wenn man X durch eine Familie von Zufallsvariablen ersetzt. Wiederum ermöglicht es uns die Rechtsstetigkeit der Pfade, die Ungleichung auch für überabzählbare Familien zu beweisen.

Bevor wir den Beweis dieser beiden Ungleichungen angehen, wollen wir ein Beispiel zur Motivation betrachten.

Beispiel 1 Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktienkurs mit Startwert A_0 zum Zeitpunkt n einen gewissen Wert γ überschreitet. Dazu modellieren wir die zeitliche Entwicklung als Binomialmodel, d.h.

$$A_n = A_0 \cdot Y_1 \cdots Y_n,$$

wobei wir die (Y_i) als unabhängig und identisch verteilt annehmen mit

$$Y_i = \begin{cases} u, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p > 0, \\ d, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q = 1-p, \end{cases}$$

sowie $\mathbf{E}Y_i = \mu > 1$, $u,d > 0$ und $A_0 > 0$ fest. So ist $A = (A_0, A_1, \dots)$ ein Submartingal und mit der Ungleichung von Doob folgt

$$P\left(\max_{i\in\{0,1,\dots,n\}} A_i > \gamma\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}A_n}{\gamma} = \frac{A_0\mu^n}{\gamma}.$$ ■

Beweis der Ungleichungen von Doob. Wir betrachten zunächst den Fall einer abzählbaren Indexmenge $I \subset \mathbb{N}_0$. So ist für jedes λ und n durch $\tau \coloneqq \inf\{k \in I : X_k \geqslant \lambda\} \wedge n$ eine Stoppzeit gegeben. Für $p \geqslant 1$ ist $x \mapsto x^p$ konvex und daher X_n^p nach Jensens Ungleichung ein nichtnegatives Submartingal. Schreiben wir $X_n^* \coloneqq \sup_{k \leqslant n} X_k$, so folgt mit Satz 1.16, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X_n^p \geqslant \mathbf{E}X_\tau^p &= \mathbf{E}(X_\tau^p \cdot \mathbf{1}_{[X_n^* \geqslant \lambda]}) + \mathbf{E}(X_\tau^p \cdot \mathbf{1}_{[X_n^* < \lambda]}) \\ &\geqslant \lambda^p P(X_n^* \geqslant \lambda) + \mathbf{E}(X_n^p \cdot \mathbf{1}_{[X_n^* < \lambda]}),\end{aligned}$$

denn $\tau = n$ falls $X_n^* < \lambda$. Subtrahieren ergibt nun

$$P(X_n^* \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \mathbf{E}(X_n^p \mathbf{1}_{[X_n^* \geqslant \lambda]}), \qquad p \geqslant 1.$$

Sei nun $D \subset [0, \infty)$ abzählbar und dicht sowie $D_n \uparrow D$ eine Ausschöpfung von endlichen Mengen. Dann gilt aufgrund der Rechtsstetigkeit

$$\sup_{t \geqslant 0} X_t = \sup_{t \in D} X_t = \sup_{n \geqslant 1} \sup_{t \in D_n} X_t.$$

Schreiben wir $A_n = [\sup_{t \in D_n} X_t \geqslant \lambda]$, so wächst A_n monoton. Bezeichnen wir das maximale Element von D_n mit $t_n = \max(D_n)$, so gilt

$$\begin{aligned}P[\sup_{t \geqslant 0} X_t \geqslant \lambda] = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\sup_{t \in D_n} X_t \geqslant \lambda]\right) &= \lim_{n \to \infty} P(A_n) \\ &\leqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda^p} \mathbf{E}(X_{t_n}^p \mathbf{1}_{[X_{t_n}^* \geqslant \lambda]}) \\ &\leqslant \sup_{t \geqslant 0} \frac{1}{\lambda^p} \mathbf{E}(X_t^p \, \mathbf{1}_{[\sup_{t' \geqslant 0} X_{t'} \geqslant \lambda]}).\end{aligned}$$

Um die zweite Ungleichung zu beweisen, wählen wir ein $k \geqslant 1$ und betrachten für $p > 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}((X_n^* \wedge k)^p) &= \mathbf{E}\left(\int_0^k p\lambda^{p-1} \mathbf{1}_{X_n^* \geqslant \lambda} \mathrm{d}\lambda\right) \\ &= p \int_0^k \lambda^{p-1} \, P[X_n^* \geqslant \lambda] \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant p \int_0^k \lambda^{p-2} \, \mathbf{E}(X_n \mathbf{1}_{[X_n^* \geqslant \lambda]}) \mathrm{d}\lambda \\ &= p\mathbf{E}\left(X_n \int_0^{k \wedge X_n^*} \lambda^{p-2} \mathrm{d}\lambda\right) \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbf{E}\left(X_n \cdot (X_n^* \wedge k)^{p-1}\right),\end{aligned}$$

wobei wir die oben bewiesene Abschätzung für $P[X_n^* \geqslant \lambda]$ sowie zweimal den Satz von Fubini verwendet haben. Um das Produkt abzuschätzen, verwenden wir die Hölderungleichung und bemerken, dass $q = \frac{p}{p-1}$ zu p konjugiert ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((X_n^* \wedge k)^p) &\leqslant q\,\mathbf{E}\left(X_n \cdot (X_n^* \wedge k)^{p-1}\right) \\ &\leqslant q\,\mathbf{E}(X_n^p)^{\frac{1}{p}}\,\mathbf{E}((X_n^* \wedge k)^p)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Division durch $\mathbf{E}((X_n^* \wedge k)^p)^{\frac{p-1}{p}}$ ergibt

$$\mathbf{E}((X_n^* \wedge k)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant q\,\mathbf{E}(X_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Die rechte Seite hängt nicht von k ab, so dass wir mit dem Satz von der monotonen Konvergenz links zum Limes für $k \to \infty$ übergehen können. Schließlich erhalten wir

$$\|X_n^*\|_{L^p} \leqslant q\,\|X_n\|_{L^p}. \tag{$\star$}$$

Die Rechtsstetigkeit erlaubt es uns wieder, eine dichte Menge $D \subset [0,\infty)$ zu betrachten, die wir mit endlichen Mengen $D_n \uparrow D$ ausschöpfen. Auf jeder dieser endlichen Mengen gilt die Ungleichung ($\star$). Gehen wir nun rechts zum Supremum über und verwenden $\sup_{t\geqslant 0} X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}^*$, so erhalten wir die Behauptung. ∎

Mit Hilfe der Maximalungleichung und der L^p-Ungleichung können wir Martingale auf L^p-Konvergenz untersuchen. Der Fall $p = 2$ ist besonders interessant, da L^2 ein Hilbertraum ist und so einen geometrischen Zugang zu vielen Fragestellungen liefert. Beispielsweise kann man bedingte Erwartungen als ein gewisses Optimierungsproblem in L^2 auffassen.

1.12 **Definition** *Ein Martingal X mit $\mathbf{E}X_t^2 < \infty$ für alle $t \geqslant 0$ heißt quadratintegrierbares Martingal. Gilt sogar $\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}X_t^2 < \infty$, so heißt X L^2-beschränktes oder kurz L^2-Martingal.* ⋊

Ein Martingal ist nach Satz 1.11 genau dann ein L^1-Martingal, wenn es einen Abschluss in L^1 besitzt. Ein analoges Resultat existiert für den L^2-Fall.

Lemma *X ist genau dann ein L^2 Martingal, wenn ein Abschluss X_∞ mit $\mathbf{E}X_\infty^2 < \infty$ existiert.* ⋊

Beweis. Übungsaufgaben 1.6 und 1.7. ∎

1-D Beispiele wichtiger stochastischer Prozesse

Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Eigenschaften von Poisson- und Wiener-Prozessen sammeln. Diese stochastischen Prozesse spielen eine fundamentale Rolle in der stochastischen Analysis und liefern eine wichtige Beispielklasse. Für eine ausführliche Darstellung sei auf die Vorlesung „Stochastische Prozesse“ verwiesen.

Poisson-Prozesse eigenen sich zur Modellierung von „Zähldaten“. Mit ihnen lässt sich beispielsweise die Fragestellung untersuchen, wie oft ein Ereignis A bis zum Zeitpunkt T eintritt. Wiener-Prozesse eigenen sich dagegen zur Modellierung von „Messdaten“, wie den Impuls oder den Ort eines Teilchens, welche sich aus dem unabhängigen Zusammenwirken vieler kleiner Einflüsse ergeben. Viele Vorgänge in der Natur und der Ökonomie lassen sich auf Poisson-Prozesse, Wiener-Prozesse oder eine Kombination beider zurückführen.

■ Poisson-Prozess

Poisson-Prozesse lassen sich als gewisse Zählprozesse auffassen.

1.13 **Definition** *Ist $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ eine strikt wachsende Folge positiver Zufallsvariablen, dann heißt der durch*

$$N_t := \sum_{n\geqslant 1} 1_{[T_n\leqslant t]}$$

definierte Prozess $N = (N_t)_{t\in[0,\infty]}$ mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der zur Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Zählprozess. ⋊

Wir stellen in dieser Definition keine weiteren Anforderungen an die zufälligen Zeiten T_i. Fordern wir allerdings die Adaptiertheit von N, so erzwingen wir, dass die T_i Stoppzeiten sind.

1.20 **Satz** *Ein Zählprozess N ist genau dann zur Filtration $\mathbb{F}$ adaptiert, falls $T_1, T_2, \dots$ Stoppzeiten sind.* ⋊

Beweis. $\Leftarrow$: Seien $T_1, T_2, \dots$ Stoppzeiten, dann ist für festes $t \geqslant 0$ jedes $\mathbf{1}_{[T_i\leqslant t]}$ $\mathcal{F}_t$-messbar und somit auch N_t.

$\Rightarrow$: Sei N_t adaptiert, so gilt für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und t

$$[T_i \leqslant t] = [N_t \geqslant i] \in \mathcal{F}_t,$$

also sind alle T_i Stoppzeiten. ∎

1.14 **Definition** *Ein adaptierter Zählprozess heißt Poisson-Prozess, falls*

1. $N_t - N_s$ *unabhängig von* $\mathcal{F}_s$ *ist für* $0 \leqslant s < t < \infty$, *und*
2. $N_t - N_s \overset{\mathcal{D}}{=} N_u - N_v$ *für* $0 \leqslant s < t < \infty$, $v < u$ *und* $t - s = u - v$. ⋊

Die Eigenschaften 1.) und 2.) werden als Unabhängigkeit der Zuwächse bzw. Stationarität der Zuwächse bezeichnet.

1.21 **Satz** *Für einen Poisson-Prozess* $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ *gilt*

$$P[N_t = n] = \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n \geqslant 0,$$

für ein $\lambda > 0$, *d.h.* N_t *ist* $\pi(\lambda t)$*-verteilt. Ferner ist* N *stetig nach Wahrscheinlichkeit, d.h.*

$$\lim_{u \to t} N_u \xrightarrow{\mathbf{P}} N_t, \qquad t \geqslant 0. \quad ⋊$$

Den Parameter λ nennt man auch Intensitätsrate von N.

1.22 **Satz** *Ist* N *ein Poisson-Prozess mit Intensitätsrate* $\lambda > 0$, *so sind* $(N_t - \lambda t)_{t \geqslant 0}$ *und* $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geqslant 0}$ *Martingale.* ⋊

Man bezeichnet den am Erwartungswert zentrierten Prozess $(N_t - \lambda t)_{t \geqslant 0}$ auch als kompensierten Poisson-Prozess.

Beweis. Übungsaufgabe 2.2. ∎

1.23 **Satz** *Ist* N *ein Poisson-Prozess, so ist die durch* N *erzeugte (sog. natürliche) Filtration*

$$\mathbb{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geqslant 0}, \qquad \mathcal{F}_t^N = \sigma(\{N_s : s \leqslant t\})$$

rechtsstetig. ⋊

Beweis. Sei $E = [0, \infty]$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap E$. Den Messraum

$$\Gamma := \left(\prod_{s \in [0,\infty)} E_s, \bigotimes_{s \in [0,\infty)} \mathcal{B}_s \right), \qquad E_s = E,\ \mathcal{B}_s = \mathcal{B},$$

können wir als die Menge der Abbildungen $f : [0, \infty) \to E$, $s \mapsto f(s)$ auffassen. Wir konstruieren nun einen Prozesses mit Werten in Γ

$$\pi_t : \Omega \to \Gamma, \qquad \pi_t(\omega) : s \mapsto N_{s \wedge t}(\omega), \qquad t \geqslant 0.$$

Offenbar ist $\pi_t(\Omega) \subset \{f : [0, \infty) \to E : f \text{ ist konstant ab t}\}$.

Sei nun $\Lambda \in \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{F}^N_{t+1/n}$, so ist zu zeigen, dass $\Lambda \in \mathcal{F}^N_t$. Zunächst existiert für jedes $n \geqslant 1$ eine Menge $A_n \in \bigotimes_{s \in [0,\infty)} \mathcal{B}_s$ mit

$$\Lambda = [\pi_{t+1/n} \in A_n].$$

Für jedes $\omega \in \Omega$ existiert ein $n \geqslant 1$, so dass $s \mapsto N_s(\omega)$ konstant auf $[t, t + 1/n]$ ist. Setzen wir $W_n = [\pi_t = \pi_{t+1/n}]$, so gilt $W_n \uparrow \Omega$ und daher ist

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \lim_{n\to\infty} W_n \cap \Lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} W_n \cap [\pi_{t+1/n} \in A_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} W_n \cap [\pi_t \in A_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} [\pi_t \in A_n].
\end{aligned}$$

Somit ist $\Lambda \in \mathcal{F}^N_t$ gezeigt. Insgesamt gilt $\mathcal{F}^N_t \subset \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{F}^N_{t+1/n} \subset \mathcal{F}^N_t$, also ist $\mathbb{F}^N$ rechtsstetig. ∎

■ Wiener-Prozess

Es existieren zahlreiche Möglichkeiten die Brownsche Bewegung zu definieren. Hier haben wir eine Definition gewählt, die möglichst analog zur Definition 1.14 des Poisson-Prozesses ist.

1.15 **Definition** *Ein adaptierter Prozess $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ heißt d-dimensionale Brownsche Bewegung oder Wiener-Prozess, falls*

1. *$B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist für $0 \leqslant s < t < \infty$, und*
2. *$B_t - B_s$ $N(0, (t-s)C)$-verteilt ist für $0 \leqslant s < t < \infty$ mit einer Kovarianzmatrix C.*

Die Brownsche Bewegung startet in x, falls $P(B_0 = x) = 1$. Falls zusätzlich C die Einheitsmatrix ist, heißt B Standard-Brownsche Bewegung. ⋊

Im Falle einer Standard-Brownschen Bewegung stellen die Komponenten von B d unabhängige 1-dimensionale Standard-Brownsche Bewegungen dar und jede Koordinate der Zuwächse $B_t - B_s$ ist $N(0, t-s)$-verteilt. Im Fall einer beliebigen Kovarianzmatrix C, dies ist eine symmetrische und positiv definite Matrix, kann man die

Brownsche Bewegung als eine orthogonale Transformation einer Standard-Brownschen Bewegung verstehen.

An den Startpunkt B_0 stellen wir keine Forderungen, dieser kann eine *beliebige* und nicht notwendigerweise normalverteilte Zufallsvariable sein. In vielen Anwendungen startet der Prozess jedoch im Nullpunkt.

Während sich Poisson-Prozesse ohne große Mühe explizit konstruieren lassen, ist die Existenz einer Brownschen Bewegung etwas aufwändiger zu beweisen. Wir verweisen diesbezüglich auf die Vorlesung Stochastische Prozesse bzw. [6, Anhang A.4].

Häufig wird zusätzlich zu 1.) und 2.) noch gefordert, dass B fast sicher stetige Pfade besitzt. Dies ist jedoch keine weitere Einschränkung wie der folgende Satz zeigt.

1.24 **Satz** *Ist B eine in x startende Brownsche Bewegung, so existiert eine Modifikation von B, die fast sicher stetige Pfade besitzt.*

In Zukunft werden wir deshalb immer mit der pfadstetigen Version arbeiten. Weiterhin sind Brownsche Bewegungen Martingale, und erben damit zahlreiche angenehme Eigenschaften. Auf jedem kompakten Zeitintervall $[0,T]$ gilt beispielsweise der Martingalkonvergenzsatz 1.10 & 1.11, denn auf einem solchen Intervall ist die Brownsche Bewegung L^2-beschränkt und daher insbesondere gleichgradig integrierbar. Man überzeuge sich allerdings davon, dass dies für unbeschränkte Zeitintervalle nicht mehr gilt.

1.25 **Satz** *Ist B eine 1-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$, so sind*

$$B_t \text{ und } (B_t^2 - t) \text{ Martingale.} \quad \rtimes$$

Beweis. Übungsaufgabe 2.3. ∎

Als eine erste Anwendung der Martingaleigenschaft wollen wir das folgende Lemma von Itō beweisen, welches der Schlüssel zur Definition von Itō-Integralen sein wird. Wir betrachten dazu eine Partition π des Intervalls $[a, a+t]$,

$$\pi = (t_i), \qquad a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant a + t.$$

Zu dieser definieren die quadratische Variation von B auf $[a, a+t]$ bezüglich π als

$$\pi B \coloneqq \sum_{t_i \in \pi} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

1.26 **Satz** *Ist (π_n) eine monotone Folge von Partitionen des Intervalls $[a, a+t]$ und $|\pi_n| \to 0$. Dann gilt für jede Standard-Brownsche Bewegung B*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n B = t \quad \textit{f.s. und in } L^2.$$

Die L^2-Konvergenz gilt auch im Falle nicht monotoner Partitionenfolgen. ⋊

Beweis. Wir zeigen zuerst die L^2-Konvergenz. Fixiere dazu ein $n \geqslant 1$, so gilt

$$\pi_n B - t = \sum_{t_i \in \pi_n} Y_i, \qquad Y_i := (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i).$$

Per definitionem der Brownschen Bewegung sind die Y_i unabhängig mit $\mathbf{E}Y_i = 0$. Nach dem Satz von Bienaymé gilt

$$\mathbf{E}(\pi_n B - t)^2 = \mathbf{E}\Bigg(\sum_{t_i \in \pi_n} Y_i\Bigg)^2 = \sum_{t_i \in \pi_n} \mathbf{E}Y_i^2.$$

Weiterhin ist $Y_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Delta_i Z_i^2 - \Delta_i$ mit Z_i $N(0,1)$-verteilt und $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, so dass

$$\mathbf{E}Y_i^2 = \Delta_i^2 \mathbf{E}(Z_i^2 - 1)^2 = 2\Delta_i^2.$$

Also können wir die Reihe wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}\sum_{t_i \in \pi_n} \mathbf{E}Y_i^2 &= 2 \sum_{t_i \in \pi_n} (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leqslant 2 \sup_i (t_{i+1} - t_i) \sum_{t_i \in \pi_n} (t_{i+1} - t_i) \\ &= 2t|\pi_n| \to 0, \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

Um noch die fast sichere Konvergenz zu zeigen, definieren wir

$$N_n(\omega) := \pi_{-n} B(\omega), \qquad n = -1, -2, \ldots,$$

und setzen $\mathcal{G}_n := \sigma(N_n, N_{n-1}, \ldots)$. So ist $\mathcal{G}_n$ eine fallende Folge von σ-Algebren und $(N_n)_{n \leqslant -1}$ ist ein reverses Martingal bezüglich $\mathcal{G}_n$, d.h.

$$\mathbf{E}(N_n \mid \mathcal{G}_{n-1}) = N_{n-1}.$$

Nach Satz 1.8 existiert der Limes $\lim_{n\to-\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} \pi_n B$ f.s. und stimmt im L^2 Sinne mit t überein. Es existiert also eine Teilfolge von (N_n), die fast sicher gegen t konvergiert, und da auch die gesamte Folge konvergiert hat diese ebenfalls den Grenzwert t. ∎

Obwohl die Pfade der Brownschen Bewegung fast sicher stetig sind, und ihre quadratische Variation auf kompakten Zeitintervallen beschränkt ist, ist sie hochgradig irregulär. Wir zeigen nun, dass ihre Pfade von unbeschränkter Totalvariation und somit insbesondere nicht rektifizierbar sind. Sei $I = [a,b]$ ein Intervall, so heißt die Zufallsvariable

$$\mathbf{Var}_I(B) := \sup_{\pi\in\mathcal{P}_I} \sum_{t_i\in\pi} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|, \qquad \mathcal{P}_I := \{\pi : \pi \text{ ist Partition von } I\},$$

Totalvariation von B auf I. Aufgrund der Stetigkeit von B können wir uns auf Teilungen mit rationalen Randpunkten zurückziehen, so dass das Supremum nur über eine abzählbare Menge gebildet werden muss und V_I somit messbar ist.

1.27 **Satz** *Für fast alle ω sind die Pfade $t \mapsto B_t(\omega)$ einer Standard-Brownschen Bewegung auf jedem Zeitintervall von unbeschränkter Totalvariation.*

Beweis. Sei $I = [a,b]$ ein Intervall. Nehmen wir an, dass $P([V_I < \infty]) > 0$ gilt und betrachten wir eine monotone Folge π_n von Partitionen von I mit $|\pi_n| \to 0$. Nach dem Lemma von Itō gilt

$$\begin{aligned} 0 < b - a &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\pi_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \sup_{t_i\in\pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sum_{t_i\in\pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \\ &\leqslant V_I \limsup_{n\to\infty} \sup_{t_i\in\pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \to 0, \end{aligned}$$

denn I ist kompakt, also ist B gleichmäßig stetig auf I und das Supremum strebt gegen Null da $|\pi_n| \to 0$. Dies ist ein Widerspruch, also muss $V_I = \infty$ bis auf einer Nullmenge N_I gelten.

Schöpfen wir $\mathbb{R}$ durch sämtliche Intervalle mit rationalen Randpunkten aus, so ist die abzählbare Vereinigung dieser N_I ebenfalls eine Nullmenge. Mit der Stetigkeit von B folgt nun, dass

$$V_I(\omega) = \infty, \qquad \omega \in \Omega \setminus N_0$$

gleichzeitig für alle Intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ auf einer festen Nullmenge N_0 gilt. Dies war zu zeigen. ∎

Zum Abschluss unserer kurzen Darstellung von Brownschen Bewegungen bemerken wir, dass analog zum Poisson-Prozess, die natürliche Filtration der Brownschen Bewegung rechtsstetig ist.

1.28 **Satz** *Ist B ein Wiener-Prozess, so ist die durch B erzeugte und vervollständigte (natürliche) Filtration*

$$\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t \geqslant 0}, \qquad \mathcal{F}_t^B = \sigma(\{B_s : s \leqslant t\} \cup \mathcal{N})$$

rechtsstetig, wobei $\mathcal{N}$ alle P-Nullmengen enthalte. $\rtimes$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zu dem von Satz 1.23 - siehe [3, Proposition 2.7.7] . ∎

■ Lévy-Prozesse

Sowohl Poisson-Prozesse als auch Wiener-Prozesse haben gemeinsam, dass ihre Zuwächse stationär und unabhängig von der Vergangenheit sind. Beide Prozesse sind stetig nach Wahrscheinlichkeit, jedoch verfügt nur die Brownsche Bewegung fast sicher über stetige Pfade. Beide Prozesse sind spezielle Versionen eines allgemeineren Lévy-Prozesses.

1.16 **Definition** *Ein adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ mit $X_0 = 0$ f.s. heißt Lévy-Prozess, falls*

1. *X von der Vergangenheit unabhängige Zuwächse besitzt,*
2. *X stationäre Zuwächse besitzt, und*
3. *X stetig nach Wahrscheinlichkeit ist.* $\rtimes$

Man kann Lévy-Prozesse als eine Verallgemeinerung von Poisson- und Wiener-Prozessen betrachten. Viele Aussagen, die für Wiener- oder Poisson-Prozesse gelten, gelten auch für Lévy-Prozesse.

Weiterhin kann man zeigen, dass ein Lévy-Prozess, welcher fast sicher über stetige Pfade verfügt, nach einer Umskalierung der Zeit bereits eine Brownsche Bewegung ist. Mehr noch, denn jeder Lévy-Prozess lässt sich in zwei Prozesse zerlegen. In einen mit beschränkter Totalvariation, der sich wie ein Poisson-Prozess verhält, und einen mit unbeschränkter Totalvariation, der dem Wiener-Prozess ähnelt. Diese Zusammenhänge werden in der Vorlesung Stochastische Prozesse verdeutlicht.

1-E Lokale Martingale

Martingale sind Prozesse mit zahlreichen angenehmen Eigenschaften. Daher ist aber auch die Forderung, dass ein gegebener Prozess ein Martingal ist, sehr stark. Viele der in Anwendungen auftretenden und interessanten Prozesse sind daher auch keine Martingale, allerdings besitzen sie oftmals nach einer *Lokalisierung* die Martingaleigenschaft. Der Vermögensprozess ist beispielsweise nur dann ein Martingal, wenn die Handelsstrategie hinreichend gut integrierbar ist, er ist aber stets ein lokales Martingal. Weiterhin sind viele stochastische Integrale, deren Intergrator ein Martingal ist, selbst keine Martingale sondern nur lokale Martingale. In der Tat ist die stochastische Integration bezüglich lokalen Integralen abgeschlossen.

1.17 **Definition** *Ein adaptierter càdlàg Prozess X ist ein lokales Martingal, falls eine Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \dots$ und $\lim_n T_n = \infty$ f.s. exisitert, so dass*

$$X^{T_n} \text{ (oder schwächer } X^{T_n}\mathbf{1}_{[T_n>0]})$$

für alle $n \geqslant 0$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Eine Folge (T_n) mit obigen Eigenschaften nennt man auch Fundamentalfolge. ⋊

Oftmals kann man unerwünschte Eigenschaften wie eine starke Irregularität mittels Lokalisierung beseitigen. Grob gesprochen *verbessert* Lokalisierung die Eigenschaften eines Prozesses.

Bemerkung. Ist X^{T_n} ein Martingal, so gilt dies auch für $X^{T_n}\mathbf{1}_{[T_n>0]}$, nicht jedoch umgekehrt. Wird die zweite schwächere Bedingungen in der Definition eines lokalen Martingals gefordert, lassen sich in gewissen Situationen die Voraussetzungen an X_0 abschwächen. ⊸

Als erstes zeigen wir, dass Lokalisierung die Martingaleigenschaft nicht zerstört.

Lemma *Jedes Martingal ist auch ein lokales Martingal.* ⋊

Beweis. Sei X ein Martingal. Wähle $T_n = n$, so gilt $T_n \uparrow \infty$ und (T_n) ist eine monotone Folge von Stoppzeiten. Nach dem Optional Stopping Theorem 1.18 ist jedes X^{T_n} ein Martingal. Fixieren wir ein $n \geqslant 1$, so ist $X_t^{T_n}$ konstant für $t \geqslant n$. Setzen wir $X_\infty = X_n$, so gilt

$$X_t^{T_n} \xrightarrow{L^1 \text{ \& f.s.}} X_\infty, \qquad t \to \infty,$$

also ist X^{T_n} abschließbar und nach Satz 1.11 gleichgradig integrierbar. ∎

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass wir in der Definition des lokalen Martingals auf die gleichgradige Integrierbarkeit verzichten hätten können. Sei dazu T_n eine Fundamentalfolge und X^{T_n} für jedes $n \geqslant 1$ ein Martingal. Setzten wir $S_n = T_n \wedge n$, so ist X^{S_n} für jedes $n \geqslant 1$ sogar ein abschließbares Martingal folglich nach Satz 1.11 gleichgradig integrierbar. ⊸

1.18 **Definition** *Eine Stoppzeit T reduziert einen Prozess X, falls X^T ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.* ⋊

Insbesondere wird ein gleichgradig integrierbares Martingal durch jede Stoppzeit reduziert. Im Folgenden geben wir weitere Eigenschaften von reduzierenden Stoppzeiten und lokalen Martingalen an.

1.29 **Satz** *Seien X, Y lokale Martingale und S, T Stoppzeiten.*

a) Wird X durch T reduziert und gilt $S \leqslant T$ f.s., so wird X auch durch S reduziert.

b) $X + Y$ ist ein lokales Martingal.

c) S, T reduzieren $X \Rightarrow S \vee T$ reduzieren X.

d) X^T und $X^T \mathbf{1}_{[T>0]}$ sind lokale Martingale.

e) Seien Z ein Prozess mit càdlàg Pfaden, (T_n) eine Folge von Stoppzeiten mit $T_n \uparrow \infty$ und Z^{T_n} (oder $Z^{T_n}\mathbf{1}_{[T_n>0]}$) für alle n lokale Martingale. Dann ist auch Z ein lokales Martingal. ⋊

Beweis. a): Nach Annahme ist X^T ein gleichgradig integrierbares Martingal. Sei nun $S \leqslant T$ f.s., so gilt

$$X^S = X^{S \wedge T} = (X^T)^S,$$

und letzteres ist ebenfalls ein gleichgradig integrierbares Martingal nach dem Optional Stopping Theorem 1.18.

b): Da X und Y lokale Martingale sind, existieren Fundamentalfolgen S_n und T_n, die X respektive Y reduzieren. Nach a) wird sowohl X als auch Y durch $S_n \wedge T_n$ reduziert. Weiterhin gilt

$$\mathbf{E}|X_t^{S_n \wedge T_n}|\mathbf{1}_{[|X_t^{S_n \wedge T_n}| \geqslant c]} \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \mathbf{E}|X_t^{S_n}|\mathbf{1}_{[|X_t^{S_n}| \geqslant c]},$$

also ist auch $(X+Y)^{S_n \wedge T_n}$ gleichgradig integrierbar und somit $X+Y$ ein lokales Martingal.

c): Schreiben wir $X^{S \vee T} = X^S + X^T - X^{S \wedge T}$, so folgen gleichgradige Integrierbarkeit und Martingaleigenschaft mit a) und b).

d): Nach Voraussetzung existiert eine Fundamentalfolge T_n, so dass X^{T_n} ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Mit a) folgt $T_n \wedge T$ reduziert X und weiterhin gilt $X^{T_n \wedge T} = (X^T)^{T_n}$. Also ist X^T ein lokales Martingal.

e): Nach Annahme sind alle Z^{T_n} lokale Martingale. Für jedes n existiert also eine Fundamentalfolge $U_{n,k}$ zu Z^{T_n} mit $U_{n,k} \uparrow \infty$ für $k \to \infty$. Wählen wir nun k_n so, dass

$$P[U_{n,k_n} \leqslant T_n \wedge n] \leqslant 2^{-n}, \qquad n \geqslant 1,$$

so wird Z durch $S_n = U_{n,k_n} \wedge T_n$ reduziert und mit dem Lemma von Borel und Cantelli folgt $S_n \uparrow \infty$. Setzen wir

$$R_n = S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_n,$$

so ist R_n eine monotone Folge von Stoppzeiten mit $R_n \uparrow \infty$, die Z nach c) reduziert. Also ist Z ein lokales Martingal. ∎

Ein Prozess ist *lokal* ein Martingal, wenn eine monotone, unbeschränkte Folge von Stoppzeiten existiert, so dass alle gestoppten Prozesse gleichgradig integrierbare Martingale sind. Analog dazu kann man nach der Lokalisierung weiterer Eigenschaften fragen.

1.19 **Definition** *Sei X ein stochastischer Prozess. Die Eigenschaft π gilt lokal, falls es eine Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $T_n \uparrow \infty$ f.s. gibt, so dass X^{T_n} (oder auch schwächer $X^{T_n}\mathbf{1}_{[T_n>0]}$) für jedes $n \geqslant 1$ die Eigenschaft π besitzt.* ⋊

Jedes L^2-Martingal ist ein gleichgradig integrierbares Martingal. Unter Verwendung einer Lokalisierung können wir uns von L^2-Beschränktheit auf lediglich Quadratintegrierbarkeit zurückziehen.

1.30 **Satz** *Ein lokal quadratintegrierbares Martingal ist auch ein lokales L^2-Martingal und daher insbesondere ein lokales Martingal.* ⋊

Beweis. Sei X ein lokal quadratintegrierbares Martingal, so existiert eine Folge von Stoppzeiten $T_n \uparrow \infty$, so dass X^{T_n} ein Martingal ist mit $\mathbf{E}X^2_{t \wedge T_n} < \infty$ für jedes $t \geqslant 0$.

Setzen wir $S_n = n \wedge T_n$, so wird X auch durch S_n reduziert. Insbesondere ist $X^2_{s \wedge S_n}$ ein Submartingal und folglich

$$\sup_{s \geqslant 0} \mathbf{E} X^2_{s \wedge S_n} \leqslant \mathbf{E} X^2_n < \infty.$$

Somit ist X lokal L^2-beschränkt, also ein lokales L^2-Martingal und daher insbesondere lokal gleichgradig integrierbar. ∎

1.31 **Satz** *Seien X ein adaptierter Prozess mit càdlàg Pfaden und (T_n) eine Folge von Stoppzeiten mit $T_n \uparrow \infty$ f.s. Ist X^{T_n} für alle n ein Martingal, so ist X ein lokales Martingal.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 1.29 e). ∎

Häufig ist es von großem Interesse festzustellen, ob ein lokales Martingal sogar ein Martingal ist. Der folgende Satz gibt hierfür einfache hinreichende Bedingungen an.

1.32 **Satz** *Sei X ein lokales Martingal.*

a) Falls $\mathbf{E} \sup_{s \leqslant t} |X_s| < \infty$ für alle $t \geqslant 0$ gilt, so ist X ein Martingal.

b) Gilt sogar $\mathbf{E} \sup_{s \geqslant 0} |X_s| < \infty$, so ist X auch gleichgradig integrierbar. ⋊

Beweis. a): Nach Voraussetzung existiert eine Fundamentalfolge (T_n), so dass X^{T_n} ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Somit gilt für alle $s \leqslant t$

$$\mathbf{E}(X_{t \wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s) = X_{s \wedge T_n} \to X_s \text{ f.s.}, \qquad n \to \infty,$$

während $X^{T_n}_t \to X_t$ f.s. für $n \to \infty$. Um den Limes mit der bedingten Erwartung vertauschen zu können, wollen wir den Satz von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungen anwenden. Nach Voraussetzung ist $X^*_t = \sup_{s \leqslant t} X_s$ eine integrierbare Majorante von $X^{T_n}_t$. Also ist der Satz anwendbar, so dass auch

$$\mathbf{E}(X_{t \wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s) \to \mathbf{E}(X_s \mid \mathcal{F}_s) \text{ f.s.}, \qquad n \to \infty.$$

Somit ist X ein Martingal.

b): Die Martingaleigenschaft folgt aus a). Weiterhin gilt für jedes $t \geqslant 0$,

$$\mathbf{E}(|X_t| \mathbf{1}_{|X_t| \geqslant c}) \leqslant \frac{\mathbf{E}|X_t|}{c} \leqslant \frac{\mathbf{E} \sup_{s \geqslant 0} |X_s|}{c}$$

und die rechte Seite ist unabhängig von t. Folglich ist X auch gleichgradig integrierbar. ∎

2 Stochastische Integration linksstetiger Prozesse

2-A Stieltjes-Integration

Nachdem wir nun die Theorie der stochastischen Prozesse für unsere Zwecke hinreichend entwickelt haben, wollen wir damit fortfahren, ein stochastisches Integral zu definieren. Wir beginnen mit dem naiven Ansatz, nämlich das wohlbekannte Riemann-Stieltjes-Integral auf stochastische Prozesse zu verallgemeinern.

2.1 **Definition** *Sei A càdlàg Prozess.*

1. *A heißt wachsender Prozess, falls die Pfade $t \mapsto A_t(\omega)$ für fast alle ω nichtfallend sind.*

2. *A heißt von endlicher Variation (FV), falls f.a. Pfade von A auf jedem kompakten Intervall von $\mathbb{R}_+$ von endlicher Variation sind. In diesem Fall heißt der durch*

$$|A|_t := \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=1}^{2^n} \left| A_{\frac{tk}{2^n}} - A_{\frac{(t-1)k}{2^n}} \right|$$

definierte Prozess Variationsprozess $|A| = (|A|_t)_{t\geqslant 0}$ von A. ⋊

Man beachte, dass ein Prozess von endlicher Variation auf kompakten Intervallen durchaus von unbeschränkter Totalvariation auf $\mathbb{R}_+$ sein kann.

Ist A ein Prozess von endlicher Variation und besitzt der stochastische Prozess H stetige Pfade, so lässt sich pfadweise, d.h. für jedes feste ω, das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^t H_s \,\mathrm{d}A_s$ als Grenzwert der Riemann-Stieltjes-Summen definieren.

2.1 **Satz** *Sei A ein Prozess von beschränkter Variation, und $H : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ ein Prozess, der $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-messbar und stetig in $s \in [0,t]$ ist. Sei weiter (π_n) eine Folge von* *endlichen zufallsabhängigen Partitionen des Intervalls* $[0,t]$ *mit* $|\pi_n| \to 0$ *f.s.. Ist* $T_k \leqslant S_k \leqslant T_{k+1}$*, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{T_k, T_{k+1}\in\pi_n} H_{S_k}(A_{T_{k+1}} - A_{T_k}) =: \int_0^t H_s \,\mathrm{d}A_s \quad \text{f.s..} \quad \rtimes$$

Beweis. Sei A von beschränkter Variation. Wir wollen A in seinen Positiv- und Negativteil zerlegen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} A^+ := \frac{1}{2}\left(A_t + |A|_t\right) &= \frac{1}{2}\left(A_t + \sup_\pi \sum_{t_i\in\pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|\right) \\ &= \frac{1}{2}\sup_\pi \sum_{t_i\in\pi} \left(A_{t_{i+1}} - A_{t_i} + |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|\right) \\ &= \sup_\pi \sum_{t_i\in\pi} \left(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}\right) \mathbf{1}_{[A_{t_{i+1}} - A_{t_i} \geqslant 0]}. \end{aligned}$$

So ist A^+ wohldefiniert, wachsend und rechtsstetig und definiert daher ein Maß auf $\mathbb{R}$. Analog dazu ist der Negativteil $A^- := A - A^+$ wachsend und rechtsstetig und definiert ebenfalls ein Maß auf $\mathbb{R}$.

Somit können wir das Integral mit Integrand H und Integrator A pfadweise f.s. definieren

$$(H \bullet A)_t(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)\mathrm{d}A_s(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)\mathrm{d}A_s^+(\omega) - \int_0^t H_s(\omega)\mathrm{d}A_s^-(\omega),$$

wobei die letzten beiden Integrale f.s. im Sinne von Riemann-Stieltjes existieren. ∎

Dass der Prozess A von beschränkter Variation ist, geht hier in entscheidender Weise in die Konstruktion des Integrals ein. Allerdings werden wir später zeigen, dass jedes nichttriviale, pfadstetige Martingal zwangsweise von unbeschränkter Variation ist. Es stellt sich daher die Frage, ob sich das Integral $\int H_s \,\mathrm{d}X_s$ auch für ein stetiges Martingal X pfadweise definieren lässt?

Der folgende Satz liefert eine negative Antwort, sofern wir verlangen, dass mindestens alle stetigen Prozesse als Integranden zulässig sind. Ein Integralbegriff, der nicht einmal die stetigen Funktionen umfasst, wäre aber nur von sehr begrenztem Nutzen...

2.2 **Satz** *Sei* (π_n) *eine Folge von Partitionen des Intervalls* $[0,1]$ *mit* $|\pi_n| \to 0$*. Konvergiert*

$$\lim_n \sum_{t_i\in\pi_n} h(t_i)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

für jede stetige Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, so ist $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation. $\rtimes$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit aus der Funktionalanalysis.

Satz von Banach-Steinhaus *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $T_\alpha : X \to Y$ für $\alpha \in I$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren. Dann folgt aus der punktweisen Beschränktheit*

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\|_Y < \infty, \qquad x \in X,$$

die gleichmäßige Beschränktheit

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty. \quad \rtimes$$

Beweis von Satz 2.2. Um den Satz von Banach-Steinhaus anwenden zu können, wählen wir $X = C([0,1])$ als den Raum der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm, und $Y = \mathbb{R}$. Sei nun π_n eine Folge von endlichen Partitionen mit $|\pi_n| \to 0$. Zu jedem π_n definieren wir einen linearen Operator

$$T_n h \coloneqq \sum_{t_k \in \pi_n} h(t_k)(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}),$$

so ist T_n offenbar eine Folge beschränkter Operatoren. Zu festem π_n existiert eine stetige Funktion $h_n \in X$ mit

$$h_n(t_k) = \operatorname{sign}(x_{t_{k+1}} - x_{tk}), \qquad \|h_n\|_X = 1.$$

Aufgrund der Konstruktion der h_n gilt dann

$$T_n h_n = \sum_{t_k \in \pi_n} |x_{t_{k+1}} - x_k| \leqslant \|T_n\| \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \|T_n\|.$$

Somit ist die Variation $|x|_1$ von x auf dem Intervall $[0,1]$ durch $\sup_{n \geqslant 1} \|T_n\|$ beschränkt. Andererseits existiert nach Voraussetzung der Limes

$$\lim_{n \to \infty} T_n h$$

für jedes $h \in X$, also ist $T_n h$ punktweise beschränkt. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt nun die gleichmäßige Beschränktheit, d.h.

$$|x|_1 \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \|T_n\| < \infty,$$

und folglich ist x von beschränkter Variation. ∎

2-B Semimartingale

Wählen wir ein Martingal X als Integrator, so haben wir im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, dass sich aufgrund der unbeschränkten Variation von X das Integral $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s$ nicht für alle stetigen Prozesse H *pfadweise* definieren lässt.

Itô löste dieses Problem, indem er die fast sichere Konvergenz der Riemann-Stieltjes-Summen, wie sie in Satz 2.2 gefordert wird, durch die L^2-Konvergenz ersetzte und verlangte, dass die Integranden nur die bis zum momentanen Zeitpunkt verfügbare Information, welche durch die Filtration $\mathbb{F}$ beschrieben wird, ausnützen dürfen. So war es ihm möglich einen Integrationskalkül für stetige Prozesse bezüglich einer Brownschen Bewegung zu entwickeln.

Wir wollen das Integral gleich für eine viel größere Klasse von Integratoren, für sogenannte Semimartingale, definieren. Dafür müssen wir die Konvergenz der Riemann-Stieltjes-Summen noch weiter abschwächen, nämlich von L^2-Konvergenz auf lediglich Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit. Ähnlich wie bei der Definition des Maß-Integrals beginnen wir damit, das Integral zunächst für besonders einfache Integranden zu definieren.

2.2 **Definition** *Ein stochastischer Prozess H heißt einfach vorhersagbar (simple predictable), falls*

$$H_t = H_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$$

mit Stoppzeiten $0 = T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_{n+1} < \infty$ und Zufallsvariablen $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ mit $|H_i| < \infty$ f.s. für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. $\rtimes$

Bezeichnungen. A. Den Vektorraum der einfach vorhersagbaren Prozesse bezeichnen wir mit $\mathbb{S}$.

B. Ferner schreiben wir $\mathbb{S}_u \coloneqq (\mathbb{S}, \|\cdot\|_u)$ für $\mathbb{S}$ versehen mit der Topologie, welche durch die in (t, ω) gleichmäßige Konvergenz auf $[0, \infty) \times \Omega$ induziert wird.

C. Weiterhin sei L^0 der durch die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit topologisierte Vektorraum der reellwertigen Zufallsvariablen. $\multimap$

Wir suchen nach einer Klasse von “guten Integratoren” X, so dass der durch

$$I_X : \mathbb{S}_u \to L^0, \quad H \mapsto I_X(H) \coloneqq H \bullet X \coloneqq \int H \, \mathrm{d}X \coloneqq H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})$$

definierte Operator I_X als ein Integraloperator angesehen werden kann, d.h.

(a) I_X ist linear auf $\mathbb{S}_u$,

(b) I_X ist monoton, und

(c) I_X genügt einem Satz der beschränkten Konvergenz in dem Sinne, dass

$$H_n \to H \text{ in } \mathbb{S}_u \quad \Rightarrow \quad H_n \bullet X \to H \bullet X \text{ in } L^0.$$

Historisch hat man als Integratoren zunächst nur die Brownsche Bewegung betrachtet. Anschließend hat man die Klasse von Integratoren immer weiter vergrößert, auf Martingale, auf lokale Martingale und schließlich auf die sogenannten Semimartingale. Wir gehen anders vor, und definieren das Integral gleich für die größtmögliche Klasse von Integratoren, die für uns interessant sind.

2.3 **Definition** 1. *Ein stochastischer Prozess X heißt totales Semimartingal, falls X càdlàg, adaptiert und die Abbildung $I_X : \mathbb{S}_u \to L^0$ stetig ist.*

2. *Ein stochastischer Prozess X heißt Semimartingal, falls $X^t = (X_{s\wedge t})_{s\geqslant 0}$ für alle $t \in (0,\infty)$ ein totales Semimartingal ist.* ⋊

Wir werden zeigen, dass viele der für die stochastische Analysis als Integranden in Frage kommenden Prozesse Semimartingale sind, z.B. Martingale, der Poisson-Prozess, der Wiener-Prozess und allgemeiner alle Levy-Prozesse.

Der folgende Satz zeigt, dass die Semimartingaleigenschaft eine lokale Eigenschaft ist - im Gegensatz zur Martingaleigenschaft.

2.3 **Satz** *Seien X ein stochastischer Prozess und $T_n \uparrow \infty$ f.s. eine Folge von Stoppzeiten, so dass X^{T_n} für alle n ein Semimartingal ist. Dann ist auch X ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Sei $t > 0$, so ist zu zeigen, dass X^t ein totales Semimartingal ist. Zunächst gilt für jedes $H \in \mathbb{S}_u$, und $c > 0$, dass

$$\begin{aligned} P[|I_{X^t}(H)| > c] &= P[|I_{X^t}(H)| > c,\ T_n > t] + P[|I_{X^t}(H)| > c,\ T_n \leqslant t] \\ &\leqslant P[|I_{X^{T_n\wedge t}}(H)| > c] + P[T_n \leqslant t]. \end{aligned} \tag{*}$$

Da I_X ein linearer Operator ist, ist es hinreichend, die Stetigkeit in Null zu zeigen. Sei also H^k eine beliebige Folge, die in $\mathbb{S}_u$ gegen Null konvergiert. Wähle $\varepsilon > 0$, so ist $P[T_n \leqslant t] \leqslant \varepsilon/2$ für $n \geqslant n_\varepsilon$ und

$$P[|I_{X^{T_{n_\varepsilon}\wedge t}}(H^k)| > c] \leqslant \varepsilon/2,$$

für $k \geqslant k_\varepsilon$, denn $X^{T_{n_\varepsilon}}$ ist ein Semimartingal. Mit (*) folgt nun die Stetigkeit von I_X, also ist X ebenfalls ein Semimartingal. ∎

Wie bereits festgestellt, genügt es aufgrund der Linearität von I_X lediglich die Stetigkeit in Null zu zeigen. Da die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit eine besonders schwache Form der Konvergenz ist, genügt es außerdem, für $H_n \to 0$ in $\mathbb{S}_u$

$$I_X(H_n) \xrightarrow{\text{f.s.}} 0, \quad \text{oder} \quad I_X(H_n) \xrightarrow{L^p} 0, \quad p \geqslant 1,$$

zu zeigen, um $I_X(H_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ zu folgern. Alternativ kann man auch die fast sichere Beschränktheit bzw. die L^p Beschränktheit von $I_X(H)$ zeigen, aus der dann ebenfalls die Stetigkeit folgt.

Als nächstes zeigen wir, dass Semimartingale eine Verallgemeinerung der uns bereits bekannten Integratoren sind. Insbesondere sind alle maßerzeugenden Funktionen Semimartingale und damit $I_X(H)$ eine echte Verallgemeinerung des Maßintegrals.

2.4 **Satz** *Jeder adaptierte Prozess X mit càdlàg Pfaden von beschränkter Variation auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ ist ein Semimartingal. Besitzt X Pfade von beschränkter Variation auf ganz $\mathbb{R}_+$, so ist X sogar ein totales Semimartingal.* ⋊

Beweis. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass X von beschränkter Variation auf $[0, \infty)$ ist. Andernfalls betrachten wir X^{S_n} mit $S_n = n$. Sei nun $H \in \mathbb{S}_u$, dann gilt

$$\begin{aligned} |I_X(H)| &\leqslant \|H\|_u \left(|X_0| + \sum_{i=1}^{n} |X_{T_{i+1}} - X_{T_i}| \right) \\ &\leqslant \|H\|_u \left(|X_0| + \operatorname{Var}(X, [0, \infty)) \right), \end{aligned}$$

also ist I_X f.s. beschränkt und folglich stetig. ∎

Insbesondere ist damit der Poisson-Prozess ein Semimartingal, denn dieser ist von beschränkter Variation auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ - nicht aber auf ganz $\mathbb{R}_+$. Die Klasse der Semimartingale ist tatsächlich wesentlich größer als die der adaptierten Prozesse mit beschränkter Variation auf kompakten Mengen. Wir geben im Folgenden eine kurze Liste von häufig auftretenden Prozessen an, die Semimartingale sind.

2.5 **Satz** *Jedes L^2-Martingal mit càdlàg Pfaden ist ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Sei X ein L^2-Martingal, d.h. $\sup_{s\geqslant 0} \mathbf{E}X_s^2 \leqslant M < \infty$. Ferner sei $H \in \mathbb{S}_u$ und $X_0 = 0$. Wir zeigen, dass $I_X(H)$ in L^2 beschränkt ist, und betrachten dazu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}I_X(H)^2 &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^n H_i(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})\right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{E}\left(H_i^2(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2\right) + \sum_{i=0}^n \mathbf{E}\left(H_iH_j(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})(X_{T_{j+1}} - X_{T_j})\right).\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass der zweite Summand verschwindet, können wir ohne Einschränkung $i < j$ annehmen. So ist $\mathcal{F}_{T_i} \subset \mathcal{F}_{T_{i+1}} \subset \mathcal{F}_{T_j}$ und H_i und H_j sind $\mathcal{F}_{T_j}$-messbar. Also gilt

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(H_iH_j(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})(X_{T_{j+1}} - X_{T_j})\right) \\ &\quad = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(H_iH_j(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) \mid \mathcal{F}_{T_j})\right) \\ &\quad = \mathbf{E}\left(H_iH_j(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})\mathbf{E}(X_{T_{j+1}} - X_{T_j} \mid \mathcal{F}_{T_j})\right) = 0\end{aligned}$$

nach dem Optional Sampling Theorem. Auf dieselbe Weise zeigt man, dass

$$\mathbf{E}\left(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}\right)^2 = \mathbf{E}\left(X_{T_{i+1}}^2 - X_{T_i}^2\right).$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E}I_X(H)^2 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{E}\left(H_i^2(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2\right) \leqslant \|H\|_u^2 \sum_{i=0}^n \mathbf{E}\left(X_{T_{i+1}}^2 - X_{T_i}^2\right) \\ &= \|H\|_u^2 \mathbf{E}X_{T_n}^2 \leqslant \|H\|_u^2 \mathbf{E}X_\infty^2 \leqslant \|H\|_u^2 M,\end{aligned}$$

denn X^2 ist nach der Jensenschen Ungleichung ein Submartingal. Also ist $I_X(H)$ beschränkt in L^2 und damit stetig. ∎

Aus dem vorangegangenen Satz ergibt sich automatisch die Semimartingaleigenschaft für viele weitere Prozesse.

2.1 **Korollar** *Jedes lokal quadratintegrierbare Martingal mit càdlàg Pfaden ist ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Sei X ein lokal quadratintegrierbares Martingal, so ist X nach Satz 1.30 ein lokales L^2-Martingal. Anwendung von Satz 2.5 ergibt, dass X ein lokales Semimartingal ist, und dies ist nach Satz 2.3 gleichbedeutend dazu, dass X ein Semimartingal ist. ∎

2.2 **Korollar** *Ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden ist ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Sei X ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. So ist $X_0 < \infty$ f.s. und folglich genügt es, den Fall $X_0 \equiv 0$ zu betrachten. Also ist X_t ein stetiger, adaptierter Prozess und nach Übungsaufgabe 3.6 lokal beschränkt und daher insbesondere lokal quadratintegrierbar. Korollar 2.1 ergibt die Semimartingaleigenschaft. ∎

Man mache sich klar, dass dies für lediglich links- oder rechtsstetige Prozesse nicht gilt.

Die Brownsche Bewegung ist im Allgemeinen kein Martingal. Sie ist aber ein lokales Martingal, wenn B_0 integrierbar ist bzw. ein lokales Martingal im schwächeren Sinn der Definition 2.1, wenn wir keine weiteren Voraussetzungen an B_0 stellen. Außerdem ist diese stetig, also können wir obiges Korollar anwenden und erhalten das folgende.

2.3 **Korollar** *Der Wiener-Prozess ist ein Semimartingal.* ⋊

Somit sind Poisson- und Wiener-Prozesse Semimartingale. Es stellt sich sogar heraus, dass jeder Lèvy-Prozess ein Semimartingal ist. Denn jeder Lèvy-Prozess lässt sich in zwei Teile zerlegen, von denen einer sich ähnlich wie ein Wiener-Prozess und der andere ähnlich wie ein Poisson-Prozess verhält.

2.4 **Definition** *Ein adaptierter càdlàg Prozess X heißt zerlegbar, falls es ein lokal quadratintegrierbares Martingal M und einen adaptierten càdlàg Prozess A mit beschränkter Variation auf kompakten Mengen gibt, so dass*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \qquad t \geqslant 0,$$

mit $M_0 = A_0 = 0$. ⋊

Mögliche Zerlegungen im Falle eines Poisson-Prozesses sind

$$X_t \equiv A_t, \quad \text{oder} \quad M_t = X_t - \lambda t, \quad A_t = \lambda t,$$

während man einen Wiener-Prozess als $X_t - X_0 = M_t$ zerlegen könnte.

2.6 **Satz** *Ein zerlegbarer Prozess ist ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der linearen Struktur des Raumes der Semimartingale und Satz 2.4 und Korollar 2.1. ∎

2.4 **Korollar** *Jeder Lévy-Prozess ist ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Lévy-Prozesse sind zerlegbar [7, Theorem 40] und somit nach Satz 2.6 Semimartingale. ∎

In machen Lehrbüchern wird ein Semimartingal als ein zerlegbarer Prozess definiert. Für einen adaptierten càdlàg Prozess X gilt tatsächlich

$$X \text{ ist zerlegbar } \Leftrightarrow X \text{ ist ein Semimartingal.}$$

2-C Stochastische Integrale

Bisher sind wir nur in der Lage, einfache vorhersagbare Integranden zu integrieren, während die Klasse der Integratoren bereits recht groß ist. Diejenigen adaptierten càdlàg Prozesse, welche sich für einfach vorhersagbare Prozesse als „gute Integratoren" erweisen, haben wir dabei als Semimartingale bezeichnet.

Unser Ziel für diesen Abschnitt ist es, den Integrationsbegriff auf eine größere Klasse von Integranden zu verallgemeinern - genauer auf adaptierte càglàd Prozesse. Offenbar sind alle einfach vorhersagbaren Prozesse adaptiert und càglàd, wir suchen daher nach einer Topologie auf dem Raum der adaptierten càglàd Prozesse, so dass $\mathbb{S}$ in diesem Raum dicht liegt. Zunächst etwas Notation:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &\coloneqq \{\text{adaptierte Prozesse mit càdlàg Pfaden}\}\\
\mathbb{L} &\coloneqq \{\text{adaptierte Prozesse mit càglàd Pfaden}\}\\
\mathrm{b}\mathbb{L} &\coloneqq \{\text{beschränkte adaptierte Prozesse mit càglàd Pfaden}\}
\end{aligned}$$

2.5 **Definition** *Eine Folge $(H^n)_{n\geqslant 1}$ von Prozessen konvergiert gegen den Prozess H gleichmäßig auf kompakten Mengen nach Wahrscheinlichkeit (uniformly on compacts in probability — kurz: ucp), falls für alle $t \geqslant 0$*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |H_s^n - H_s| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Wir kürzen dies ab mit $H^n \xrightarrow{ucp} H$. ⋊

Werden $\mathbb{D}, \mathbb{L}, \mathbb{S}$ mit der ucp-Topologie ausgestattet, so schreiben wir $\mathbb{D}_{\text{ucp}}, \mathbb{L}_{\text{ucp}}, \mathbb{S}_{\text{ucp}}$. Nach Definition 2.5 wird die ucp-Topologie erzeugt durch die Familie von Halbnormen

$$(X)_t^*, \qquad t \geqslant 0, \quad (X)_t^* \coloneqq \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s|.$$

Somit sind $\mathbb{D}_{\text{ucp}}$, $\mathbb{L}_{\text{ucp}}$ und $\mathbb{S}_{\text{ucp}}$ lokalkonvexe Vektorräume - cf. [9, Chap. 1] oder [10, Kap. VIII]. Man kann zeigen, dass die ucp-Topologie durch keine Norm erzeugt werden kann, allerdings ist $\mathbb{D}_{\text{ucp}}$ metrisierbar und eine mögliche Metrik ist gegeben durch

$$d(x,y) \coloneqq \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k}\mathbf{E}(1 \wedge (X-Y)^*_k).$$

Bezüglich dieser Metrik ist $\mathbb{D}$ auch vollständig.

2.7 **Satz** *$\mathbb{S}$ ist dicht in $\mathbb{L}$ bezüglich der ucp-Topologie.* $\rtimes$

Beweis. Zu $Y \in \mathbb{L}$ definieren wir $R_n \coloneqq \inf\{t : |Y_t| > n\}$, so ist R_n eine Stoppzeit mit $R_n \uparrow \infty$ f.s.. Setzen wir weiterhin

$$Y^n \coloneqq Y^{R_n}\mathbf{1}_{[R_n>0]},$$

so ist $Y^n \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ und $Y^n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$, also auch $Y^n \xrightarrow{\text{ucp}} Y$. Folglich liegt $\mathrm{b}\mathbb{L}$ dicht in $\mathbb{L}$ und es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{S}$ dicht in $\mathrm{b}\mathbb{L}$ liegt.

Sei also $Y \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ und $\varepsilon > 0$. Setzen wir

$$Z_t \coloneqq \lim_{u\downarrow t} Y_u,$$

so ist Z_t eine càdlàg Modifikation von Y. Durch $T_0 = 0$ und

$$T^\varepsilon_{n+1} \coloneqq \inf\{t > T^\varepsilon_n : |Z_t - Z_{T^\varepsilon_n}| > \varepsilon\}$$

wird daher nach Satz 1.3 eine Stoppzeit definiert, und für Y gilt aufgrund der Linksstetigkeit

$$|Y_t - Y_{T^\varepsilon_{n+1}}| \leqslant \varepsilon, \qquad T^\varepsilon_n < t \leqslant T^\varepsilon_{n+1}.$$

Ferner gilt $T_n \uparrow \infty$, so dass

$$Y^\varepsilon \coloneqq Y_0\,\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{n\geqslant 0} Y_{T^\varepsilon_n}\mathbf{1}_{(T^\varepsilon_n, T^\varepsilon_{n+1}]}$$

beschränkt ist, nur abzählbar viele Werte annimmt, und gleichmäßig gegen Y konvergiert. Wählen wir nun ein kompaktes Zeitintervall $[0,T]$ und betrachten dort

$$Y^{k,\varepsilon} \coloneqq Y_0\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{n=0}^{k} Y_{T^\varepsilon_n}\mathbf{1}_{(T^\varepsilon_n, T^\varepsilon_{n+1}]},$$

so gilt offenbar

$$\begin{aligned} P[(Y^{k,\varepsilon} - Y)^*_T > \varepsilon] &\leqslant P[(Y^{k,\varepsilon} - Y)^*_T > \varepsilon, T_{k+1} \geqslant T] + P[T_{k+1} < T] \\ &= 0 + P[T_{k+1} < T] \\ &\to 0, \qquad k \to \infty. \end{aligned}$$

Also gilt $Y^{k,\varepsilon} \xrightarrow{\text{ucp}} Y$ und alles ist gezeigt. ∎

Integrieren wir einen einfach vorhersagbaren Prozess H bezüglich einem Semimartingal X, so erhalten wir mit $I_X(H)$ eine feste Zufallsvariable und keinen Prozess. Die Analogie zum Riemann-Stieltjes-Integral ist, dass das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty f(s) \mathrm{d}g(s)$$

ebenfalls eine feste Zahl ergibt und nicht mehr von t abhängt. Im nächsten Schritt wollen wir ein stochastisches Integral definieren, welches als Ergebnis wieder einen Prozess liefert. Analog zum unbestimmten Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_0^t f(s) \mathrm{d}g(s),$$

welches eine von t abhängige Funktion ergibt.

2.8 **Definition und Satz** *Die Abbildung $J_X : \mathbb{S} \to \mathbb{D}$ sei definiert durch*

$$J_X(H) := H_0 X_0 + \sum_{i=1}^n H_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i}), \quad H \in \mathbb{S},$$

für einen adaptierten càdlàg Prozess X, wobei

$$H = H_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n H_i \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}$$

mit Zufallsvariablen $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ und Stoppzeiten $0 = T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_{n+1} < \infty$. Dann heißt $J_X(H)$ stochastisches Integral von H bezüglich X, kurz

$$J_X(H) = \int H_s \, \mathrm{d}X_s = H \bullet X. \quad ⋊$$

Beweis. Offenbar ist J_X wohldefiniert. Als Semimartingal ist X insbesondere càdlàg, dann ist aber auch X^{T_i} für jedes $i \geqslant 1$ càdlàg und folglich $J_X(H) \in \mathbb{D}$. ∎

Bemerkung. Sei $t \geqslant 0$ fest, so gilt

$$J_X(H)_t = I_{X^t}(H),$$

denn frieren wir X bei t ein, so sind alle Zuwächse zu Zeitpunkten nach t Null. Man kann I_X als bestimmtes und J_X als unbestimmtes Integral betrachten

$$I_X(H) = \int_0^\infty H_s \, \mathrm{d}X_s, \qquad J_X(H)_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s. \quad \multimap$$

Semimartingale sind „gute Integratoren“ für das Integral I_X, aber auch für das Integral J_X, wie der folgende Satz zeigt.

2.9 **Satz** *Für ein Semimartingal X ist die Abbildung*

$$J_X : \mathbb{S}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp} \text{ stetig.} \quad \rtimes$$

Beweis. Die ucp-Topologie beschreibt die gleichmäßige Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit auf kompakten Mengen. Somit können wir X als totales Semimartingal annehmen.

Stetigkeit auf $\mathbb{S}_u$. Sei $H^k \in \mathbb{S}$ eine Folge mit $H^k \to 0$ in $\mathbb{S}_u$, so ist zu zeigen, dass $J_X(H^k) \xrightarrow{\text{ucp}} 0$. Zu $\delta > 0$ definieren wir eine Stoppzeit

$$T^k := \inf\{t : (H^k \bullet X)_t > \delta\},$$

wobei die Stoppzeiteneigenschaft wieder aus Satz 1.3 folgt. Dann ist $H^k \mathbf{1}_{[0,T^k]} \in \mathbb{S}$ und konvergiert ebenfalls in $\mathbb{S}_u$ gegen Null. Fixieren wir ein $t > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} P[(H^k \bullet X)_t^* > \delta] &\leqslant P[|(H^k \bullet X)_{t \wedge T^k}| \geqslant \delta] \\ &= P[|(H^k \mathbf{1}_{[0,T^k]} \bullet X)_t| \geqslant \delta] \\ &= P[|I_{X^t}(H^k \mathbf{1}_{[0,T^k]})| \geqslant \delta] \to 0, \end{aligned}$$

denn X ist ein totales Semimartingal. Also ist $J_X : \mathbb{S}_u \to \mathbb{D}_{\text{ucp}}$ stetig.

Stetigkeit auf $\mathbb{S}_{ucp}$. Sei nun $H^k \in \mathbb{S}$ mit $H^k \xrightarrow{\text{ucp}} 0$. Wähle $\delta > 0$, $\eta > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig sowie ein $t > 0$. Wir definieren wieder eine Stoppzeit

$$R^k := \inf\{s : |H_s^k| > \eta\} = \inf\{s : |H_{s+}^k| > \eta\},$$

wobei wir rechts zu einer càdlàg Modifikation von H übergegangen sind. Somit ist R^k tatsächlich eine Stoppzeit. Setzen wir

$$\tilde{H}^k = H^k \mathbf{1}_{[0,R^k]} \mathbf{1}_{[R^k>0]},$$

so ist $\tilde{H}^k \in \mathbb{S}$ und $\|\tilde{H}^k\|_u \leqslant \eta$ für $k \geqslant 1$ aufgrund der Linksstetigkeit. Folglich gilt

$$\begin{aligned} P[(H^k \bullet X)_t^* > \delta] &\leqslant P[(\tilde{H}^k \bullet X)_t^* > \delta,\, t \leqslant R^k] + P[t > R^k] \\ &\leqslant P[(\tilde{H}^k \bullet X)_t^* > \delta] + P[(H^k)_t^* > \eta]. \end{aligned}$$

Da J_X stetig auf $\mathbb{S}_u$ ist, ist der erste Summand kleiner als $\varepsilon/2$ für alle $k \geqslant 1$, wenn wir η nur hinreichend klein wählen. Außerdem konvergiert $H^k \to 0$ in der ucp-Topologie, daher wird auch der zweite Summand kleiner als $\varepsilon/2$ für k hinreichend groß. Insgesamt gilt also für jedes feste $\delta > 0$

$$P[(H^k \bullet X)_t^* > \delta] \to 0, \qquad k \to \infty,$$

also ist J_X stetig auf $\mathbb{S}_{\mathrm{ucp}}$. ∎

Die Aussagen dieses Abschnittes lassen sich nun wie folgt zusammenfassen:

(a) $J_X : \mathbb{S}_{\mathrm{ucp}} \to \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}$ ist linear und stetig,

(b) $\mathbb{S}_{\mathrm{ucp}}$ ist dicht in $\mathbb{L}_{\mathrm{ucp}}$, und

(c) $\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}$ ist vollständig.

Somit können wir den Standard-Fortsetzungssatz [10, Satz II.1.5] aus der Funktionalanalysis anwenden, um ein stochastisches Integral für càglàd Integranden zu definieren.

2.6 **Definition** *Sei X ein Semimartingal. Die aus*

$$J_X : \mathbb{S}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp},$$

fortgesetzte, stetige lineare Abbildung

$$J_X : \mathbb{L}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp},$$

heißt stochastisches Integral. ⋊

Insbesondere ist das durch den Fortsetzungsprozess erhaltene stochastische Integral wieder stetig in der ucp-Topologie, so dass wir über einen Integralkonvergenzsatz verfügen.

BEISPIEL 2 Sei A ein stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden von endlicher Variation auf kompakten Mengen, und $A_0 = 0$. So ist A nach Satz 2.4 ein Semimartingal und offenbar càglàd. Nach Aufgabe 3.8 existiert pfadweise das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_0^t A_s \, \mathrm{d}A_s = \frac{1}{2} A_t^2.$$

Andererseits existiert auch das stochastische Integral $J_A(A)$ und wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass

$$J_A(A)_t = \int_0^t A_s \mathrm{d}A_s = \frac{1}{2} A_t^2. \quad \blacksquare$$

BEISPIEL 3 Sei $B = (B_t)$ eine Standard-Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$. Ferner sei π_n eine monotone Folge von Partitionen von $[0, \infty)$ mit $|\pi_n| \to 0$. Notwendigerweise haben diese Partitionierungen unendlich viele Gitterpunkte. Setzen wir

$$B_t^n := \sum_{t_k \in \pi_n} B_{t_k} \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$

so ist $B_t^n \in \mathbb{L}$. Fixieren wir ein $T > 0$, so ist B_t auf $[0, T]$ gleichmäßig stetig und daher gilt $(B^n - B)_T^* \to 0$ f.s. für $n \to \infty$. Insbesondere gilt also $B_t^n \xrightarrow{\text{ucp}} B_t$, und es existiert

$$J_B(B)_T = \lim_{n \to \infty} J_B(B^n)_T$$

im Sinne der Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit. Um diesen Limes exakt zu berechnen betrachten wir

$$\begin{aligned}
J_B(B^n)_T &= \sum_{\substack{t_k \in \pi_n \\ t_{k+1} \leqslant T}} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_k \in \pi_n \\ t_{k+1} \leqslant T}} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_k \in \pi_n \\ t_{k+1} \leqslant T}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(B_{t_k^*}^2 - B_0^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_k \in \pi_n \\ t_{k+1} \leqslant T}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \\
&\xrightarrow{\text{f.s.} \,\&\, L^2} \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T,
\end{aligned}$$

denn die quadratische Variation konvergiert nach Satz 1.26 f.s. und in L^2 gegen T und aufgrund der Stetigkeit der Brownschen Bewegung gilt $B_{t_k^*} \to B_T$.

Somit können wir das stochastische Integral explizit angegeben

$$\int_0^t B_t \mathrm{d}B_t = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Sehen wir davon ab, dass die Partitionierungen monoton fallen, so ist die f.s. Konvergenz nicht mehr gesichert, und das Integral existiert lediglich im L^2-Sinn. ■

Bemerkung. Die Wahl der Stützstelle, an der der Integrand ausgewertet wird, beeinflusst erheblich den resultierenden Integrationsbegriff. In unserer Definition

$$I_X(H) = H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})$$

fordern wir, dass alle H_i auch $\mathcal{F}_{T_i}$-messbar sind, d.h. dass die Integranden lediglich auf die zum momentanen Zeitpunkt verfügbare Information zurückgreifen. In Beispiel 3 entspricht dies der Auswertung von B_t an der linken Intervallgrenze von $[t_k, t_{k+1}]$.

Es existieren auch andere Integrationsbegriffe, welche der Auswertung von B_t an einem anderen Punkt in $[t_k, t_{k+1}]$ entsprechen, und die von dem hier vorgestellten verschieden sind. Der Vorteil unserer Definition besteht darin, dass ein stochastisches Integral mit einem lokalen Martingal als Integrator selbst wieder ein lokales Martingal ist. Somit sind sowohl die Semimartingale als auch die lokalen Martingale abgeschlossen unter dem so definierten Integral. ⊸

2-D Eigenschaften stochastischer Integrale

In diesem Abschnitt präsentieren wir einige grundlegende Eigenschaften stochastischer Integrale, welche man auch intuitiv durch den Vergleich mit dem Riemann-Stieltjes-Integral erwartet.

2.10 **Satz** *Seien T eine Stoppzeit, $H \in \mathbb{L}$ und X ein Semimartingal. Dann gilt*

$$(H \bullet X)^T = (H\mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet X = H \bullet (X^T). \quad \rtimes$$

Beweis. Sei H einfach vorhersagbar und ohne Einschränkung $X_0 = 0$, so gilt

$$(H \bullet X)^T = \sum_{i=1}^{n} H_i(X^{T_{i+1}\wedge T} - X^{T_i \wedge T}),$$

und beide Identitäten sind offensichtlich. Sei nun $H \in \mathbb{L}$ mit $H^k \xrightarrow{\text{ucp}} H$, so gilt für jedes $k \geqslant 1$

$$(H^k \bullet X)^T = (H^k \mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet X = H^k \bullet (X^T),$$

also gelten die Identitäten auch für den ucp-Limes. Da mit X auch X^T ein Semimartingal ist, konvergieren der zweite und der dritte Term gegen $(H\mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet X$ respektive $H \bullet (X^T)$, und da für jedes $t > 0$

$$|(H \bullet X - H^k \bullet X)_t^T| \leqslant (H \bullet X - H^k \bullet X)_t^*,$$

konvergiert auch der erste Term in der ucp-Topologie gegen $(H \bullet X)^T$. ∎

Ändern wir eine integrierbare Funktion f an abzählbar vielen Punkten ab, so ändert sich der Wert ihres Integrals

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x$$

nicht. Im Falle von Riemann-Stieltjes-Integralen ist dies nur dann noch richtig, wenn der Integrator - oder besser gesagt die maßdefinierende Verteilungsfunktion - keine Sprünge macht, wie man sich sofort anhand des Erwartungswertes einer diskreten Zufallsvariable klar macht.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich dies im Kontext des stochastischen Integrals verhält. Zu einem stochastischen Prozess X bezeichnen wir dazu den linksseitigen Grenzwert zum Zeitpunkt t mit X_{t-}, und definieren die linksstetige Modifikation als $(X_-)_t \coloneqq X_{t-}$, wobei vereinbarungsgemäß stets $X_{0-} = 0$ gesetzt wird.

Definition *Ist X ein càdlàg Prozess, so ist der Sprungprozess ΔX durch*

$$\Delta_t \coloneqq X_t - X_{t-}$$

definiert. ⋊

2.11 **Satz** *Der Sprungprozess $\Delta(H \bullet X)_s$ ist ununterscheidbar von $H_s(\Delta X_s)$.* ⋊

Beweis. Sei zunächst $H \in \mathbb{S}$, so ist das stochastische Integral bezüglich X gegeben durch

$$H \bullet X = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i}),$$

und aufgrund der Linearität folgt sofort, dass $\Delta(H \bullet X)_t = H_t \, \Delta X_t$.

Sei nun $H \in \mathbb{L}$ und $H^k \in \mathbb{S}$ mit $H^k \xrightarrow{\text{ucp}} H$, so gilt

$$\Delta(H^k \bullet X)_t = H_t^k(\Delta X_t)$$

für alle $t \geqslant 0$ und alle $k \geqslant 1$. Fixieren wir ein $t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, so existiert eine fast sicher konvergente Teilfolge von $(H^k \bullet X)_t$, so dass bis auf eine Nullmenge gilt

$$\Delta(H \bullet X)_t = \lim_{l \to \infty} \Delta(H^{k_l} \bullet X)_t = \lim_{l \to \infty} H_t^k(\Delta X_t) = H(\Delta X_t). \tag{*}$$

Nun ist $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ abzählbar, also gilt (*) bis auf einer Nullmenge für alle rationalen $t \geqslant 0$. Aber $H \bullet X$ ist ein càdlàg-Prozess und folglich gilt (*) f.s. für alle $t \geqslant 0$. ∎

Als nächstes wollen wir zeigen, dass das stochastische Integral für FV Integratoren mit dem Lebesgue-Stieltjes-Integral übereinstimmt, und somit insbesondere eine Verallgemeinerung des Maßintegrals darstellt.

2.12 **Satz** *Besitzt das Semimartingal X Pfade von beschränkter Variation auf kompakten Mengen, so ist $H \bullet X$ ununterscheidbar vom pfadweise konstruierten Lebesgue-Stieltjes-Integral.*

Beweis. Die Behauptung gilt für Indikatorfunktionen und damit aufgrund der Linearität des Integrals für alle $H \in \mathbb{S}$. Sei nun $H \in \mathbb{L}$ mit $H^k \xrightarrow{\text{ucp}} H$ für $H^k \in \mathbb{S}$. Wählen wir ein festes $t > 0$, so existiert aufgrund der ucp-Konvergenz auch eine Teilfolge H^{n_k} mit

$$(H^{n_k} - H)_t^* \to 0 \text{ f.s.}$$

und daher gilt pfadweise

$$\int_0^t H_s^{n_k} \, \mathrm{d}X_s \to \int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s,$$

aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz. Somit erhalten wir

$$(H \bullet X)_t = \operatorname*{P-lim}_{k \to \infty} (H^{n_k} \bullet X)_t = \operatorname*{P-lim}_{k \to \infty} \int_0^t H_s^{n_k} \, \mathrm{d}X_s = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s,$$

denn die fast sichere Konvergenz der Integrale impliziert die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit. ∎

2.13 **Satz** *Seien $H \in \mathbb{L}$ und X ein Semimartingal. Dann ist $Y = H \bullet X$ wieder ein Semimartingal und es gilt*

$$G \bullet Y = G \bullet (H \bullet X) = (GH) \bullet X, \qquad G \in \mathbb{L}. \quad \rtimes$$

Beweis. Sei X ein Semimartingal und $G, H \in \mathbb{S}$. Durch eine eventuelle Verfeinerung können davon ausgehen, dass

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]},$$

mit denselben Stoppzeiten T_i. Setzen wir $Y = H \bullet X$, so ist $Y \in \mathbb{D}$ und es gilt $Y^{T_{i+1}} - Y^{T_i} = H_i(X^{T_{i+1}} - X^{T_i})$, denn $Y^{T_{i+1}}$ umfasst genau einen Summanden mehr als Y^{T_i}. Somit gilt

$$G \bullet Y = \sum_{i=1}^{n} G_i (Y^{T_{i+1}} - Y^{T_i}) = \sum_{i=1}^{n} G_i H_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i}) = (GH) \bullet X. \tag{*}$$

Können wir zeigen, dass Y ein Semimartingal, so gilt (*) für alle $G, H \in \mathbb{L}$.

Offenbar ist $Y = H \bullet X$ für alle $H \in \mathbb{S}$ ein Semimartingal. Wir betrachten nun eine Folge $H^k \xrightarrow{\text{ucp}} H \in \mathbb{L}$ mit $H^k \in \mathbb{S}$. Aus der Stetigkeit des stochastischen Integrals folgt $H^k \bullet X \xrightarrow{\text{ucp}} H \bullet X$, und es existiert eine Teilfolge H^{n_k}, so dass $H_t^{n_k} \bullet \xrightarrow{\text{f.s.}} H_t \bullet X$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Nun wählen wir aus dieser Teilfolge wiederum eine Teilfolge, so dass die Konvergenz fast sicher auf $[0,2]$ gilt, und aus dieser Teil-Teilfolge wählen wir nochmals eine Teilfolge, so dass die Konvergenz fast sicher auf $[0,3]$ gilt usw. . . Damit konstruieren wir eine Diagonalfolge, welche wir wiederum mit n_k bezeichnen, und für die gilt

$$H_t^{n_k} \bullet X \to H_t \bullet X \text{ f.s.}, \qquad t \geqslant 0.$$

Setzen wir $Y^k = H^{n_k} \bullet X$, so ist jedes Y^k ein Semimartingal und für $G \in \mathbb{S}$ folgt mit (*),

$$G \bullet Y = \lim_{k \to \infty} G \bullet Y^k = \lim_{k \to \infty} (G \cdot H^{n_k}) \bullet X.$$

Der Limes auf der rechten Seite existiert und da $G \cdot H^{n_k} \xrightarrow{\text{ucp}} G \cdot H$ stimmt er mit $(G \cdot H) \bullet X$ überein. Es gilt also $G \bullet Y = (G \cdot H) \bullet X$ f.s. für jedes $G \in \mathbb{S}$ und $H \in \mathbb{L}$. Sei nun $G^l \xrightarrow{\text{ucp}} G \in \mathbb{L}$ mit $G^l \in \mathbb{S}$, so gilt für festes $t \geqslant 0$

$$\operatorname*{P\text{-}lim}_{l \to \infty} (G^l \bullet Y)_t = \operatorname*{P\text{-}lim}_{l \to \infty} ((G^l \cdot H) \bullet X)_t = ((G \cdot H) \bullet X)_t,$$

denn der rechte Limes existiert. Ein erneuter Übergang zu Teilfolgen ergibt, dass $\text{P-lim}_{l\to\infty}(G^l \bullet Y)_t = (G \bullet Y)_t$. Somit ist Y^t ein totales Semimartingal und alles ist gezeigt. ∎

Der Beweis zeigt im Besonderen, dass die Semimartingaleigenschaft stabil unter stochastischer Integration ist. Die Klasse der Semimartingale ist aber nicht die kleinste Klasse stochastischer Prozesse, die darunter stabil ist, wie folgender Satz zeigt.

2.14 **Satz** *Sei X ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal und $H \in \mathbb{L}$. Dann ist auch $H \bullet X$ ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal.* ⋊

Beweis. Übungsaufgabe 4.1. ∎

2.7 **Definition**
1. *Sei σ eine endliche Folge von Stoppzeiten mit $0 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_k < \infty$, so heißt σ zufällige Partition.*
2. *Man sagt, dass eine Folge (σ_n) von zufälligen Partitionen gegen die Identität konvergiert, falls*
   - *(i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 0} T_k^n = \infty$ *f.s., und*
   - *(ii)* $|\sigma_n| = \sup_{k\geqslant 0}|T_{k+1}^n - T_k^n| \to 0$ *f.s..* ⋊
3. *Ist Y ein beliebiger stochastischer Prozess, so ist der stückweise konstante Prozess Y^σ entlang der zufälligen Partition σ definiert durch*

$$Y^\sigma \coloneqq Y_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n Y_{T_i} \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}. \quad ⋊$$

Bemerkung. Für einen beliebigen stochastischen Prozess Y und σ eine zufällige Partition ist $Y^\sigma \in \mathbb{S}$ und damit insbesondere càglàd. ⊸

2.15 **Satz** *Seien X ein Semimartingal, $Y \in \mathbb{D}$ oder $Y \in \mathbb{L}$, und (σ_n) eine Folge zufälliger Partitionen, die gegen die Identität konvergiert. Dann gilt*

$$\int_{0+}^t Y_s^{\sigma_n}\,\mathrm{d}X_s = \sum_{i=1}^n Y_{T_i^n}\left(X_t^{T_{i+1}^n} - X_t^{T_i^n}\right) \xrightarrow{ucp} Y_- \bullet X, \qquad n \to \infty. \quad ⋊$$

Der Übergang zur linksstetigen Version Y_- spielt nur dann eine Rolle, wenn der Integrator X Sprünge an den Unstetigkeitsstellen von Y macht.

Beweis. Mit Y_- bezeichnen wir die linksstetige Version von Y, d.h. $(Y_-)_s = Y_{s-}$ und $Y_{0-} = 0$. Sofern $Y \in \mathbb{L}$ folgt die Aussage des Satzes aus der Stetigkeit des stochastischen Integrals und es ist nichts zu zeigen.

Nehmen wir also $Y \in \mathbb{D}$ an, sowie ohne Einschränkung $X_0 = 0$. Wähle nun eine Folge $Y^k \xrightarrow{\text{ucp}} Y$ mit $Y^k \in \mathbb{S}$, sowie ein kompaktes Intervall $[0,t]$ und ein $k \geqslant 1$ fest. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}&\int (Y_- - Y^{\sigma_n})_s \,\mathrm{d}X_s\\ &\quad = \underbrace{\int (Y_- - Y^k)_s \,\mathrm{d}X_s}_{(1)} + \underbrace{\int (Y^k - (Y^k_+)^{\sigma_n})_s \,\mathrm{d}X_s}_{(2)} + \underbrace{\int (Y^k_+ - Y)^{\sigma_n}_s \,\mathrm{d}X_s}_{(3)},\end{aligned}$$

wobei Y^k_+ die rechtsstetige Version von Y^k bezeichne.

Nach unserer Wahl von Y^k konvergiert (1) in ucp gegen Null für $k \to \infty$ und unabhängig von n.

Das Integral in (2) ist gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} (Y^k_{T^n_i} - (Y^k_+)^{\sigma_n}_{T^n_i})(X^{T^n_{i+1}} - X^{T^n_i}),$$

und da für festes $k \geqslant 1$ jeder Pfad von Y^k höchstens endlich viele Unstetigkkeitsstellen hat, gibt es höchstens endlich viele i mit $Y^k_i - (Y^k_+)^{\sigma_n}_i \neq 0$ für alle n. Aufgrund der càdlàg-Eigenschaft von X konvergiert $X^{T^n_{i+1}} - X^{T^n_i}$ f.s. gegen Null für $n \to \infty$, und damit auch (2) in ucp.

Weiterhin ist der Integrand in (3) einfach vorhersagbar und konvergiert unabhängig von n in ucp gegen Null für $k \to \infty$.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir also zunächst ein festes $k \geqslant 1$ so, dass (1) und (3) jeweils $\leqslant \varepsilon/3$ sind. Anschließend wählen wir n so groß, dass auch (2)$\leqslant \varepsilon/3$. Somit ist die Behauptung gezeigt. ∎

2-E Die quadratische Variation von Semimartingalen

Bei unserer Untersuchung der Brownschen Bewegung haben wir festgestellt, dass diese einerseits von unbeschränkter Totalvariation auf jedem kompakten Intervall ist, andererseits aber ihre *quadratische* Variation auf jedem kompakten Zeitintervall fast sicher endlich ist.

In diesem Abschnitt definieren wir die quadratische Variation ganz allgemein für Semimartingale. Dieses Objekt spielt eine zentrale Rolle bei der Entwicklung unserers Integrationskalküls.

2.8 **Definition** *Seien X und Y zwei Semimartingale. Der quadratische Variationsprozess $[X,X] = ([X,X]_t)_{t\geqslant 0}$ von X ist definiert durch*

$$[X,X] \coloneqq X^2 - 2\int X_- \,\mathrm{d}X, \qquad \textit{mit } X_{0-} = 0.$$

Die quadratische Kovariation von X und Y ist gegeben durch

$$[X,Y] \coloneqq XY - \int X_- \,\mathrm{d}Y - \int Y_- \,\mathrm{d}X, \qquad \textit{mit } X_{0-} = 0 \textit{ und } Y_{0-} = 0. \quad \rtimes$$

Die Abbildung $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ ist bilinear und symmetrisch, folglich gilt für sie folgende Polarisations-Identität

$$[X,Y] = \frac{1}{2}([X+Y,X+Y] - [X,X] - [Y,Y]).$$

Diese Identität erlaubt es uns in vielen Fällen, anstatt der quadratischen Kovariation lediglich die quadratische Variation zu betrachten. Letztere involviert lediglich einen Prozess anstatt von zweien, und ist daher eventuell leichter zu handhaben.

2.16 **Satz** *Der quadratische Variationsprozess eines Semimartingals X ist ein wachsender adaptierter Prozess mit càdlàg Pfaden und folgenden Eigenschaften:*

a) $[X,X]_0 = X_0^2$, *und* $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$.

b) Für jede Folge (σ_n) von zufälligen Partitionen, welche gegen die Identität konvergieren, gilt

$$X_0^2 + \sum_{i\geqslant 0} (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \xrightarrow{ucp} [X,X], \qquad n \to \infty,$$

wobei für die beteiligten Stoppzeiten $0 = T_0^n \leqslant T_1^n \leqslant \ldots \leqslant T_{k_n}^n$ gilt.

c) Ist T eine Stoppzeit, dann gilt

$$[X^T, X] = [X, X^T] = [X^T, X^T] = [X,X]^T. \quad \rtimes$$

Beweis. a): Nach Voraussetzung ist X ein Semimartingal, also ist auch $\int X_- \,\mathrm{d}X$ nach Satz 2.13 ein Semimartingal und damit insbesondere adaptiert und càdlàg. Also ist auch $[X,X]$ adaptiert und càdlàg.

Die Identität $[X,X]_0 = X_0^2$ ist klar nach Definition. Weiterhin ist

$$(\Delta X)_s^2 = (X_s - X_{s-})^2 = X_s^2 - X_{s-}^2 - 2X_{s-}(X_s - X_{s-}) = (\Delta X^2)_s - 2X_{s-}(\Delta X)_s,$$

sowie $\Delta(X_- \bullet X) = X_-(\Delta X)$ nach Satz 2.11. Zusammengefasst gilt also

$$\Delta[X,X] = \Delta(X^2) - 2\Delta(X_- \bullet X) = (\Delta X)^2.$$

b): Ohne Einschränkung ist $X_0 = 0$, andernfalls ersetzen wir X durch $X - X_0$. Setze $R_n = \sup_{i \geqslant 0} T_i^n$, so ist R_n f.s. endlich und $R_n \uparrow \infty$ f.s.. Mit einer Teleskopsumme erhalten wir so

$$(X^2)^{R_n} = \sum_{i \geqslant 0} \left((X^2)^{T_{i+1}^n} - (X^2)^{T_i^n} \right) \xrightarrow{\text{ucp}} X^2.$$

Weiterhin gilt nach Satz 2.15

$$\sum_{i \geqslant 0} X_{T_i}^n (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n}) \xrightarrow{\text{ucp}} \int X_- \, \mathrm{d}X.$$

Mit der üblichen Zerlegung $(b-a)^2 = b^2 - a^2 - 2a(b-a)$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant 0} (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 &= \sum_{i \geqslant 0} \left((X^2)^{T_{i+1}} - (X^2)^{T_i} \right) - 2 \sum_{i \geqslant 0} X_{T_i}^n (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n}) \\ &\xrightarrow{\text{ucp}} X^2 - 2 \int X_- \, \mathrm{d}X.\end{aligned}$$

Insbesondere ist die linke Seite ein wachsender Prozess und somit auch $[X,X]$.

c): $[X^T, X] = [X, X^T]$ folgt aus der Symmetrie, und aus Satz 2.10 folgt, dass für beliebige Semimartingale X und $Y \in \mathbb{L}$ gilt $Y \bullet X^T = Y^T \bullet X^T$, so dass

$$[X,X]^T = (X^2)^T - 2(X_- \bullet X)^T = (X^T)^2 - 2X_- \bullet X^T = [X^T, X^T].$$

Schließlich betrachten wir für $t > 0$

$$\begin{aligned}&[X^T, X]_t - [X^T, X^T]_t \\ &\quad = [X^T, X - X^T] \mathbf{1}_{[t > T]} \\ &\quad = \mathbf{1}_{[t>T]} \left(X_T (X_t - X_T) - \int_0^t X_{s-}^T \mathrm{d}(X - X^T)_s - \int_0^t (X - X^T)_{s-} \, \mathrm{d}X_s^T \right) \\ &\quad = \mathbf{1}_{[t>T]} \left(X_T (X_t - X_T) - \int_0^t X_{s-}^T \mathrm{d}X_s - \int_0^t X_{s-} \, \mathrm{d}X_s^T \right) \\ &\quad = \mathbf{1}_{[t>T]} \left(X_T (X_t - X_T) - X_T \int_T^t 1 \, \mathrm{d}X_s \right) \\ &\quad = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkungen. A. Betrachten wir eine Standard-Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$, so ist diese nach Korollar 2.3 ein Semimartingal, und

$$[B,B]_t = B_t^2 - 2\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$

ist wohldefiniert. Nach der Rechnung in Beispiel 2 ist

$$B_t^2 - 2\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = B_t^2 - 2\left(\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\right) = t.$$

Andererseits ist $[B,B]_t = t$ f.s. nach Satz 1.26. Somit sind die in Kapitel 1 definierte und die soeben definierte quadratische Variation konsistent. Allerdings folgt aus Satz 2.16 b) die Konvergenz der Summen lediglich im ucp-Sinn, während wir in Satz 1.26 fast sichere und L^2-Konvergenz gezeigt haben.

B. Die Berechnung der quadratischen Variation mittels der Approximation durch geeignete Summen ist mühsam. Sobald wir jedoch unseren Integrationskalkül vollständig entwickelt haben, können wir die quadratische Variation oftmals leichter berechnen.

C. Die Identitäten von Satz 2.16 c) gelten auch für die quadratische Kovariation. Seien dazu X, Y Semimartingale und T eine Stoppzeit. Zunächst folgt

$$[X,Y]^T = [X^T, Y^T]$$

direkt aus der Polarisationsformel, und weiterhin ist

$$\begin{aligned}[X,Y^T] - [X^T,Y^T] &= (X - X^T)Y^T - \int Y^T \,\mathrm{d}X - \int Y^T \,\mathrm{d}X^T \\ &= (X - X^T)Y^T - \int Y^T \mathrm{d}(X - X^T).\end{aligned}$$

Mit dem selben Argument wie in Beweis von c) folgt, dass letzterer Term verschwindet. ⊸

Nach Satz 2.16 ist $[X,X]$ ein nichtfallender Prozess mit rechtsstetigen Pfaden, und $\Delta[X,X]_t = \Delta_t^2$ gilt für alle $t \geqslant 0$, wobei $X_{0-} \coloneqq 0$ gesetzt wird. Damit kann $[X,X]$ pfadweise in einen stetigen Anteil und einen reinen Sprunganteil aufgespalten werden:

2.9 **Definition** *Für ein Semimartingal X ist der pfadweise stetige Anteil $[X,X]^c$ von $[X,X]$ durch*

$$[X,X]_t = [X,X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0<s\leqslant t} (\Delta X_s)^2$$
$$= [X,X]_t^c + \sum_{0\leqslant s\leqslant t} (\Delta X_s)^2$$

wohldefiniert. Ist $[X,X]^c = 0$, so heißt X quadratisch reiner Sprungprozess. ⋊

2.5 **Korollar** *Sind X und Y zwei Semimartingale, dann besitzt $[X,Y]$ Pfade von endlicher Variation auf kompakten Mengen, also ist auch $[X,Y]$ ein Semimartingal.* ⋊

Beweis. Übungsaufgabe 4.2. ∎

2.6 **Partielle Integration** *Sind X und Y zwei Semimartingale, dann ist auch XY ein Semimartingal und*

$$XY = \int X_- \, dY + \int Y_- \, dX + [X,Y]. \quad ⋊$$

Beweis. Übungsaufgabe 4.3. ∎

2.17 **Satz** *Sei X ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Sind die Pfade von X nicht konstant, so gilt*

a) $[X,X]$ *ist vom konstanten Prozess* X_0^2 *verschieden, und*

b) $X^2 - [X,X]$ *ist ein stetiges lokales Martingal.*

Gilt dagegen $[X,X]_t \equiv 0$ für alle $t \geqslant 0$, dann ist auch $X_t \equiv 0$ für alle $t \geqslant 0$. ⋊

Grob gesprochen gibt es also keine interessanten stetigen lokalen Martingale mit endlicher Totalvariation. Jedes nichttriviale stetige lokale Martingal ist automatisch hochgradig irregulär. Die Stetigkeit ist dabei eine entscheidende Voraussetzung, wie man sich beispielsweise am Poisson-Prozess klar macht.

Beweis. Nach Korollar 2.2 ist jedes stetige lokale Martingal auch ein Semimartingal und

$$[X,X] - X^2 = 2X_- \bullet X = 2X \bullet X.$$

Ohne Einschränkung ist $X_0 = 0$, andernfalls ersetzen wir X durch $X - X_0$. Somit ist X lokal quadratintegrierbar und folglich ist auch $2X \bullet X = [X,X] - X^2$ ein stetiges lokal quadratintegrierbares lokales Martingal (nach Übungsaufgabe 4.1). Angenommen $[X,X]$ wäre konstant, dann gilt für $t \geqslant 0$

$$[X,X]_t = [X,X]_0 = X_0^2 = 0$$

und folglich ist $X^2 = 2X \bullet X$ ebenfalls ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal. Aus der Martingaleigenschaft folgt dann $\mathbf{E}X_t^2 = \mathbf{E}X_0^2 = 0$ und da $X_t^2 \geqslant 0$ ist somit $X_t \equiv 0$. Dies widerspricht jedoch unserer Voraussetzung, dass X keine konstanten Pfade besitzt. ∎

Die quadratische Variation liefert ein weiteres Kriterium, wann ein lokales Martingal sogar ein Martingal ist. Allerdings ist auch dieses Kriterium in den Anwendungen oft nicht erfüllt.

2.18 **Satz** *Sei M ein lokales Martingal. Genau dann ist M ein Martingal mit $\mathbf{E}M_t^2 < \infty$ für alle $t \geqslant 0$, wenn $\mathbf{E}[M,M]_t < \infty$ für alle $t \geqslant 0$. In diesem Fall gilt $\mathbf{E}M_t^2 = \mathbf{E}[M,M]_t$ für alle $t \geqslant 0$.* ⋊

Beweis. $\Rightarrow$: Sei M ein Martingal mit $\mathbf{E}M_t^2 < \infty$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist M insbesondere lokal quadratintegrierbar. Setzen wir

$$N_t := M_t^2 - [M,M]_t = 2\int_0^t M_{s-}\,\mathrm{d}M_s,$$

so ist auch N_t ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal. Es existieren daher Stoppzeiten T_n, so dass $\mathbf{E}N_t^{T_n} = \mathbf{E}N_0 = 0$ und folglich

$$\mathbf{E}(M_t^2)^{T_n} = \mathbf{E}[M,M]_t^{T_n}.$$

Mit der Ungleichung von Doob folgt weiterhin für M,

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|^2\right) \leqslant 4\mathbf{E}|M_t|^2 < \infty$$

Somit ist $(M_t^*) \geqslant M_{t\wedge T_n}^2$ eine integrierbare Majorante, so dass

$$\mathbf{E}M_t^2 = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}M_{t\wedge T_n}^2 = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[M,M]_{t\wedge N} = \mathbf{E}[M,M]_t < \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt Erwartungswert und Limes mit dem Satz von der monotonen Konvergenz vertauscht haben, denn $[M,M]$ ist wachsend.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathbf{E}[M,M]_t < \infty$ für alle $t \geqslant 0$. Definieren wir

$$T_n \coloneqq \inf\{t > 0 : |M_t| > n\} \wedge n,$$

so ist T_n eine Stoppzeit, da M càdlàg, und es gilt $T_n \uparrow \infty$ f.s.. Weiterhin ist

$$(M^{T_n})_t^* \leqslant n + |\Delta M_{T_n}| = n + [M,M]_{T_n}^{1/2} \leqslant n + [M,M]_n^{1/2},$$

denn $T_n \leqslant n$ und $[M,M]$ ist wachsend. Nach Voraussetzung ist $\mathbf{E}[M,M]_n$ endlich, also ist $n + [M,M]_n^{1/2}$ quadratintegrierbar. Nun ist M^{T_n} ein lokales Martingal, dessen Supremumsprozess eine quadratintegrierbare Majorante besitzt. Nach Satz 1.32 ist M^{T_n} daher ein gleichgradig integrierbares Martingal. Außerdem erfüllt M^{T_n}

$$\mathbf{E}(M_t^{T_n})^2 \leqslant \mathbf{E}((M^{T_n})_t^*)^2 < \infty, \qquad t \geqslant 0,$$

so dass wir „⇒“ anwenden können, und erhalten

$$\mathbf{E}(M^{T_n})^2 = \mathbf{E}[M^{T_n}, M^{T_n}] = \mathbf{E}[M,M]^{T_n}.$$

Mittels der Ungleichung von Doob bekommen wir nun folgende bessere Abschätzung für den Supremumsprozess

$$\mathbf{E}((M^{T_n})_t^*)^2 \leqslant 4\mathbf{E}(M_{t\wedge T_n}^2) = 4\mathbf{E}[M,M]_t^{T_n}, \qquad t \geqslant 0.$$

Ferner gilt $M_{t\wedge T_n}^* \uparrow M_t^*$ und $[M,M]_{t\wedge T_n} \uparrow [M,M]_t$ für $n \to \infty$, so dass mit monotoner Konvergenz folgt

$$\mathbf{E}(M_t^*)^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(M_{t\wedge T_n}^*)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} 4\mathbf{E}[M,M]_t^{T_n} = 4\mathbf{E}[M,M]_t < \infty.$$

Für festes $t \geqslant 0$ ist also sogar der Supremumsprozess von M L^2-beschränkt, und eine erneute Anwendung von Satz 1.32 ergibt, dass M ein Martingal ist. Weiterhin ist für festes $t \geqslant 0$

$$\mathbf{E}M_t^2 \leqslant \sup_{t' \leqslant t} \mathbf{E}M_{t'}^2 \leqslant \mathbf{E}(M_t^*)^2 \leqslant 4\mathbf{E}[M,M]_t < \infty,$$

und alles ist gezeigt. ∎

2.19 **Satz** *Sind X und Y zwei Semimartingale und $H, K \in \mathbb{L}$, dann gilt*

$$[H \bullet X, K \bullet Y]_t = \int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}[X,Y]_s. \quad \rtimes$$

Beweis. Ohne Einschränkung ist $X_0 = Y_0 = 0$. Wir zeigen zunächst den Spezialfall, dass

$$[H \bullet X, Y]_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}[X,Y]_s. \tag{*}$$

Der allgemeine Fall folgt dann mittels der Symmetrie der quadratischen Variation und der Assoziativtiät der stochastischen Integration aus der Rechnung

$$[H \bullet X, K \bullet Y] = H \bullet [X, K \bullet Y] = H \bullet (K \bullet [X,Y]) = (HK) \bullet [X,Y].$$

Wir zeigen (*) zunächst für $H = \mathbf{1}_{(0,T]}$ mit einer Stoppzeit T. Es folgt mit Satz 2.10

$$[H \bullet X, Y] = [\mathbf{1}_{(0,T]} \bullet X, Y] = [X^T, Y] = [X,Y]^T = \mathbf{1}_{(0,T]} \bullet [X,Y] = H \bullet [X,Y].$$

Sei nun $H = U\mathbf{1}_{(S,T]}$ mit Stoppzeiten $S \leqslant T$ und $U \in \mathcal{F}_S$, so erhalten wir (*) durch

$$\begin{aligned}[H \bullet X, Y] &= [U(\mathbf{1}_{(S,T]} \bullet X), Y] = [U(X^T - X^S), Y] = U([X^T, Y] - [X^S, Y]) \\ &= U([X,Y]^T - [X,Y]^S) = U(\mathbf{1}_{(S,T]} \bullet [X,Y]) = H \bullet [X,Y].\end{aligned}$$

Aus der Linearität des stochastischen Integrals ergibt sich (*) für beliebiges $H \in \mathbb{S}$. Gilt nun $H^n \xrightarrow{\text{ucp}} H \in \mathbb{L}$ mit $H^n \in \mathbb{S}$, so haben wir einerseits

$$[H^n \bullet X, Y] = H^n \bullet [X,Y] \xrightarrow{\text{ucp}} H \bullet [X,Y],$$

denn $[X,Y]$ ist ein Semimartingal, und andererseits

$$\begin{aligned}[H^n \bullet X, Y] &= (H^n \bullet X)Y - (H^n \bullet X)_- \bullet Y - Y_- \bullet (H^n \bullet X) \\ &= (H^n \bullet X)Y - (H^n \bullet X)_- \bullet Y - (Y_- H^n) \bullet X \\ &\xrightarrow{\text{ucp}} (H \bullet X)Y - (H \bullet X)_- \bullet Y - (YH) \bullet X = [H \bullet X, Y],\end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit und Assoziativität des stochastischen Integrals. ∎

2.20 **Satz** *Seien H ein adaptierter Prozess mit càdlàg Pfaden und X, Y zwei Semimartingale. Ferner sei (σ_n) eine Folge von zufälligen Partitionen, die gegen die Identität konvergiert. Dann gilt*

$$\sum_i H_{T_i^n} (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})(Y^{T_{i+1}^n} - Y^{T_i^n}) \xrightarrow{ucp} \int H_{s-} \, d[X,Y]_s,$$

wobei wieder $H_{0-} = 0$ und für die zufällige Partition $\sigma_n = (0 = T_0^n \leqslant T_1^n \leqslant \ldots \leqslant T_{k_n}^n)$ gelte. ⋊

Beweis. Analog zu Satz 2.15.

2-F Die Itô-Formel

Wir sind nun in der Position, die Itô-Formel zu beweisen. Diese stellt eine natürliche Verallgemeinerung des „Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung" aus der Analysis auf stochastische Integrale dar. Sie hat weitreichende Anwendungen und ist fundamental für die Finanzmathematik.

2.21 **Itô-Formel** *Seien X ein Semimartingal und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion (kurz $f \in C^2$). Dann ist auch $f(X)$ ein Semimartingal und es gilt*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^{t} f'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X,X]_s^c + \sum_{0<s\leqslant t}\left(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\right). \quad \rtimes$$

Bemerkungen. A. Semimartingale sind stabil unter C^2-Transformationen, jedoch im Allgemeinen nicht unter lediglich stetigen Transformationen.

B. Der erste Term der Itô-Formel

$$\int_{0+}^{t} f'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s$$

existiert als stochastisches Integral, denn $f'(X_-) \in \mathbb{L}$. Gemäß dem Hauptsatz für Riemann-Stieltjes-Integrale ist dieser Term der einzige nicht verschwindende Ausdruck auf der rechten Seite, falls der Integrator X stetig und von beschränkter Variation auf kompakten Intervallen ist.

Lassen wir auch stetige Integratoren von unbeschränkter Variation zu, müssen wir den zweiten Term der Itô-Formel,

$$\frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X,X]_s^c$$

berücksichtigen. Dabei ist $[X,X]^c$ ein stetiger und wachsender Prozess, folglich kann man das Integral als pfadweises Riemann-Stieltjes bzw. Lebesgue-Stieltjes-Integral auffassen.

Um die Klasse der Integratoren X auf Semimartingale zu vergrößern, müssen wir auch unstetige Integratoren zulassen und somit den dritten Korrekturterm in Kauf nehmen. Allerdings haben Semimartingale höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, so dass

$$\sum_{0<s\leqslant t}\left(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\right)$$

stets Summe mit höchstens abzählbar vielen Summanden ist, die unter den Voraussetzungen des Satzes endlich und daher wohldefiniert ist. ⊸

■ Beweis der Itô-Formel

Sei für alles Weitere X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$ und $f \in C^2$. Die quadratische Variation von X zerfällt nach Definition 2.9 in einen stetigen Anteil und einen Sprunganteil, so dass

$$\int_{0-}^{t} f''(X_s) \mathrm{d}[X,X]_s = \int_{0-}^{t} f''(X_s) \mathrm{d}[X,X]_s^c + \sum_{0<s\leqslant t} f''(X_s)(\Delta X_s)^2.$$

Da $[X,X]_s^c$ stetig, wachsend und von beschränkter Variation auf kompakten Mengen ist, definiert $[X,X]_s^c$ ein Maß, so dass wir den Integralterm als Lebesgue-Stieltjes-Integral auffassen können. Weiterhin ist X càdlàg und hat daher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, folglich ist auch die Summe wohldefiniert.

Unter Verwendung obiger Zerlegung formulieren wir folgende zur Itô-Formel äquivalente Aussage, welche sich jedoch im Beweis leichter handhaben lässt.

Variante der Itô-Formel *Seien X ein Semimartingal und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann ist auch $f(X)$ ein Semimartingal und es gilt*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_{0+}^{t} f'(X_{s-}) \,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^{t} f''(X_{s-}) \,\mathrm{d}[X,X]_s \\ &\quad + \sum_{0<s\leqslant t} \Big(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s - \frac{1}{2} f''(X_s)(\Delta X_s)^2 \Big). \end{aligned}$$ ⋊

Der verbleibende Teil dieses Abschnittes ist dem Beweis dieser Variante der Itô-Formel gewidmet. Eine zentrale Rolle spielt dabei folgende Version des Satzes von Taylor.

Satz von Taylor *Sei $I = [a,b]$ ein Intervall, $f \in C^2(I)$ und $x \in I$, so gilt*

$$f(y) - f(x) = (y-x) f'(x) + \frac{1}{2}(x-y)^2 f''(x) + R(x,y)$$

für jedes $y \in I$, wobei eine monoton wachsende Funktion $r : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $r(b-a) \leqslant |f''|_I$ und $r(u) \downarrow 0$ für $u \downarrow 0$, so dass

$$|R(x,y)| \leqslant (y-x)^2 r(|x-y|).$$ ⋊

Wir beweisen die Variante der Itô-Formel zunächst für stetige Semimartingale. Anschließend präsentieren wir die relativ technische Verallgemeinerung auf beliebige Semimartingale.

Proposition A *Für jedes stetige Semimartingal gilt die Variante der Itô-Formel.* $\rtimes$

Beweis. Definieren wir $R_m \coloneqq \inf\{t > 0 : |X_t| \geqslant m\}$, so ist R_m eine Stoppzeit mit $R_m \uparrow \infty$ und $|X^{R_m}| \leqslant m$. Schreiben wir die Itô-Formel verkürzt als

$$f(X_t) - f(X_0) = I(f, X)_t,$$

so verifiziert man leicht, dass $I(f,X)_t^{R_m} = I(f, X^{R_m})_t$, und folglich genügt es, die Behauptung für beschränkte stetige Semimartingale zu beweisen.

Gehen wir also davon aus, dass X nur Werte in einem kompakten Intervall I annimmt. Sei weiter $t > 0$ fest und σ_n eine Folge von Stoppzeiten $0 = T_0^n \leqslant T_1^n \leqslant \ldots \leqslant T_{k_n}^n = t$, welche gegen die Identität konvergiert. Somit gilt

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} \left(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n}) \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} \left((X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}) f'(X_{T_{i-1}^n}) + \frac{1}{2} (X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 f''(X_{T_{i-1}^n}) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} R(X_{T_{i-1}^n}, X_{T_i^n}). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.15 & 2.20 konvergiert die erste Summe in Wahrscheinlichkeit gegen

$$\int_{0+}^t f'(X_s) \, \mathrm{d}X_s + \int_{0+}^t f''(X_s) \, \mathrm{d}[X,X]_s.$$

Wir müssen also nur das Restgliedterm betrachten. Nach Voraussetzung ist X stetig, also auf $[0,t]$ gleichmäßig stetig, und folglich konvergiert $|X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}| \to 0$ f.s. für $n \to \infty$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} |R(X_{T_{i-1}^n}, X_{T_i^n})| &\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} (X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 r\left(|X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}| \right) \\ &\leqslant \left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant k_n} r(|X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}|) \right) \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_n} (X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \\ &\xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \end{aligned}$$

denn $\sum_{1\leqslant i\leqslant k_n}(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} [X,X]_t$ und r ist nach dem Satz von Taylor stetig in Null. Der Limes in Wahrscheinlichkeit ist nur fast sicher eindeutig, folglich gilt für jedes $t \geqslant 0$

$$f(X_t) - f(X_0) \overset{\text{f.s.}}{=} \int_{0+}^{t} f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_s)\,\mathrm{d}[X,X]_s.$$

Die Ausnahmemenge, auf der die Identität nicht gilt, ist eine von t abhängige Nullmenge. Unter Verwendung der Stetigkeit von X kann die t-Abhängigkeit jedoch aufgelöst werden, so dass die Identität für alle t gleichzeitig bis auf einer Nullmenge gilt. ∎

Proposition B *Die Variante der Itô-Formel gilt für beliebige Semimartingale.* ⋊

Beweis. Wir können wieder davon ausgehen, dass X ein beschränktes Semimartingal ist. Zu $t > 0$ definieren wir eine vom Zufall abhängige Menge

$$D \coloneqq \{s \in [0,t] : |\Delta X_s| > 0\}.$$

Als Semimartingal ist X insbesondere càdlàg und folglich ist D höchstens abzählbar. Weiterhin gilt nach Definition 2.9 und Satz 2.16 $\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta X_s)^2 \leqslant [X,X]_t < \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert daher eine endliche Menge D_ε, so dass auf ihrem Komplement $D_0 \coloneqq D \setminus D_\varepsilon$ gilt

$$\sum_{s\in D_0} (\Delta X_s)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Sei nun wieder σ_n eine Folge von Stoppzeiten auf $[0,t]$, die gegen die Identität konvergiert, und $A^n = \{1 \leqslant i \leqslant k_n : T_{i-1}^n < s \leqslant T_i^n \text{ für ein } s \in D_\varepsilon\}$, so hängt A^n vom Zufall ab und $\#A^n \leqslant \#D_\varepsilon < \infty$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant k_n} \left(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n})\right) \\ &= \sum_{i\in A^n} \left(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n})\right) + \sum_{i\notin A^n} \left(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n})\right), \end{aligned}$$

wobei wir die Teleskopsumme so zerlegt haben, dass in der ersten Summe die Stoppzeiten gesammelt sind, die Zeitabschnitte mit »kleinen« Sprüngen überstreichen, und in der zweiten Summe jene Stoppzeiten gesammelt sind, welche die endlich vielen Zeitpunkte mit »großen« Sprüngen überstreichen.

Da die Kardinalität aller A^n beschränkt ist, können wir bei der ersten Summe zum Limes übergehen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in A^n} \Big(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n}) \Big) = \sum_{s\in D_\varepsilon} \big(f(X_s) - f(X_{s-}) \big) .$$

Auf die Summenden der zweiten Summe wenden wir den Satz von Taylor an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\notin A^n} \Big(f(X_{T_i^n}) - f(X_{T_{i-1}^n}) \Big) \\
&\quad = \sum_{1\leqslant i\leqslant k_n} \Big(f'(X_{T_{i-1}^n})(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}) + \frac{1}{2} f''(X_{T_{i-1}^n})(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \Big) \\
&\qquad - \sum_{i\in A^n} \Big(f'(X_{T_{i-1}^n})(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}) + \frac{1}{2} f''(X_{T_{i-1}^n})(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \Big) \\
&\qquad + \sum_{i\notin A^n} R(X_{T_{i-1}^n}, X_{T_i^n}).
\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Proposition A konvergiert der erste Term nach Satz 2.15 & 2.20 in Wahrscheinlichkeit gegen

$$\int_{0+}^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^t f''(X_s)\,\mathrm{d}[X,X]_s .$$

Der zweite Term ist aufgrund der Endlichkeit von A^n ebenfalls konvergent, und zwar gegen

$$\sum_{s\in D_\varepsilon} \Big(f'(X_{s-})\Delta X_s + \frac{1}{2} f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2 \Big).$$

Es verbleibt noch das Restglied zu betrachten. Nach Voraussetzung ist $|X_s| \leqslant m$ für ein $m \geqslant 1$, und f'' ist auf $I = [-m, m]$ beschränkt. Somit ist $r(|X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}|) \leqslant |f''|_I$ unabhängig von i und n, und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i\notin A^n} |R(X_{T_{i-1}^n}, X_{T_i^n})| &\leqslant \sum_{i\notin A^n} r(|X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}|)(X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \\
&\leqslant |f''|_I \sum_{i\notin A^n} (X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n})^2 \\
&\xrightarrow{\mathbf{P}} |f''|_I \sum_{s\notin D_\varepsilon} (\Delta X_s)^2 \leqslant |f''|_I\, \varepsilon .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_{0+}^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^t f''(X_s)\,\mathrm{d}[X,X]_s \\ &\quad + \sum_{s\in D_\varepsilon}\Big(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s - \frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2\Big) \\ &\quad + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei D_ε endlich und folglich die Summe wohldefiniert ist. Für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt ferner $D_\varepsilon \uparrow D$, es ist also nur noch zu zeigen, dass obige Summe auch für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergiert. Wir zeigen dazu die absolute Konvergenz der Reihe für $\varepsilon \downarrow 0$. Da X beschränkt ist, können wir die Taylor Abschätzung

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leqslant |f''|_I |x-y|^2$$

verwenden, und erhalten

$$\begin{aligned} &\sum_{s\in D_\varepsilon} |f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s - \frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2| \\ &\qquad \leqslant 2|f''|_I \sum_{s\in D_\varepsilon} (\Delta X_s)^2 \leqslant 2|f''|_I [X,X]_t < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist alles gezeigt. ∎

■ Multivariate Itô-Formel

Bisher haben wir uns nur mit eindimensionaler Integration beschäftigt, die Itô-Formel gilt aber auch in höheren Dimensionen. Wir wollen hier eine Version für n-dimensionale stochastische Prozesse angeben.

2.22 **Satz** *Sei $X = (X^1, \dots, X^n)$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten X^i Semimartingale sind. Ferner sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist auch $f(X)$ ein Semimartingal und es gilt:*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n \int_{0+}^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_{0+}^t \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i x_j} f(X_{s-})\,\mathrm{d}[X^i,X^j]_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leqslant t}\Big\{f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_{s-})\Delta X_s^i\Big\}. \end{aligned}$$ ⋊

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.21 nur mit dem Unterschied, dass die mehrdimensionale Taylorformel verwendet wird.

2-G Das Fisk-Stratonovich-Integral

Unser stochastisches Integral haben wir unter zwei Gesichtspunkten konstruiert. Erstens sollte die Klasse der zulässigen Integratoren und Integranden möglichst groß sein, und zweitens sollte die Klasse der lokalen Martingale und die Klasse der Semimartingale abgeschlossen unter dem konstruierten Integralbegriff sein. Dies haben wir erreicht, allerdings ist das Rechnen mit dem Itô-Integral recht mühsam.

Rücken wir von diesen Forderungen ab, ist es möglich, andere Integralbegriffe zu konstruieren, die sich in manchen Situationen leichter handhaben lassen. Zur Motivation betrachten wir zwei stetige Semimartingale X und Y. Nach der Formel für die partielle Integration gilt

$$XY = \int X_- \, \mathrm{d}Y + \int Y_- \, \mathrm{d}X + [X, Y].$$

Der Term $[X, Y]$ tritt für gewöhnliche Lebesgue-Stieltjes-Integrale nicht auf, und hat in der Tat zur Konsequenz, dass der Integrationskalkül des stochastischen Integrals stark vom Lebesgue-Stieltjes-Kalkül abweicht. Um dies zu kompensieren, könnten wir die quadratische Kovariation in das Integral absorbieren. Definieren wir dazu

$$\int X_- \circ \mathrm{d}Y_s \coloneqq \int X_- \, \mathrm{d}Y + \frac{1}{2}[X, Y],$$

so erhalten wir zumindest für stetige Semimartingale

$$XY = \int X_- \circ \mathrm{d}Y_s + \int Y_- \circ \mathrm{d}X_s, \tag{*}$$

was der partiellen Integrationsformel für Lebesgue-Stieltjes-Integrale entspricht.

Im Folgenden wollen wir diesen Integrationsbegriff allgemein definieren und seine Eigenschaften untersuchen.

2.10 **Definition** *Seien X und Y zwei Semimartingale. Das Fisk-Stratonovich-Integral $Y_- \circ X$ von Y_- bezüglich X ist definiert durch*

$$(Y_- \circ X)_t \coloneqq \int_0^t Y_{s-} \circ \mathrm{d}X_s \coloneqq \int_0^t Y_{s-} \, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}[Y, X]_t^c. \quad \rtimes$$

Das so definierte Integral gehorcht dem klassischen Kalkül für Lebesgue-Stieltjes Integrale - ganz im Gegensatz zum bisher diskutierten stochastischen Integral. Grob gesprochen haben wir die Mehrkosten für das Integrieren von Integratoren unbeschränkter Variation in das Ingegral absorbiert. Wir zahlen dafür aber einen Preis, denn die Klasse der zulässigen Integranden ist hier auf (linksstetige) Semimartingale eingeschränkt, und weiterhin ist die Klasse der lokalen Martingale nicht abgeschlossen unter diesem Integrationsbegriff. Gerade im Hinblick auf stochastische Differentialgleichungen lässt sich das Fisk-Stratonovich-Integral jedoch in vielen Situation leichter handhaben als das »gewöhnliche« stochastische Integral. So vereinfacht sich die Itô-Formel für dieses Integral auf den Hauptsatz für unstetige Integratoren.

2.23 **Hauptsatz für FS-Integrale** *Seien X ein Semimartingal und $f \in C^3$. Dann gilt*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^{t} f'(X_{s-}) \circ \mathrm{d}X_s + \sum_{0<s\leqslant t} \{ f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s \}. \quad \rtimes$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f \in C^3$, also ist $f' \in C^2$ und folglich

$$\int_{0+}^{t} f'(X_{s-}) \circ \mathrm{d}X_s = \int_{0+}^{t} f'(X_{s-})\, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}[f'(X), X]_t^c$$

wohldefiniert. Vergleichen wir die Behauptung mit der Itô-Formel, so ist lediglich zu zeigen, dass

$$\frac{1}{2}[f'(X), X]_t^c = \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})\, \mathrm{d}[X, X]_s^c.$$

Um diese Identität zu zeigen, wenden wir die Itô-Formel auf $f'(X)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} f'(X_t) - f'(X_0) &= \int_{0+}^{t} f''(X_{s-})\, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f'''(X_{s-})\, \mathrm{d}[X, X]_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leqslant t} \left(f'(X_s) - f'(X_{s-}) - f''(X_{s-})\Delta X_s \right). \end{aligned}$$

Nun hängt $f'(X_0)$ nicht von t ab, ist also von beschränkter Variation und folglich ist $[f'(X_0), X]_t$ in t konstant, und der stetige Anteil verschwindet. Somit gilt

$$\begin{aligned} [f'(X), X]^c &= [f''(X_-) \bullet X, X]^c + \frac{1}{2}[f'''(X_-) \bullet [X, X]^c, X]^c \\ &\quad + \left[\sum_{0<s\leqslant \cdot} \left(f'(X_s) - f'(X_{s-}) - f''(X_{s-})\Delta X_s \right), X \right]^c. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.19, der auch für den stetigen Anteil gilt, folgt für den ersten Term

$$[f''(X_-) \bullet X, X]^c = f''(X_-) \bullet [X, X]^c.$$

Analog dazu erhalten wir für den zweiten Term

$$\frac{1}{2}[f'''(X_-) \bullet [X,X]^c, X]^c = \frac{1}{2} f'''(X_-) \bullet [[X,X]^c, X]^c = 0,$$

denn $[X,X]^c$ ist von beschränkter Variation, folglich ist $[[X,X]^c, X]$ konstant und der stetige Anteil verschwindet.

Zum Abschluss betrachten wir noch

$$\sum_{0<s\leqslant\cdot} \left(f'(X_s) - f'(X_{s-}) - f''(X_{s-})\Delta X_s \right).$$

Dies ist ein reiner Sprungprozess, und im Beweis der Itô-Formel haben wir gezeigt, dass die Summe absolut konvergiert. Folglich handelt es sich hierbei auch um einen Prozess von endlicher Variation, so dass die quadratische Kovariation verschwindet.

Zusammenfassend gilt also

$$[f'(X), X]^c = f''(X_-) \bullet [X,X]^c,$$

und dies war zu zeigen. ∎

Als Anwendung können wir nun zeigen, dass die partielle Integrationsformel (*) nicht nur für stetige Semimartingale gilt.

2.7 **Partielle Integration für FS-Integrale** *Seien X und Y zwei Semimartingale, bei denen mindestens eines stetige Pfade besitze. Dann gilt*

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_{s-} \circ \mathrm{d}Y + \int_0^t Y_{s-} \circ \mathrm{d}X. \quad \rtimes$$

Beweis. Da X oder Y stetige Pfade besitzt, gilt $[X,Y] = X_0 Y_0 + [X,Y]^c$ und folglich ist nach der partiellen Integrationsformel für Itô-Integrale

$$XY = X_- \bullet Y + Y_- \bullet X + [X,Y] = X_- \circ Y + Y_- \circ X + X_0 Y_0. \quad ∎$$

2-H Einige Anwendungen der Itô-Formel

Wir beginnen nun damit, die ersten elementaren stochastischen Differentialgleichungen zu lösen. Im Hinblick auf gewöhnliche Differentialgleichungen ist durch

$$\dot{z} = z, \qquad z_0 = 1$$

wohl eines der einfachsten Anfangswertprobleme gegeben. Die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt aus einer elementaren Rechnung, und die Lösung kann explizit angegeben werden als

$$z_t = \mathrm{e}^t.$$

Wir betrachten nun das stochastische Analogon,

$$\mathrm{d}Z_t = Z_{t-}\,\mathrm{d}X_t, \qquad Z_0 = 1.$$

Dies stellt eine stochastische Differentialgleichung (SDE) dar, welche wir wieder als Integralgleichung interpretieren. Auch hier greift ein Existenz und Eindeutigkeitssatz, jedoch ist dessen Beweis mit deutlich höherem Aufwand verbunden. Die Lösung dieser doch recht einfachen SDE hat bereits eine sehr komplizierte Form.

2.24 **Satz** *Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann existiert ein eindeutiges Semimartingal Z, das die lineare stochastische Integralgleichung*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}X_s$$

erfüllt. Z ist in expliziter Form gegeben durch

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t\right) \prod_{0<s\leqslant t} (1+\Delta X_s)\exp\left(-\Delta X_s + \frac{1}{2}(\Delta X_s)^2\right). \qquad \rtimes$$

Beweis. Wir zeigen nur, dass durch Z eine Lösung der Integralgleichung gegeben ist. Die Eindeutigkeit der Lösung wird sich zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen einer allgemeinen Lösungstheorie ergeben.

Um nachzuweisen, dass Z eine Lösung ist, verwenden wir folgende Darstellung

$$Z_t = \exp(K_t)\varPi_t, \qquad K_t \coloneqq X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t^c, \quad \varPi_t \coloneqq \prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s).$$

Nach der Itô-Formel ist $\exp(K_t)$ ein Semimartingal, und jeder Faktor des Produkts $\varPi_t$ ist adaptiert und càdlàg. Weiterhin ist X càdlàg und folglich $\Delta X_s \neq 0$ für höchstens abzählbar viele verschiedene $0 < s \leqslant t$. Wir zeigen nun, dass das Produkt konvergiert, und sogar ein FV-Prozess ist. Als Produkt zweier Semimartingale ist Z_t dann ein Semimartingal.

Aus der càdlàg-Eigenschaft von X_t folgt, dass

$$|\Delta X_s| \leqslant 1/2,$$

bis auf einer endlichen von ω-abhängigen Menge. Wir setzen $V_t \coloneqq \Pi_t \mathbf{1}_{[|X_t| \leqslant 1/2]}$ und überführen das unendliche Produkt durch Logarithmieren in einer Reihe

$$\log V_t = \sum_{0<s\leqslant t} \big(\log(1+U_s) - U_s\big), \qquad U_s \coloneqq \Delta X_s \mathbf{1}_{[|\Delta X_s| \leqslant 1/2]}.$$

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$|\log(1-x) - x| \leqslant x^2, \qquad \text{für } |x| \leqslant 1/2.$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{0<s\leqslant t} |\log(1+U_s) - U_s| \leqslant \sum_{0<s\leqslant t} U_s^2 \leqslant \sum_{0<s\leqslant t} (\Delta X_s)^2 \leqslant [X,X]_t < \infty.$$

Also ist die Reihe f.s. absolut konvergent, und das Produkt Π_t konvergiert f.s.. Weiterhin folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe, dass $\log V_t$ von beschränkter Variation ist. Dann ist aber auch V_t von beschränkter Variation und ebenso Π_t. Folglich ist Z_t wohldefiniert und ein Semimartingal.

Nun ist noch zu zeigen, dass Z_t tatsächlich eine Lösung der Integralgleichung darstellt. Wir schreiben dazu

$$Z_t = f(K_t, \Pi_t), \qquad f(x,y) = \exp(x)y.$$

Unter Berücksichtigung, dass Π_t von beschränkter Variation ist, erhalten wir so aus der Itô-Formel

$$\begin{aligned} Z_t - Z_0 &= f(K_t, \Pi_t) - f(K_0, \Pi_0) \\ &= \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}K_s + \int_0^t \exp(K_{s-})\,\mathrm{d}\Pi_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}[K,K]_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leqslant t} \big(Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta K_s - \exp(K_{s-})\Delta\Pi_s\big) \\ &= \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}K_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}[K,K]_s^c + \sum_{0<s\leqslant t} \big(Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta K_s\big), \end{aligned}$$

denn das Integral bezüglich $\mathrm{d}\Pi_s$ wird zur Summe und hebt sich dadurch weg. Setzen wir $K_s = X_s - 1/2[X,X]_s^c$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_t - Z_0 &= \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}[X,X]_s^c + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}[X,X]_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leqslant t} (Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta X_s) \\ &= \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}X_s - \sum_{0<s\leqslant t} (Z_{s-}(1+\Delta X_s) - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta X_s) \\ &= \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}X_s, \end{aligned}$$

wobei wir die Identität $Z_s = Z_{s-}(1+\Delta X_s)$ verwendet haben. Somit ist gezeigt, dass Z eine Lösung der Integralgleichung ist. ▮

Man kann das Anfangswertproblem $\dot{z} = z$ mit $z_0 = 1$ dazu verwenden, die Exponentialfunktion e^t zu definieren. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist diese die eindeutige Lösung der Integralgleichung

$$\mathrm{e}^t = 1 + \int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s.$$

Folgende Definition verallgemeinert diese Idee auf stochastische Semimartingale.

2.11 **Definition** *Ist X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$, so heißt die eindeutige Lösung Z von*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\,\mathrm{d}X_s$$

stochastisches Exponential (oder auch Doleans-Dade-Exponential) $\mathcal{E}(X)$ von X. ⋊

Beispiel 4 Sei B die Standard-Brownsche Bewegung und c eine reelle Zahl. Dann gilt nach Satz 2.24

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(cB)_t &= \exp\left(cB_t - \frac{1}{2}[cB,cB]_t\right) \prod_{0<s\leqslant t} (1+\Delta(cB)_t) \exp\left(-\Delta(cB)_s + \frac{1}{2}(\Delta cB)_s^2\right) \\ &= \exp\left(cB_t - c^2t/2\right). \end{aligned}$$

Als stochastisches Exponential löst $Z = \mathcal{E}(cB)$ die stochastische Integralgleichung $\mathrm{d}Z = cZ_-\mathrm{d}B$, und folglich ist Z ein lokales Martingal. Nach Satz 2.18 ist Z sogar ein Martingal. ■

Die Exponentialfunktion kann auch als Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad f(0) = 1$$

definiert werden. Der folgende Satz überträgt dies auf das stochastische Exponential.

2.25 **Satz** *Seien X und Y zwei Semimartingale mit $X_0 = Y_0 = 0$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X,Y]). \quad \rtimes$$

Beweis. Sei $U = \mathcal{E}(X)$ und $V = \mathcal{E}(Y)$. Mit der Formel für die partielle Integration und Satz 2.19 folgt

$$\begin{aligned} U_t V_t - U_0 V_0 &= \int_{0+}^t U_{s-}\,\mathrm{d}V_s + \int_{0+}^t V_{s-}\,\mathrm{d}U_s + [U,V]_t - [U,V]_0 \\ &= \int_{0+}^t U_{s-}\,\mathrm{d}(V_- \bullet Y)_s + \int_{0+}^t V_{s-}\,\mathrm{d}(U_- \bullet X)_s + \int_{0+}^t \mathrm{d}[U,V]_s \\ &= \int_{0+}^t U_{s-}V_{s-}\,\mathrm{d}Y_s + \int_{0+}^t U_{s-}V_{s-}\,\mathrm{d}X_s + \int_{0+}^t U_{s-}V_{s-}\,\mathrm{d}[X,Y]_s \\ &= \int_{0+}^t U_{s-}V_{s-}\,\mathrm{d}(X + Y + [X,Y])_s. \end{aligned}$$

Setzen wir $W_t = U_t V_t$, so löst nach dieser Rechnung W die stochastische Differentialgleichung $\mathrm{d}W = W\,\mathrm{d}(X + Y + [X,Y])$ und $W_0 = U_0 V_0 = 1$. Also ist alles gezeigt. ∎

2.8 **Korollar** *Sei X ein stetiges Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\mathcal{E}(X)} = \mathcal{E}(-X + [X,X]). \quad \rtimes$$

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 5.2. $\rtimes$

Zum Abschluss dieses Kapitels untersuchen wir nochmals die Standard-Brownsche Bewegung. Diese ist stetig, und ein lokales Martingal. Weiterhin ist die quadratische Variation einer Standard-Brownschen Bewegung B gegeben durch $[B,B]_t = t$. Es stellt sich nun heraus, dass diese Eigenschaft die Standard-Brownsche Bewegung bereits eindeutig charakterisiert.

2.26 **Satz von Lévy** *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ ist genau dann eine Standard-Brownsche Bewegung, wenn er ein stetiges lokales Martingal ist mit $[X,X]_t = t$.* $\rtimes$

Beweis. $\Rightarrow$: Siehe Satz 1.26 & 2.16.

$\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist X bereits stetig und adaptiert. Nach Definition 1.15 sind somit noch zwei Dinge zu zeigen, nämlich

1. $X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$, und
2. $X_t - X_s$ ist $N(0, t-s)$ verteilt.

Sei $u \in \mathbb{R}$ fest und $F(x,t) = \exp(iux + u^2t/2)$. Dann ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und für $Z_t = F(X_t, t)$ folgt mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} Z_t - Z_0 &= iu \int_{0+}^t Z_s \,\mathrm{d}X_s + \frac{u^2}{2} \int_{0+}^t Z_s \mathrm{d}s + \frac{1}{2}(iu)^2 \int_{0+}^t Z_s \mathrm{d}[X,X]_s \\ &= iu \int_{0+}^t Z_s \,\mathrm{d}X_s. \end{aligned}$$

Somit ist Z_t ein stetiges lokales Martingal, denn X_t ist eines, und da $Z_0 = \exp(iuX_0) = 1$ folgt außerdem $Z = \mathcal{E}(iuX)$.

Definieren wir nun eine Stoppzeit $T = t_0$ für ein $t_0 > 0$, so ist auch Z^T ein stetiges lokales Martingal, und

$$|Z_t| = |\exp(iuX_t^T + (t \wedge t_0)u^2/2)| = \exp((t \wedge t_0)u^2/2) \leqslant \exp(t_0 u^2/2).$$

Also Z ein Martingal nach Satz 1.32. Somit gilt $\mathbf{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s$, d.h.

$$\mathbf{E}(\exp(iuX_t + tu^2/2) \mid \mathcal{F}_s) = \exp(iuX_s + su^2/2).$$

Somit folgt, dass

$$\mathbf{E}(\exp(iu(X_t - X_s)) \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{e}^{-u^2/2(t-s)},$$

also ist $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Weiterhin folgt mit dem Eindeutigkeitssatz der charakteristischen Funktion, dass

$$X_t - X_s \sim N(0, t-s).$$

Also ist X eine Brownsche Bewegung. ∎

Eine analoge Aussage existiert auch für mehrdimensionale Brownsche Bewegungen, wir überspringen aber ihren Beweis.

2.27 **Satz** *Ein d-dimensionaler stochastischer Prozess $X = (X^1, \dots, X^d)$ ist genau dann eine Standard-Brownsche Bewegung, falls X ein stetiges lokales Martingal ist mit*

$$[X^i, X^j]_t = t\delta_{ij}. \quad \rtimes$$

Es stellt sich nun heraus, dass stetige lokale Martingale »im Wesentlichen« die Form einer Standard-Brownschen Bewegung haben.

2.28 **Satz** *Sei M ein stetiges in Null startendes lokales Martingal mit koerzivem quadratischen Variationsprozess, d.h.*

$$[M, M] \to \infty \quad \textit{für} \quad t \to \infty.$$

Ferner sei

$$T_s \coloneqq \inf\{t > 0 : [M, M]_t > s\}.$$

Dann wird durch $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{T_s}$ und $B_s = M_{T_s}$ eine Standard-Brownsche Bewegung B bezüglich der Filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_s)$ definiert. Darüber hinaus ist $([M, M]_t)_{t \geqslant 0}$ eine Familie von Stoppzeiten für $\mathbb{G}$ und

$$M_t = B_{[M,M]_t} \qquad \textit{f.s.} \quad 0 \leqslant t < \infty. \quad \rtimes$$

Jedes lokale Martingal mit koerziver quadratischer Variation kann also als zeittransformierte Standard-Brownsche Bewegung dargestellt werden.

3 Zerlegung von Semimartingalen

3-A Klassische Semimartingale

Wir haben Semimartingale als gute Integratoren eingeführt, und bisher ausschließlich mit dieser Sichtweise gearbeitet. Am Ende von Abschnitt 2-B wurde jedoch bereits kurz angedeutet, dass man Semimartingale auch anders motivieren kann, nämlich als diejenigen Prozesse, die sich in eine Summe aus einem lokalen Martingal und einem FV-Prozess zerlegen lassen. In der Literatur spricht man in diesem Fall auch von »klassischen Semimartingalen«. Es stellt sich aber heraus dass klassische Semimartingale und Semimartingale ein und dasselbe sind. Jedes Semimartingal lässt sich wie beschrieben zerlegen, und umgekehrt ist durch jede solche Zerlegung ein Semimartingal gegeben.

Wir wollen diese Zerlegungseigenschaft nun genauer untersuchen und einige Folgerungen ableiten. Den Beweis, dass jedes Semimartingal eine solche Zerlegung zulässt, überspringen wir allerdings und verweisen stattdessen auf die Literatur – beispielsweise Protter [7].

3.1 **Definition** *Ein adaptierter càdlàg Prozess X ist ein klassisches Semimartingal, falls es ein lokales Martingal M und einen Prozess A von beschränkter Variation auf kompakten Mengen gibt, so dass $M_0 = A_0 = 0$ und*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t. \quad \rtimes$$

Jedes klassische Semimartingal ist ein Semimartingal – eine etwas schwächere Version dieser Aussage haben wir mit Satz 2.6 gezeigt. Die Umkehrung ist ebenfalls wahr, deren Beweis erfordert allerdings erheblich mehr Aufwand.

3.1 **Satz** *Jedes Semimartingal ist ein klassisches Semimartingal und umgekehrt.*

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist, dass jedes lokale Martingal mit càdlàg Pfaden ein Semimartingal ist. Bisher konnten wir dies lediglich für stetige oder zumindest lokale quadratintegrierbare lokale Martingale zeigen.

3.1 **Korollar** *Jedes lokale Martingal mit càdlàg Pfaden ist ein Semimartingal.*

3.2 **Definition** *Die vorhersagbare σ-Algebra $\mathcal{P}$ ist die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, die alle Prozesse aus $\mathbb{L}$ messbar macht. Die Klasse der $\mathcal{P}$-messbaren Prozesse wird ebenfalls mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Ein Prozess aus $\mathcal{P}$ wird vorhersagbarer Prozess (predictable, previsible) genannt.* ⋊

Wir werden noch sehen, dass die Klasse der vorhersagbaren Prozesse tatsächlich größer als $\mathbb{L}$ ist.

Im Allgemeinen ist die Zerlegung, die man erhält, wenn man ein Semimartingal als klassisches Semimartingal auffasst, nicht eindeutig. Durch zusätzliche Einschränkungen an die Zerlegung kann man jedoch Eindeutigkeit erzwingen, indem man beispielsweise die Vorhersagbarkeit des FV-Anteils fordert.

3.2 **Doob-Meyer-Zerlegung eines Submartingals** *Ist X ein lokales Submartingal, dann existiert genau ein lokales Martingal M und genau ein wachsender vorhersagbarer lokal integrierbarer Prozess A, so dass $M_0 = A_0 = 0$ und*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t. \quad ⋊$$

Jedes stetige lokale Martingal ist von unbeschränkter Totalvariation. Umgekehrt lässt sich vermuten, dass sich der irreguläre Teil eines unstetigen lokalen Martingals in Form eines Prozesses von beschränkter Variation abspalten lässt. Folgender Satz formalisiert diese Vermutung.

3.3 **Fundamentalsatz für lokale Martingale** *Sei M ein lokales Martingal und $\beta > 0$. Dann existieren zwei lokale Martingale N und D, so dass D ein Prozess mit beschränkter Variation auf kompakten Mengen ist, die Sprünge von N durch 2β beschränkt sind und*

$$M = N + D. \quad ⋊$$

Vorhersagbarkeit ist eine angenehme Eigenschaft, über die sich Prozesse bis zu einem gewissen Grad kontrollieren lassen. Nach der Doob-Meyer-Zerlegung lässt sich jedes Submartingal eindeutig in ein lokales Martingal und einen vorhersagbaren FV-Prozess zerlegen. Natürlich hat nicht jedes Semimartingal diese spezielle Eigenschaft.

3.3 **Definition** *Sei X ein Semimartingal. Besitzt X eine Zerlegung der Form*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

mit einem lokalen Martingal M, einem vorhersagbaren Prozess A von beschränkter Variation auf kompakten Mengen und $M_0 = A_0 = 0$, dann wird X spezielles Semimartingal genannt. $\rtimes$

Bei der Doob-Meyer-Zerlegung impliziert die Vorhersagbarkeit des FV-Anteils die Eindeutigkeit der Zerlegung. Dies gilt allgemein für Semimartingale.

3.4 **Satz** *Ist X ein spezielles Semimartingal, dann ist die Zerlegung mit einem vorhersagbaren Prozess A eindeutig. Die Zerlegung eines Semimartingals ist im allgemeinen jedoch nicht eindeutig.* $\rtimes$

Wir sind nun in der Lage tatsächlich zu beweisen, dass die Klasse der lokalen Martingale abgeschlossen unter stochastischer Integration ist.

3.5 **Satz** *Sei M ein lokales Martingal und $H \in \mathbb{L}$. Dann ist das stochastische Integral $H \bullet M$ wieder ein lokales Martingal.* $\rtimes$

Beweis. Sei M ein lokales Martingal und $H \in \mathbb{L}$. So ist M nach Korollar 3.1 ein Semimartingal und $H \bullet M$ ist wohldefiniert. Nach dem Satz von Doob-Meyer 3.3 existiert für $\beta > 0$ eine Zerlegung

$$M = N + A,$$

in lokale Martingale N und A, wobei A ein FV-Prozess ist, und $|\Delta N| \leqslant \beta$ gilt. Insbesondere ist N lokal beschränkt, und folglich lokal quadratintegrierbar. Also ist $H \bullet N$ nach Satz 2.14 ein lokales Martingal.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $H \bullet A$ ebenfalls ein lokales Martingal ist. Sei dazu $\sigma^n = (T_i^n)$ eine Partition des Intervalls $[0, \infty)$, welche gegen die Identität konvergiert. Dann gilt nach Satz 2.15, dass

$$\sum_i H_{T_i^n}(A^{T_{i+1}^n} - A^{T_i^n}) \xrightarrow{\text{ucp}} H \bullet A.$$

Wir fixieren ein $t > 0$ und wählen eine Teilfolge n_k, so dass

$$\sum_i H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n}) \xrightarrow{\text{f.s.}} (H \bullet A)_t. \qquad (*)$$

Durch Stoppen können wir erreichen, dass H beschränkt ist. Weiterhin ist A von beschränkter Variation, also können wir erneut zu einer Teilfolge übergehen, um zu erreichen, dass (*) auch in L^1 konvergiert. Somit folgt

$$\mathbf{E}(H \bullet A_t \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} \sum_i \mathbf{E}(H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n}) \mid \mathcal{F}_s).$$

Nun ist $H_{T_i^n}$ $\mathcal{F}_{T_i^n}$-messbar, und folglich gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n})\mathbf{1}_{[T_i^n \leqslant s]} \mid \mathcal{F}_s) &= H_{T_i^n}\mathbf{1}_{[T_i^n \leqslant s]}\mathbf{E}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n} \mid \mathcal{F}_s)\\ &= H_{T_i^n}\mathbf{1}_{[T_i^n \leqslant s]}(A_s^{T_{i+1}^n} - A_s^{T_i^n}),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n})\mathbf{1}_{[T_i^n > s]} \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n})\mathbf{1}_{[T_i^n > s]} \mid \mathcal{F}_{T_i}) \mid \mathcal{F}_s)\\ &= \mathbf{E}(H_{T_i^n}\mathbf{1}_{[T_i^n > s]}\mathbf{E}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i^n} \mid \mathcal{F}_{T_i}) \mid \mathcal{F}_s)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbf{E}((H \bullet A)_t \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} \sum_i H_{T_i^n}(A_s^{T_{i+1}^n} - A_s^{T_i^n}) = (H \bullet A)_s,$$

also ist $H \bullet A$ ebenfalls ein lokales Martingal. ■

Zum Abschluss geben wir noch ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass ein Semimartingal speziell ist.

3.6 **Satz** *Ein klassisches Semimartingal mit beschränkten Sprüngen ist ein spezielles Semimartingal.* ⋊

Jedes stetige Semimartingal ist also ein spezielles Semimartingal, also insbesondere der Wiener-Prozess. Aber auch der Poisson-Prozess ist ein spezielles Semimartingal, denn ΔN_t ist entweder Null oder Eins.

3-B Der Satz von Girsanov

Die Zerlegung eines klassischen Semimartingals X in

$$X = M + A$$

mit einem lokalen Martingal M und einem Prozess A von beschränkter Variation, hängt vom zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß P ab, denn die lokale Martingaleigenschaft wird durch P definiert, und auch die Semimartingaleigenschaft von X ist P-abhängig. In vielen Anwendungen ist jedoch eine ganze Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen gegeben. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage, unter welchen Bedingungen auch bezüglich eines anderen Wahrscheinlichkeitsmaßes Q eine analoge Zerlegung $X = N + B$ existiert.

Definition *Ein Maß Q heißt absolutstetig bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ (kurz $Q \ll P$), falls jede P-Nullmenge auch eine Q-Nullmenge ist.* ⋊

Nach dem Satz von Radon-Nikodym besitzt jedes P-absolutstetige Wahrscheinlichkeitsmaß Q eine Radon-Nikodym-Ableitung $Z = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$, so dass $Q(A) = \int_A Z\,\mathrm{d}P$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

3.7 **Satz** *Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q sei absolutstetig bezüglich P. Dann ist ein stochastischer Prozess X, der bezüglich P ein Semimartingal ist, auch ein Semimartingal bezüglich Q (kurz: ein Q-Semimartingal).* ⋊

Beweis. Nach Definition ist X genau dann ein totales P-Semimartingal, wenn die Abbildung $I_X : \mathbb{S}_u \to L^0$ stetig bezüglich P ist, d.h. wenn

$$H_n \to H \text{ in } \mathbb{S}_u \quad \Rightarrow \quad H_n \bullet X \xrightarrow{\mathbf{P}} H \bullet X.$$

Zeigen wir nun, dass aus $U_n \xrightarrow{\mathbf{P}} U$ auch $U_n \xrightarrow{\mathbf{Q}} U$ folgt, so ist I_X auch Q-stetig, und folglich X ein Q-Semimartingal. Seien also $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} Q([|U_n - U| > \varepsilon]) &\leqslant \int_{[|Z| \leqslant k]} \mathbf{1}_{[|U_n - U| > \varepsilon]} |Z|\,\mathrm{d}P + \int_{[|Z| > k]} \mathbf{1}_{[|U_n - U| > \varepsilon]} |Z|\,\mathrm{d}P \\ &\leqslant kP([|U_n - U| > \varepsilon]) + \int_{[|Z|>k]} |Z|\,\mathrm{d}P. \end{aligned}$$

Da Z integrierbar ist, können wir k so groß wählen, dass der zweite Summand kleiner als δ wird. Ferner lässt sich aufgrund von $U_n \xrightarrow{\mathbf{P}} U$ nun n so groß wählen, dass auch der erste Summand kleiner als δ wird. Schließlich erhalten wir

$$Q([|U_n - U| > \varepsilon]) \to 0, \qquad n \to \infty. \qquad \blacksquare$$

3.4 **Definition** *Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißen äquivalent ($P \sim Q$), falls Q absolutstetig bezüglich P und P absolutstetig bezüglich Q ist.* ⋊

3.1 **Lemma** *Seien $Q \sim P$ und $Z_t = E_P\left(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right)$. Genau dann ist ein adaptierter càdlàg Prozess M ein lokales Martingal bezüglich Q, falls MZ ein lokales Martingal bezüglich P ist.* ⋊

Beweis. Sei $Z_\infty = \frac{dQ}{dP}$ die Radon-Nikodym-Ableitung, so gilt

$$Z_t = \mathbf{E}_P(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t) > 0 \text{ f.s.},$$

und Z ist ein P-Martingal. Weiterhin gilt

$$\mathbf{E}_P(M_t Z_t) = \mathbf{E}_P(M_t \mathbf{E}_P(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t)) = \mathbf{E}_P(M_t Z_\infty) = E_Q(M_t).$$

Somit ist $MZ \in L^1(P)$ genau dann, wenn $M \in L^1(Q)$. Wir haben nun zu zeigen, dass für alle $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$\mathbf{E}_Q(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \Leftrightarrow \mathbf{E}_P(M_t Z_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s Z_s. \tag{*}$$

Dazu zeigen wir zunächst die verallgemeinerte Bayes-Formel

$$\mathbf{E}_Q(M_t \mid \mathcal{F}_s) = \frac{\mathbf{E}_P(M_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)}{\mathbf{E}_P(Z_t \mid \mathcal{F}_s)}. \tag{**}$$

Sei $A \in \mathcal{F}_s$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_Q\left(\frac{\mathbf{E}_P(M_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)}{\mathbf{E}_P(Z_t \mid \mathcal{F}_s)} \mathbf{1}_A\right) &= \mathbf{E}_P\left(\frac{\mathbf{E}_P(M_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)}{Z_s} Z_s \mathbf{1}_A\right) \\
&= \mathbf{E}_P\left(M_t Z_t \mathbf{1}_A\right) \\
&= \mathbf{E}_Q(M_t \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_Q(\mathbf{E}_Q(M_t \mid \mathcal{F}_s)\mathbf{1}_A),
\end{aligned}$$

und (**) ist gezeigt. Sei wieder $A \in \mathcal{F}_s$, dann gilt mit (**)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_Q \mathbf{E}_P(\mathbf{E}_P(M_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)\mathbf{1}_A) &= \mathbf{E}_P(\mathbf{E}_Q(M_t \mid \mathcal{F}_s) Z_s \mathbf{1}_A) \\
&= \mathbf{E}_Q((M_t \mid \mathcal{F}_s)\mathbf{1}_A),
\end{aligned}$$

und die Äquivalenz in (*) folgt. ∎

3.8 **Satz von Girsanov-Meyer** *Seien P und Q zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße. Ist X unter P ein klassisches Semimartingal mit der Zerlegung $X = M + A$, dann ist X auch unter Q ein klassisches Semimartingal mit der Zerlegung $X = L + C$, wobei*

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} \, d[Z, M]_s$$

ein lokales Martingal bezüglich Q und $C = X - L$ von endlicher Variation auf kompakten Mengen (bezüglich Q). ⋊

Bemerkung. Der Integrand Z_s^{-1} ist im Allgemeinen *nicht* linksstetig. Dennoch ist das Integral als Riemann-Stieltjes-Integral wohldefiniert, denn $[Z, M]$ ist von beschränkter Variation auf kompakten Mengen. ⊸

Beweis. Nach Satz 3.7 folgt, dass X auch ein Q-Semimartingal ist. Wir zeigen nun, dass durch L ein lokales Q-Martingal definiert wird. Aufgrund der Äquivalenz von P und Q ist $Z_\infty = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ wohldefiniert, und

$$Z_t = \mathbf{E}_P(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t), \qquad t \geqslant 0,$$

ein P-Martingal. Umgekehrt ist $(1/Z_t)_{t\geqslant 0}$ ein Q-Martingal. Nun gilt

$$\int_0^t \frac{1}{Z_s}\,\mathrm{d}[Z,M]_s = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}}\,\mathrm{d}[Z,M]_s + \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \Delta\left(\frac{1}{Z_s}\right)\Delta[Z,M]_s.$$

Mit der Formel für die partielle Integration folgt weiterhin

$$\int_0^t \frac{1}{Z_{s-}}\,\mathrm{d}[Z,M]_s = \frac{[Z,M]_t}{Z_t} - \int_0^t [Z,M]_{s-}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{Z_{s-}}\right) - \left[[Z,M], \frac{1}{Z}\right]_t.$$

Schließlich gilt

$$\left[[Z,M], \frac{1}{Z}\right]_t = \left[[Z,M], \frac{1}{Z^c}\right]_t + \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \Delta\left(\frac{1}{Z_s}\right)\Delta[Z,M]_s,$$

und da $[Z,M]$ von beschränkter Variation ist, verschwindet der erste Term. Zusammenfassend ergibt sich

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s}\,\mathrm{d}[Z,M]_s = \frac{M_t Z_t - [Z,M]_t}{Z_t} + \int_0^t [Z,M]_{s-}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{Z_s}\right).$$

Nach Lemma 3.1 ist der erste Summand ein lokales Q-Martingal, denn

$$Z_t \cdot \frac{M_t Z_t - [Z,M]_t}{Z_t} = M_t Z_t - [Z,M]_t = (M \bullet Z)_t + (Z \bullet M)_t,$$

und sowohl M als auch Z sind lokale P-Martingale. Der zweite Summand ist ebenfalls ein lokales Q-Martingal, denn $1/Z$ ist ein Q-Martingal. Folglich ist L ein lokales Q-Martingal. Schreiben wir nun

$$X = M + A = \left(M - \int \frac{1}{Z}\,\mathrm{d}[Z,M]\right) + \left(\int \frac{1}{Z}\,\mathrm{d}[Z,M] + A\right) =: L + C,$$

so ist C als Integral bezüglich eines Integrators von beschränkter Variation, selbst wieder von beschränkter Variation, und folglich $X = L + C$ die gesuchte Zerlegung von X bezüglich Q. ∎

Beispiel 5 Es ist ein zentrales Problem der Finanzmathematik, zu einer gegebenen Zerlegung $X = M + A$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q zu finden, so dass X ein lokales Q-Martingal ist. In diesem Fall nennt man Q risikoneutrales Maß für X. Anschaulich gesprochen versucht man seine Sichtweise durch Neubewertung der Wahrscheinlichkeit einzelner Ereignisse so zu verändern, dass X ein lokales Martingal wird.

Wir wollen diese Fragestellung nun genauer untersuchen. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{F})$ ein gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum, welcher die üblichen Bedingungen bezüglich $\mathbb{F}$ erfüllt. Ferner sei ein Preisprozess

$$S = M + A$$

gegeben, wobei M ein lokales Martingal bezüglich P darstelle. Wir suchen nun ein zu P äquivalentes Maß Q, so dass S ein lokales Q-Martingal darstellt.

Um die Fragestellung etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass S eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung ist

$$\mathrm{d}S_s = h(s, S_s)\,\mathrm{d}B_s + b(s, S_s)\,\mathrm{d}s.$$

Man nennt h auch Volatilitätsfunktion und b Trendfunktion. Eine mögliche Wahl ist $h(s, S_s) = \sigma S_s$ und $g(s, S_s) = \mu S_s$, so wird S zu einem Black-Scholes-Preisprozess.

Sei nun Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, welches wir später geeignet wählen. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert $Z_\infty = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$, und durch $Z_t = \mathbf{E}_P(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t)$ ist ein P-Martingal gegeben, welches Q eindeutig bestimmt. In Kapitel 5 werden wir zeigen, dass zu jedem lokalen Martingal Z mit $\mathbf{E}Z = 1$ ein vorhersagbarer Prozess $J \in \mathcal{P}$ existiert, so dass

$$Z_t = 1 + \int_0^t J_s\,\mathrm{d}B_s.$$

Unter schwachen Voraussetzungen an J und Z ist dann der Quotient

$$H_s \coloneqq \frac{J_s}{Z_s}$$

wohldefiniert. Es gilt dann

$$Z_t = 1 + \int_0^t H_s Z_s\,\mathrm{d}B_s,$$

und mit der Definition

$$N_t \coloneqq \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$$

erhalten wir die Integralgleichung

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \,\mathrm{d}N_s.$$

Somit ist $Z = \mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(H \bullet B)$ das stochastische Exponential von N. Unser Ziel ist es nun, H so zu bestimmen, dass S bezüglich dem durch Z induzierten Wahrscheinlichkeitsmaß Q ein lokales Martingal darstellt. Gemäß dem Satz von Girsanovnov-Meyer 3.8 ist

$$L_t = \int_0^t h(s, S_s) \,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \frac{1}{Z_s} \,\mathrm{d}[Z, \int_0^\cdot h(r, S_r) \mathrm{d}B_r]_s$$

ein lokales Q-Martingal. Ferner gilt $Z = 1 + Z \bullet N$, also ist

$$[Z, \int_0^\cdot h(r, S_r) \,\mathrm{d}B_r]_t = \int_0^t h(r, S_r) Z_r \,\mathrm{d}[B, N]_r = \int_0^t h(r, S_r) Z_r H_r \,\mathrm{d}r,$$

denn $[B, N] = [B, H \bullet B] = H \bullet s$. Somit gilt

$$\begin{aligned} L_t &= \int_0^t h(s, S_s) \,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \frac{1}{Z_s} h(s, S_s) Z_s H_s \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t h(s, S_s) \,\mathrm{d}B_s - \int_0^t h(s, S_s) H_s \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t h(s, S_s) \,(\mathrm{d}B_s - H_s \,\mathrm{d}s). \end{aligned}$$

Um zu erreichen, dass

$$\begin{aligned} L_t \overset{!}{=} S_t &= \int_0^t h(s, S_s) \,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(s, S_s) \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t h(s, S_s) \left(\mathrm{d}B_s + \frac{b(s, S_s)}{h(s, S_s)} \mathrm{d}s\right), \end{aligned}$$

wählen wir also

$$H_s = -\frac{b(s, S_s)}{h(s, S_s)}.$$

So wird S ein lokales Q-Martingal. Setzen wir

$$M_t = B_t + \int_0^t \frac{b(s, S_s)}{h(s, S_s)} \,\mathrm{d}s,$$

so verifiziert man, dass auch M ein lokales Q-Martingal ist. Außerdem gilt $[M,M]_t = [B,B]_t = t$, also ist M nach dem Satz von Levy eine Standard-Brownsche Bewegung bezüglich Q, und es gilt

$$S_t = \int_0^t h(s,S_s)\,\mathrm{d}M_s.$$

Wir können S also als Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung interpretieren

$$\mathrm{d}S_t = h(t,S_t)\,\mathrm{d}M_t.$$

Zusammenfassend ist der Preisprozess S genau dann ein Martingal bezüglich eines gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q \sim P$, wenn das P-Martingal

$$Z_t = \mathbf{E}_P(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t), \qquad Z_\infty = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

als stochastisches Exponential $Z_t = \mathcal{E}(N)_t$ gegeben ist. Hierbei ist $N = H \bullet B$ gemäß obiger Rechnung festgelegt.

In der ursprünglichen Fragestellung, welche durch die Finanzmathematik motiviert wird, ist das Maß Q jedoch nicht bekannt. Die Idee ist nun, dieses über den Prozess Z zu definieren, welcher als stochastisches Exponential von N unabhängig von Q wohldefiniert ist. Können wir zeigen, dass Z durch diese Definition ein abschließbares P-Martingal ist, so lässt sich Q definieren durch

$$Q(A) = \int_A Z_\infty\,\mathrm{d}P.$$

Aus der Martingaleigenschaft folgt außerdem $\mathbf{E}Z_t = \mathbf{E}Z_0 = 1$, denn $Z_0 = 1$. Folglich ist Q automatisch ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Als Integral bezüglich einer Brownschen Bewegung ist N ein lokales Martingal. Somit ist auch $Z = \mathcal{E}(N)$ ein lokales Martingal. Wir benötigen also hinreichende Kriterien dafür, dass ein lokales Martingal ein Martingal ist. ■

Zur Konstruktion des äquivalenten Maßes Q muss häufig entschieden werden, ob das stochastische Exponential eines stetigen lokalen P-Martingals sogar ein P-Martingal ist. Hierzu können die Kriterien von Kazamaki und Novikov herangezogen werden.

3.2 **Lemma** *Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$. Dann ist $\mathcal{E}(M)$ ein Supermartingal und*

$$\mathbf{E}\left(\mathcal{E}(M)_t\right) \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0.$$

Falls $\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_t) = 1$ für alle $t \geqslant 0$, so ist $\mathcal{E}(M)$ sogar ein Martingal. ⋊

Beweis. Jedes nichtnegative lokale Martingal X ist ein Supermartingal. Um dies einzusehen, betrachte eine X lokalisierende Folge von Stoppzeiten (T_n). Fixieren wir ein $t \geqslant 0$, so folgt mit dem Lemma von Fatou und der Martingaleigenschaft von X^{T_n}, dass

$$0 \leqslant \mathbf{E}X_t = \mathbf{E} \lim_{n\to\infty} X_t^{T_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}X_t^{T_n} = \mathbf{E}X_0.$$

Also ist X_t integrierbar, und es folgt analog mit der bedingten Version des Lemmas von Fatou für $s \leqslant t$

$$\mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s) = \liminf_{n\to\infty} X_s^{T_n} = X_s.$$

Ist der Erwartungswert von X außerdem konstant, so ist X ein Martingal, denn aufgrund der Supermartingaleigenschaft ist $0 \leqslant X_s - \mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ und weiter

$$0 \leqslant \mathbf{E}(X_s - \mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s)) = \mathbf{E}X_s - \mathbf{E}X_t = 0.$$

Nun ist M ein lokales Martingal, also auch $X = \mathcal{E}(M)$, und mit dem bisher gezeigten folgt die Behauptung. ∎

Zu verifizieren, dass $\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_t) = 1$ für alle $t \geqslant 0$, ist in den Anwendungen meist eine große Herausforderung. Wir erarbeiten daher nun einige, eventuell einfacher zu verifizierende Kriterien, welche $\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_t) \equiv 1$ sicherstellen. Zunächst aber zwei Ungleichungen.

3.9 **Satz** *Sei M ein stetiges lokales Martingal und T eine beschränkte Stoppzeit – kurz $T \in \mathbf{b}\mathrm{ST}$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_T} \leqslant \left(\mathbf{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_T}\right)^{1/2}. \quad \rtimes$$

Beweis. Nach Satz 2.24 ist das stochastische Exponential von M gegeben durch

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathrm{e}^{M_t - \frac{1}{2}[M,M]_t} = \mathrm{e}^{M_t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[M,M]_t}.$$

Für eine beschränkte Stoppzeit T gilt folglich

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_T} = \mathcal{E}(M)_T^{1/2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_T}\right)^{1/2}.$$

Eine Anwendung der Hölderungleichung zusammen mit $\mathbf{E}\mathcal{E}(M)_T \leqslant 1$ ergibt schließlich

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_T} \leqslant (\mathbf{E}\mathcal{E}(M)_T)^{1/2}\left(\mathbf{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_T}\right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbf{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_T}\right)^{1/2}. \quad ∎$$

3.3 **Lemma** *Seien M ein stetiges lokales Martingal, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Falls*

$$\sup_{T \in \mathbf{b}\mathrm{ST}} \mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{p}-1} M_T} < \infty,$$

dann ist $\mathcal{E}(M)$ ein L^q-beschränktes Martingal. ⋊

Beweis. Seien p und q konjugiert mit $1 < p < \infty$, sowie

$$r := \frac{\sqrt{p} - 1}{\sqrt{p} + 1}, \qquad s := \frac{\sqrt{p} + 1}{2},$$

dann sind auch r und s konjugiert und es gilt

$$\left(q - \sqrt{\frac{q}{r}}\right) s = \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p} - 1)}$$

Weiterhin gilt

$$\mathcal{E}(M)^q = \mathrm{e}^{qM - \frac{q}{2}[M,M]} = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{q}{r}}M - \frac{q}{2}[M,M]} \mathrm{e}^{\left(q - \sqrt{\frac{q}{r}}\right)M}$$

Sei nun T eine beschränkte Zufallsvariable, dann folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathcal{E}(M)_T^q &\leqslant \left(\mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\sqrt{qr}M_T - \frac{qr}{2}[M,M]_T}\right)^{1/r} \left(\mathbf{E}\, \mathrm{e}^{s\left(q - \sqrt{\frac{q}{r}}\right)M_T}\right)^{1/s} \\ &\leqslant \left(\mathbf{E}\, \mathcal{E}\left(\sqrt{qr}M\right)_T\right)^{1/r} \left(\mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)} M_T}\right)^{1/s} \leqslant K < \infty, \end{aligned}$$

wobei K unabhängig von T ist, denn der erste Faktor ist $\leqslant 1$ nach Lemma 3.2 und der zweite ist nach Voraussetzung beschränkt. Anwendung von Satz 1.17 ergibt, dass $\mathcal{E}(M)^q$ ein L^1-beschränktes Martingal ist, also ist $\mathcal{E}(M)$ ein L^q-beschränktes Martingal. ∎

Mit Hilfe dieser Ungleichungen können wir nun ein handlicheres hinreichendes Kriterium dafür beweisen, dass ein lokales Martingal ein Martingal ist.

3.10 **Kazamaki-Kriterium** *Seien M ein stetiges lokales Martingal und*

$$\sup_{T \in \mathbf{b}\mathrm{ST}} \mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2} M_T} < \infty,$$

dann ist $\mathcal{E}(M)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. ⋊

Beweis. Sei $0 < a < 1$ und $p > 1$ mit $\sqrt{p}(\sqrt{p}-1)^{-1} < a^{-1}$, so folgt

$$\sup_{T\in\mathbf{b}\mathrm{ST}} \mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}aM_T} \leqslant \sup_{T\in\mathbf{b}\mathrm{ST}} \mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_T} < \infty.$$

Also ist $\mathcal{E}(aM)$ nach Lemma 3.3 ein L^q-beschränktes Martingal, wenn q und p konjugiert sind. Da $p > 1$, ist auch $q > 1$, und folglich ist $\mathcal{E}(aM)$ gleichgradig integrierbar. Somit existiert ein Abschluss $\mathcal{E}(aM)_\infty$ und $\mathbf{E}\,\mathcal{E}(aM)_\infty = \mathbf{E}\,\mathcal{E}(aM)_0 = 1$. Außerdem ist nach Lemma 3.2 $\mathcal{E}(M)$ ein nichtnegatives Supermatringal mit $\mathbf{E}\mathcal{E}(M)_t \leqslant 1$ für alle $t \geqslant 0$, also existiert $\mathcal{E}(M)_\infty$ f.s.. Darüber hinaus gilt

$$\mathcal{E}(aM) = \mathrm{e}^{aM-\frac{a^2}{2}[M,M]} = \mathrm{e}^{a^2M-\frac{a^2}{2}[M,M]}\mathrm{e}^{a(1-a)M} = \mathcal{E}(M)^{a^2}\mathrm{e}^{a(1-a)M},$$

also existiert auch $\mathrm{e}^{a(1-a)M_\infty} = \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}_t^{a(1-a)M}$ f.s.. Wenden wir die Hölderungleichung mit $\tilde{p} = a^{-2}$ und $\tilde{q} = (1-a^2)^{-1}$ an, erhalten wir

$$\mathbf{E}\,\mathcal{E}(aM)_\infty \leqslant (\mathbf{E}\,\mathcal{E}(M_\infty))^{a^2}\left(\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{a}{1+a}M_\infty}\right)^{1-a^2}.$$

Weiterhin ist

$$1-a^2 = 2a(1-a)\frac{1+a}{2a},$$

wobei $\frac{1+a}{2a} > 1$. Da $x \mapsto x^{\frac{1+a}{2a}}$ konvex ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichung

$$\left(\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{a}{1+a}M_\infty}\right)^{1-a^2} \leqslant \left(\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_\infty}\right)^{2a(1-a)}.$$

Zusammenfassend gilt also

$$1 = \mathbf{E}\,\mathcal{E}(aM)_\infty \leqslant (\mathbf{E}\,\mathcal{E}(M)_\infty)^{a^2}\left(\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_\infty}\right)^{2a(1-a)} \to \quad \mathbf{E}\,\mathcal{E}(M)_\infty, \qquad a \to 1,$$

daher ist $1 \leqslant \mathbf{E}\,\mathcal{E}(M_\infty) \leqslant 1$, und folglich ist $\mathcal{E}(M)$ ein Martingal nach Lemma 3.3 mit $\mathbf{E}\mathcal{E}(M)_t \equiv 1$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{E}(M)$ gleichgradig integrierbar ist. Zunächst gilt aufgrund der Martingaleigenschaft und der Nichtnegativität, dass

$$0 \leqslant \mathcal{E}(M)_s - \mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_t \mid \mathcal{F}_s), \qquad s \leqslant t.$$

Also gilt auch

$$0 \leqslant \mathcal{E}(M)_s - \mathbf{E}(\liminf_{t\to\infty}\mathcal{E}(M)_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathcal{E}(M)_s - \mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_\infty \mid \mathcal{F}_s).$$

Andererseits ist

$$0 \leqslant \mathbf{E}\mathcal{E}(M)_s - \mathbf{E}\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_\infty \mid \mathcal{F}_s) = 1-1 = 0,$$

und folglich $\mathcal{E}(M)_s = \mathbf{E}(\mathcal{E}(M)_\infty \mid \mathcal{F}_s)$. Also ist $\mathcal{E}(M)$ ein abschließbares Martingal und nach Satz 1.11 gleichgradig integrierbar. ∎

Die folgende Bedingung ist zwar einschränkender, häufig aber einfacher zu überprüfen.

3.11 **Novikov-Kriterium** *Sei M ein stetiges lokales Martingal und*

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_\infty} < \infty,$$

dann ist $\mathcal{E}(M)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. ⋊

Beweis. Wir müssen lediglich zeigen, dass das Kazamaki-Kriterium 3.10 erfüllt ist. Sei also T eine beschränkte Stoppzeit, so folgt mit Satz 3.9 und der Monotonie des quadratischen Variationsprozesses, dass

$$\left(\mathrm{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_T}\right)^2 \leqslant \mathrm{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_T} \leqslant \mathrm{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[M,M]_\infty}.$$

Die rechte Seite ist nach Voraussetzung endlich und zwar unabhängig von T, somit ist das Kazamaki-Kriterium erfüllt. ∎

Fortsetzung von Beispiel 5 Unser Ziel ist es zu zeigen, dass das stochastische Exponential $Z = \mathcal{E}(N)$ ein P-Martingal ist, wobei $N = H \bullet B$. Wir betrachten dazu

$$[N,N]_\infty = \int_0^\infty H_s^2\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \left(\frac{b(s,S_s)}{h(s,S_s)}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

Sofern also H_s in s quadratisch integrierbar ist, folgt

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[N,N]_\infty} < \infty,$$

und das Novikov-Kriterium ist erfüllt.

Betrachten wir S_t auf einem endlichen Zeitintervall $[0,T]$, so ist

$$\left|\frac{b(s,S_s)}{h(s,S_s)}\right| \leqslant K < \infty$$

eine grobe aber hinreichende Bedingung dafür, dass Z ein P-Martingal ist. Für den Black-Scholes-Preisprozess mit $b = \mu S$ und $h = \sigma S$ ist dies offenbar der Fall. ■

Der folgende Satz betrifft speziell Brownsche Bewegungen X mit Drift.

3.12 **Satz von Girsanov** *Seien B eine Standard-Brownsche Bewegung, $H \in \mathbb{L}$ ein beschränkter Prozess und*

$$X_t \coloneqq \int_0^t H_s \, \mathrm{d}s + B_t .$$

Sei $T > 0$ fest. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q sei definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\left(- \int_0^T H_s \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s \right).$$

Dann ist $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ unter Q eine Standard-Brownsche Bewegung. $\rtimes$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass das Maß Q wohldefiniert ist. Sei also $T > 0$ fest und

$$Z_T \coloneqq \exp\left(- \int_0^T H_s \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s \right).$$

Setzen wir $N_t \coloneqq -\int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$, so ist N ein stetiges lokales Martingal bezüglich P. Außerdem gilt

$$[N,N]_T = \int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s < \infty,$$

denn H ist beschränkt. Also ist $\mathcal{E}(N)$ ein gleichgradig integrierbares P-Martingal nach dem Novikov-Kriterium 3.11, und nach der Formel für das stochastische Exponential 2.24 gilt

$$\mathcal{E}(N)_t = \exp\left(- \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s \right) = \mathbf{E}_P(Z_T \mid \mathcal{F}_t) \eqqcolon Z_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ferner gilt $\mathbf{E}_P Z_T = \mathbf{E}_P Z_0 = 1$. Somit durch $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P = Z_T$ ein wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß Q gegeben.

Wir betrachten nun den Prozess

$$X_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}s + B_t .$$

Der erste Summand ist von beschränkter Variation, und B ist ein P-Martingal. Also ist der Satz von Girsanov-Meyer 3.8 anwendbar, der besagt, dass $X = L + C$, wobei das lokale Q-Martingal L gegeben ist durch

$$L_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} \, \mathrm{d}[Z,B]_s .$$

Als stochastisches Exponential erfüllt Z die Integralgleichung

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_{s-} H_s \,\mathrm{d}B_s = 1 - \int_0^t Z_{s-} \,\mathrm{d}N_s.$$

Somit erhalten wir für das Differential des Kovariationsprozesses

$$\mathrm{d}[Z, B] = -\mathrm{d}[(ZH) \bullet B, B] = ZH \,\mathrm{d}s,$$

und L nimmt folgende Form an,

$$L_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} Z_s H_s \,\mathrm{d}s = B_t - \int_0^t H_s \,\mathrm{d}s = X_t.$$

Also ist X tatsächlich ein lokales Q-Martingal. Schreiben wir $A = -\int_0^t H_s \,\mathrm{d}s$, so folgt

$$[X, X]_t = [B + A, B + A]_t = [B, B]_t = t,$$

denn A ist von beschränkter Variation und B ist stetig. Folglich ist X eine Standard-Brownsche-Bewegung bezüglich Q nach dem Satz von Lévy 2.26, und dies war zu zeigen. ∎

Bemerkung. Wir haben H als beschränkt vorausgesetzt, damit wir das Novikov-Kriterium leicht erfüllen können. Dazu würde es auch schon genügen, dass

$$\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Die Voraussetzungen an H können aber noch wesentlich weiter abgeschwächt werden. ⊸

4 Stochastische Integration vorhersagbarer Prozesse

Unser stochastisches Integral haben wir zunächst für einfach vorhersagbare Integranden definiert, und anschließend unter Verwendung der Stetigkeit des Integrals auf linksstetige Prozesse fortgesetzt. Technisch entspricht dieses Integral dem Riemann-Integral, welches ebenfalls nur für Funktionen erklärt werden kann, deren Unstetigkeitsstellen Maß Null haben. Wir wollen das stochastische Integral nun auf eine wesentlich größere Klasse von Integranden ausdehnen, nämlich die vorhersagbaren Prozesse. Technisch entspricht dieser Schritt der Konstruktion des Lebesgue-Integrals, welches auch Funktionen mit Unstetigkeitsstellen von positivem Maß zulässt – beispielsweise die Dirichletfunktion. Es stellt sich heraus, dass man die Klasse der Integranden nicht wesentlich über die vorhersagbaren Prozesse hinaus vergrößern kann, wenn die Integration abgeschlossen unter lokalen Martingalen bzw. Semimartingalen sein soll.

4-A Integration beschränkter Semimartingale

Um die Notation etwas zu vereinfachen, wollen wir in Zukunft immer voraussetzen, dass X ein Semimartingal ist mit $X_0 = 0$. Haben wir einmal das stochastische Integral für diese Klasse von Integratoren erklärt, so erhalten wir direkt ein Integral bezüglich beliebiger Semimartingale $X = \hat{X} + X_0$, indem wir definieren

$$\int_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}\hat{X}_s + H_0 X_0.$$

■ Die Topologie der Integratoren

In Kapitel 2-C haben wir die einfach vorhersagbaren Prozesse $\mathbb{S}$ mit der ucp-Topologie versehen, und das Integral als stetige Abbildung

$$J_X : \mathbb{S}_{\mathrm{ucp}} \to \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}$$

definiert. Da die einfach vorhersagbaren Prozesse $\mathbb{S}$ in der ucp-Topologie dicht in den linksstetigen Prozessen $\mathbb{L}$ liegen, ließ sich J_X unter Verwendung der Stetigkeit von $\mathbb{S}$ auf ganz $\mathbb{L}$ fortsetzen.

Analog wollen wir nun eine geeignete Topologie auf den vorhersagbaren Prozessen $\mathcal{P}$ definieren, so dass einerseits $\mathbb{L}$ bezüglich dieser Topologie dicht in $\mathcal{P}$ liegt, und andererseits das bereits bekannte stochastische Integral Cauchyfolgen (H^n) dieser Topologie auf Cauchyfolgen $(H^n \bullet X)$ abbildet. Mit Hilfe der Vollständigkeit des zugrunde liegenden Raumes lässt sich dann ein Integral für allgemeine Integranden aus $\mathcal{P}$ als Limes der Approximationen $H^n \bullet X$ definieren.

Erinnern wir uns zunächst an die Definition der Vorhersagbarkeit 3.2. Zunächst bezeichnet $\mathcal{P}$ die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, so dass alle Prozesse aus $\mathbb{L}$ messbar sind. Interpretieren wir also einen Prozess X als Abbildung

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R},$$

so können wir die vorhersagbare σ-Algebra auch darstellen als

$$\mathcal{P} = \sigma\left(\bigcup_{X \in \mathbb{L}} \mathcal{P}_X\right), \qquad \mathcal{P}_X = X^{-1}(\mathcal{B}).$$

Die $\mathcal{P}$-messbaren Prozesse bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathcal{P}$, wobei aber aus dem Zusammenhang stets klar sein sollte, was gemeint ist.

Wir wollen nun eine geeignete Topologie auf $\mathcal{P}$ definieren. In Kapitel 2 genügte es, für alle möglichen Integratoren gemeinsam eine einzige Topologie zu betrachten, die ucp-Topologie. Unabhängig vom betrachteten Semimartingal X ist die Abbildung

$$J_X : \mathbb{S} \to \mathbb{D}$$

bezüglich dieser Topologie stetig. Dies ist nicht mehr möglich, wenn wir das Integral noch weiter verallgemeinern wollen. Dazu müssen wir die Topologie einzeln an den jeweiligen Integrator anpassen.

Bemerkung zur Notation. A. Nach Satz 3.4 lässt sich jedes spezielle Semimartingal eindeutig in ein lokales Martingal und einen vorhersagbaren Prozess von beschränkter Variation zerlegen. Diese kanonische Zerlegung bezeichnen wir im Folgenden mit

$$X = \overline{N} + \overline{A}.$$

B. Das Differential des Variationsprozesses $(|\overline{A}|_t)_{t \geqslant 0}$ bezeichnen wir mit $|\mathrm{d}\overline{A}_s|$, um mit der einschlägigen Literatur kompatibel zu sein. Gemeint ist damit $\mathrm{d}|\overline{A}|_s$. ⊸

4.1 **Definition** *Die $\mathcal{H}^2$-Norm eines speziellen Semimartingals $X = \overline{N} + \overline{A}$ ist definiert durch*

$$\|X\|_{\mathcal{H}^2} := \left\| [\overline{N}, \overline{N}]_\infty^{1/2} \right\|_{L^2} + \left\| \int_0^\infty |\mathrm{d}\overline{A}_s| \right\|_{L^2},$$

falls dieser Ausdruck endlich ist. Der Raum der speziellen Semimartingale mit endlicher $\mathcal{H}^2$-Norm wird mit $\mathcal{H}^2$ bezeichnet. ⋊

Nachweis der Normeigenschaften. Die speziellen Semimartingale bilden einen linearen Raum, welcher die Menge $\mathcal{H}^2$ enthält. Die Homogenität der Abbildung $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ und die Dreiecksungleichung sind offensichtlich, also ist $\mathcal{H}^2$ sogar ein linerarer Teilraum, und $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ ist dort eine Halbnorm. Sei $X = \overline{N} + \overline{A} \in \mathcal{H}^2$, dann gilt insbesondere

$$\left\| [\overline{N}, \overline{N}]_\infty^{1/2} \right\|_{L^2}^2 = \mathbf{E}[\overline{N}, \overline{N}]_\infty < \infty.$$

Mit Satz 2.18 folgt, dass N ein L^2-Martingal ist mit $\|[\overline{N}, \overline{N}]_t^{1/2}\|_{L^2}^2 = \mathbf{E}[\overline{N}, \overline{N}]_t = \mathbf{E}N_t^2$ für alle $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Sei also $\|X\|_{\mathcal{H}^2} = 0$, dann gilt $\mathbf{E}N_\infty^2 = 0$, und folglich ist $N_t = 0$ f.s. für alle t. Weiterhin ist $\|\int_0^\infty |\mathrm{d}A_s|\|_{L^2} = 0$, d.h. $|A|_t = 0$ f.s. für alle $t \geqslant 0$ und folglich ist $\overline{A}$ konstant, also $\overline{A} \equiv \overline{A}_0 = 0$. Somit folgt aus $\|X\|_{H^2} = 0$ auch $X = 0$. ∎

Um die Funktionalanalysis effektiv anwenden zu können, benötigen wir die Vollständigkeit des Raumes $\mathcal{H}^2$.

4.1 **Satz** *Der Raum $\mathcal{H}^2$ ist ein Banachraum.* ⋊

Beweis. Aufgrund der Semimartingaleigenschaft zerfällt $\mathcal{H}^2$ in zwei Summanden

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{M}^2 \oplus \mathcal{A}, \qquad \mathcal{M}^2 := \{X = \overline{N} \in \mathcal{H}^2\}, \quad \mathcal{A} := \{X = \overline{A} \in \mathcal{H}^2\}.$$

Die Norm auf $\mathcal{H}^2$ entspricht gerade der Norm der direkten Summe, es genügt daher zu zeigen, dass jeder Summand vollständig ist.

Sei also $\overline{N} \in \mathcal{M}^2$, dann ist $\overline{N}$ ein L^2-Martingal welches durch $\overline{N}_t = \mathbf{E}(\overline{N}_\infty \mid \mathcal{F}_t)$ mit seinem Abschluss identifiziert werden kann. Außerdem gilt $\|\overline{N}\|_{\mathcal{H}^2} = \|\overline{N}_\infty\|_{L^2}$, also ist die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}^2 \to L^2, \qquad \overline{N} \mapsto \overline{N}_\infty,$$

ein isometrischer Isomorphismus. Aus der Vollständigkeit von L^2 folgt, dass $\mathcal{M}^2$ vollständig ist.

Wir zeigen als nächstes, dass jede absolut konvergente Reihe in $\mathcal{A}$ konvergiert. Dann folgt die Vollständigkeit, denn sei eine Cauchyfolge (A^n) in $\mathcal{H}^2$ gegeben, so können wir eine Teilfolge (A^{n_k}) so wählen, dass $\|A^{n_k} - A^{n_{k-1}}\|_{\mathcal{H}^2} \leqslant 2^{-k}$ ist. Also konvergiert $\sum_{i\geqslant 1} \|A^{n_i} - A^{n_{i-1}}\|_{\mathcal{H}^2}$ und folglich existiert existiert der $\mathcal{H}^2$-Limes

$$\lim_{k\to\infty} A^{n_k} = A^0 + \sum_{i\geqslant 1} (A^{n_i} - A^{n_{i-1}})$$

Also hat die Cauchyfolge (A^n) eine konvergente Teilfolge und ist daher selbst konvergent.

Sei nun $\sum_{n\geqslant 1} A^n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathcal{A}$. Mit der L^2-Dreiecksungleichung folgt

$$\left\|\sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n|\right\|_{L^2} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \left\|\int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n|\right\|_{L^2} = \sum_{n\geqslant 1} \|A^n\|_{\mathcal{H}^2} < \infty,$$

also ist $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n|$ f.s. endlich. Insbesondere gilt dann

$$\sum_{n\geqslant 1} |A_t^n| = \sum_{n\geqslant 1} |A_t^n - A_0^n| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |A^n|_t \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n| < \infty \quad \text{f.s.},$$

wobei die Ausnahmemenge nicht von t abhängt. Somit existiert der Limes punktweise

$$A \coloneqq \sum_{n\geqslant 1} A^n \quad \text{f.s..}$$

Alle A^n sind $\mathcal{P}$-messbar, also ist es auch A, d.h. A ist vorhersagbar. Außerdem ist A von beschränkter Varition, denn sei $t > 0$ fest und $\sigma = (T_i^m)$ eine Partition von $[0, t]$, welche gegen die Identität konvergiert, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geqslant 1} |A_{T_i^m} - A_{T_{i-1}^m}| &= \sum_{i\geqslant 1} \left|\sum_{n\geqslant 1} (A^n_{T_i^m} - A^n_{T_{i-1}^m})\right| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1} \sum_{i\geqslant 1} |A^n_{T_i^m} - A^n_{T_{i-1}^m}| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1} |A^n|_t \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n| < \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist $A \in \mathcal{H}^2$. Setzen wir nun $R^N = A - \sum_{1\leqslant n\leqslant N} A^n$, so ist $R^N \in \mathcal{H}^2$, und

$$\sum_{i\geqslant 1} |R^{T_i^m} - R^{T_{i-1}^m}| \leqslant \sum_{n\geqslant N} \sum_{i\geqslant 1} |A^n_{T_i^m} - A^n_{T_{i-1}^m}| \leqslant \sum_{n\geqslant N} \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s^n|.$$

Die rechte Seite bildet eine L^2-integrierbare Majorante, also gilt auch

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} A^n \xrightarrow{\mathcal{H}^2} A,$$

und $\mathcal{A}$ ist vollständig. ∎

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass die Integration abgeschlossen in $\mathcal{H}^2$ ist, d.h. dass $H \bullet X \in \mathcal{H}^2$, wenn $X \in \mathcal{H}^2$ und $H \in \mathrm{b}\mathbb{L}$. Dazu benötigen wir folgendes Zwischenergebnis.

4.1 **Lemma** *Sei A ein vorhersagbarer FV Prozess und $H \in \mathbb{L}$ mit $\mathbf{E}\int_0^\infty |H_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty$. Dann ist der stochastische Prozess $\left(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}A_s\right)_{t \geqslant 0}$ FV und vorhersagbar.* ⋊

Beweis. Sei (σ_n) eine Folge zufälliger Partitionen, welche gegen die Identität konvergiert. So gilt

$$\sum_{i=0}^{k_n - 1} H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i}) \xrightarrow{\text{ucp}} \int H_s\,\mathrm{d}A_s.$$

Da A vorhersagbar und H linksstetig ist, ist jedes $H_{T_i^n}(A_t^{T_{i+1}^n} - A_t^{T_i})$ vorhersagbar, und folglich auch der stochastische Limes $H \bullet A$.

Weiterhin ist nach Voraussetzung $\mathbf{E}\int_0^\infty |H_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty$, also gilt $\int_0^\infty |H_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty$ f.s., und daher gilt für jedes $t \geqslant 0$

$$\mathbf{Var}\left(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}A_s\right) \leqslant \int_0^\infty |H_s|\,|\mathrm{d}A_s| < \infty \quad \text{f.s.}. \qquad ∎$$

Seien nun $X \in \mathcal{H}^2$ und $H \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ gegeben, so ist das stochastische Integral $H \bullet X$ wohldefiniert, und zerfällt unter der kanonischen Zerlegung von X in

$$H \bullet X = H \bullet \overline{N} + H \bullet \overline{A}.$$

Dabei ist $H \bullet \overline{N}$ wieder ein lokales Martingal, und $H \bullet \overline{A}$ ist ein vorhersagbarer FV-Prozess. Also ist $H \bullet X$ nach Definition 3.3 wieder ein spezielles Semimartingal, und die Zerlegung ist nach Satz 3.4 eindeutig.

Nach Voraussetzung ist H beschränkt, also gilt $|H| \leqslant b$ und folglich ist

$$\|[H \bullet \overline{N}, H \bullet \overline{N}]_\infty^{1/2}\|_{L^2}^2 = \mathbf{E}(H^2 \bullet [\overline{N}, \overline{N}])_\infty \leqslant b^2 \|[\overline{N}, \overline{N}]_\infty^{1/2}\|_{L^2}^2, \tag{1}$$

sowie

$$\left\| \int_0^\infty |\mathrm{d}(H \bullet \overline{A})_s| \right\|_{L^2} \leqslant b \left\| \int_0^\infty |\mathrm{d}\overline{A}_s| \right\|_{L^2}. \tag{2}$$

Somit ist $H \bullet X \in \mathcal{H}^2$. Darüber hinaus stellen wir fest, dass sowohl $H \bullet \overline{A}$ als auch $[N, N]$ von beschränkter Variation sind. Die Integrale in (1) und (2) sind folglich als Lebesgue-Stieltjes-Integrale erklärt, auch wenn H nicht linksstetig sondern lediglich $\mathcal{P}$-messbar ist. Wir versuchen daher, das Integral $H \bullet X$ auch für allgemeine Integranden aus $\mathcal{P}$ zu erklären.

■ Die Topologie der Integranden

Wir definieren nun eine Topologie auf $\mathrm{b}\mathcal{P}$, welche an den Integrator X angepasst ist, und zeigen, dass $\mathrm{b}\mathbb{L}$ bezüglich dieser Topologie dicht in $\mathrm{b}\mathcal{P}$ liegt. Weiterhin können wir zeigen, dass bei einer Approximation von $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ durch $H^n \in \mathrm{b}\mathbb{L}$, die Integrale $H^n \bullet X$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}^2$ bilden, welche aufgrund der Vollständigkeit konvergiert. Schließlich ist der Grenzwert von $H^n \bullet X$ unabhängig von der gewählten Approximation, und das Integral von $H \bullet X$ als dieser Grenzwert wohldefiniert.

4.2 **Definition** *Der Prozess $X \in \mathcal{H}^2$ besitze die kanonischen Zerlegung $X = \overline{N} + \overline{A}$. Für $H, J \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ wird durch*

$$d_X(H, J) \coloneqq \left\| \left(\int_0^\infty (H_s - J_s)^2 \,\mathrm{d}[\overline{N}, \overline{N}]_s \right)^{1/2} \right\|_{L^2} + \left\| \int_0^\infty |H_s - J_s| \,|\mathrm{d}\overline{A}_s| \right\|_{L^2}$$

eine Metrik auf dem Raum $\mathrm{b}\mathcal{P}$ definiert. ⋊

Bemerkung. Die Metrik d_X wird durch eine Norm induziert, welche man durch

$$\|H\|_{d_X} \coloneqq d_X(H, 0).$$

aus der Metrik zurück erhält. ⊸

4.2 **Satz** *Für $X \in \mathcal{H}^2$ ist $\mathrm{b}\mathbb{L}$ dicht in $\mathrm{b}\mathcal{P}$ unter der Metrik d_X.* ⋊

Zum Beweis von Satz 4.2 verwendet folgendes Theorem über monotone Klassen beschränkter Funktionen – siehe [1, 7].

Monotone-Klassen-Theorem *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge, und $\mathcal{H}$ eine monotone Klasse beschränkter reellwertiger Funktionen auf $\mathcal{T}$, d.h.*

1. *$\mathcal{H}$ ist ein reeller Vektorraum,*

2. $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \in \mathcal{H}$*, und*

3. *falls* $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ *mit* $f_n \in \mathcal{H}$*, und* $f_\infty = \lim_n f_n$ *punktweise existiert und beschränkt ist, so gilt* $f_\infty \in \mathcal{H}$*.*

Ist nun $\mathcal{M}$ *eine multiplikativ abgeschlossene Klasse reellwertiger Funktionen auf* $\mathcal{T}$ *mit* $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$*, so enthält* $\mathcal{H}$ *alle beschränkten* $\sigma(\mathcal{M})$*-messbaren Funktionen, wobei*

$$\sigma(\mathcal{M}) := \sigma\Big(\{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{B}\}\Big). \quad \rtimes$$

Beweis von Satz 4.2 Zu zeigen ist, dass für jedes $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein Prozess $Y \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ existiert mit $d_X(H, Y) < \varepsilon$. Wir definieren dazu

$$\mathcal{H} := \{H \in \mathrm{b}\mathcal{P} : \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } Y \in \mathrm{b}\mathbb{L} \text{ mit } d_X(H, Y) < \varepsilon\},$$

und unser Ziel ist es zu zeigen, dass $\mathcal{H} = \mathrm{b}\mathcal{P}$ oder äquivalent, dass $\mathcal{H}$ alle Prozesse $Y : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ enthält, die messbar bezüglich der durch $\mathcal{M} := \mathrm{b}\mathbb{L}$ auf $\mathcal{T} := \mathbb{R}_+ \times \Omega$ erzeugten σ-Algebra sind. Sofern wir alle Voraussetzungen des monotone Klassen Theorems verifizieren können, folgt die Behauptung.

Zunächst ist $\mathcal{M} = \mathrm{b}\mathbb{L}$ eine multiplikative Klasse beschränkter Funktionen. Weiterhin ist $\mathcal{H}$ ein reeller Vektorraum beschränkter Funktionen auf $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, mit $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \in \mathcal{H}$, denn $\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \in \mathrm{b}\mathbb{L}$. Sei nun $H^1 \leqslant H^2 \leqslant \dots$ eine Folge von Prozessen in $\mathcal{H}$, welche punktweise gegen einen beschränkten Prozess $H = \lim_{n\to\infty} H^n$ konvergiert. So ist H ebenfalls $\mathrm{b}\mathcal{P}$-messbar, und da $|H - H^n| \leqslant |H| \leqslant b$ eine integrierbare Majorante ist, folgt mit dem Satz von Lebesgue, dass $d_X(H^n, H) \to 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $n_\varepsilon \geqslant 1$ mit

$$d_X(H, H^n) < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant n_\varepsilon.$$

Da jedes $H^n \in \mathcal{H}$ ist, können wir ein $n_0 \geqslant n_\delta$ und ein $Y \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ wählen, so dass $d_X(H^n, J) < \varepsilon/2$. Somit gilt

$$d_X(H, J) \leqslant d_X(H, H^n) + d_X(H^n, J) < \varepsilon,$$

also ist $X \in \mathcal{H}$. Somit ist $\mathcal{H}$ monoton, und das Monotone-Klassen-Theorem ist anwendbar. Folglich liegt $\mathrm{b}\mathbb{L}$ dicht in $\mathrm{b}\mathcal{P}$. ▮

Die an den Integrator angepasste Topologie auf $\mathrm{b}\mathcal{P}$ haben wir gerade so definiert, dass für eine Cauchyfolge (H^n) unter d_X die Integrale $(H^n \bullet X)$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}^2$ bilden. Hätten wir für alle Integratoren eine einzige Topologie gewählt, wäre dies so nicht möglich gewesen.

4.3 **Satz** *Sind $X \in \mathcal{H}^2$ und (H^n) eine Cauchy-Folge unter d_X, dann ist $(H^n \bullet X)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}^2$.* ⋊

Beweis. Offenbar gilt $\|H^n \bullet X - H^m \bullet X\|_{\mathcal{H}^2} = d_X(H^n, H^m)$. ∎

Approximieren wir nun einen Prozess $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ durch eine Folge von Prozessen $H \in \mathrm{b}\mathbb{L}$, so bildet H^n eine Cauchyfolge bezüglich d_X, und $H^n \bullet X$ konvergiert in $\mathcal{H}^2$ aufgrund der Vollständigkeit. Um das Integral von H gegen X als diesen Grenzwert definieren zu können, müssen wir noch sicherstellen, dass der Grenzwert unabhängig von der gewählten Approximation ist.

4.4 **Satz** *Seien $X \in \mathcal{H}^2$ und $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$, ferner seien (H^n) und (J^m) zwei Folgen in $\mathrm{b}\mathbb{L}$ mit $H^n \xrightarrow{d_X} H$ und $H^m \xrightarrow{d_X} H$. Dann konvergieren $H^n \bullet X$ und $J^m \bullet X$ gegen den selben Grenzwert in $\mathcal{H}^2$.* ⋊

Beweis. Seien also H^n und J^m zwei Approximationen von H in $\mathrm{b}\mathbb{L}$, dann gilt nach Satz 4.3, dass

$$H^n \bullet X \xrightarrow{\mathcal{H}^2} Y, \qquad J^m \bullet X \xrightarrow{\mathcal{H}^2} Z.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren daher $n, m \geqslant 1$, so dass

$$\begin{aligned}
\|Y - Z\|_{\mathcal{H}^2} &\leqslant \|Y - H^n \bullet X\|_{\mathcal{H}^2} + \|H^n \bullet X - J^m \bullet X\|_{\mathcal{H}^2} + \|J^m \bullet X - Z\|_{\mathcal{H}^2} \\
&\leqslant 2\varepsilon + d_X(H^n, J^m) \\
&\leqslant 2\varepsilon + d_X(H^n, H) + d_X(J^m, H) \leqslant 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt $Y = Z$ und dies war zu zeigen. ∎

■ Erweiterung des Integrals

Mit dieser Vorbereitung können wir nun das stochastische Integral auf Integranden aus $\mathrm{b}\mathcal{P}$ ausdehnen.

4.3 **Definition** *Sei X ein Semimartingal in $\mathcal{H}^2$ und $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Ferner sei (H^n) eine Folge in $\mathrm{b}\mathbb{L}$ mit $H^n \xrightarrow{d_X} H$. Dann ist das stochastische Integral $H \bullet X$ definiert als das (eindeutige) Semimartingal*

$$H \bullet X \coloneqq \mathcal{H}^2\text{-}\lim_{n\to\infty} H^n \bullet X.$$

Wir schreiben auch $H \bullet X = \left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s\right)_{t\geqslant 0}$. ⋊

Im Folgenden wollen wir möglichst viele Eigenschaften des stochastischen Integrals aus Kapitel 2 auch für dieses Integral nachweisen. Folgender Satz wird uns dies an vielen Stellen erleichtern.

4.5 **Satz** *Für jedes Semimartingal $X \in \mathcal{H}^2$ gilt*

$$\mathbf{E}(X^*)^2 \leqslant 8\|X\|^2_{\mathcal{H}^2}, \qquad X^* = \sup_{t\geqslant 0}|X_t|.$$ ⋊

Beweis. Sei $X = \overline{N} + \overline{A}$ die kanonische Zerlegung, so gilt $X^* \leqslant \overline{N}^* + \overline{A}^*$. Offenbar gilt $|A_t| \leqslant \int_0^t |\mathrm{d}A_s|$ für alle $t \geqslant 0$, also gilt dies auch für das Supremum. Weiterhin ist $\overline{N}$ ein L^2-Martingal, daher können wir die L^2-Ungleichung 1.19 von Doob anwenden und erhalten die Abschätzung

$$\mathbf{E}(\overline{N}^*)^2 \leqslant 4\mathbf{E}\overline{N}^2_\infty = 4\|[\overline{N},\overline{N}]^{1/2}_\infty\|_{L^2}$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^*)^2 &\leqslant 2\left(\mathbf{E}(\overline{N}^*)^2 + \mathbf{E}(\overline{A}^*)^2\right)\\ &\leqslant 8\left(\left\|[\overline{N},\overline{N}]^{1/2}_\infty\right\|^2_{L^2} + \left\|\int_0^\infty |\mathrm{d}A_s|\right\|^2_{L^2}\right) \leqslant 8\|X\|^2_{\mathcal{H}^2}.\end{aligned}$$ ∎

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir, dass Konvergenz in $\mathcal{H}^2$ f.s. gleichmäßige Konvergenz in t einer Teilfolge ergibt.

4.1 **Korollar** *Seien $X^n, X \in \mathcal{H}^2$ mit $X^n \xrightarrow{\mathcal{H}^2} X$. Dann existiert eine Teilfolge (X^{n_k}) mit*

$$(X^{n_k} - X)^* \xrightarrow{f.s.} 0.$$ ⋊

Beweis. Nach Satz 4.5 gilt $\mathbf{E}(X^n - X)^* \to 0$, also existiert eine Teilfolge (n_k), so dass $(X^{n_k} - X) \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$. ∎

Viele der in Kapitel 2 für das Integral mit Integranden $H \in \mathrm{b}\mathbb{L}$ geltenden Eigenschaften gelten auch für Integrale mit Integranden $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$.

4.6 **Linearität des Integrals** *Seien $X, Y \in \mathcal{H}^2$ und $H, K \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Dann gelten*

$$(H + K) \bullet X = H \bullet X + K \bullet X,$$
$$H \bullet (X + Y) = H \bullet X + H \bullet Y. \quad \rtimes$$

Beweis. Sowohl $\mathcal{H}^2$ als auch $\mathrm{b}\mathcal{P}$ sind lineare Räume. Die Linearität des Integrals im Integranden ist offensichtlich. Sei nun H^n eine Folge in $\mathrm{b}\mathbb{L}$ mit $H^n \xrightarrow{d_{X+Y}} H$. Dann gilt auch $H^n \xrightarrow{d_X} H$ und $H^n \xrightarrow{d_Y} H$, so dass die Linearität im Integrator folgt. ∎

4.7 **Satz** *Sei T eine Stoppzeit. Dann gilt*

$$(H \bullet X)^T = H\mathbf{1}_{(0,T]} \bullet X = H \bullet (X^T). \quad \rtimes$$

Beweis. Sei T eine Stoppzeit, dann ist $\mathbf{1}_{(0,T]} \in \mathrm{b}\mathbb{L} \subset \mathrm{b}\mathcal{P}$, und X^T ist ein spezielles Semimartingal mit $X^T \in \mathcal{H}^2$. Sei nun (H^n) eine Folge in $\mathrm{b}\mathbb{L}$ mit $H^n \xrightarrow{d_X} H$, dann gilt

$$(H^n \bullet X)^T = (H^n\mathbf{1}_{(0,T]}) \bullet X = H^n \bullet X^T.$$

Weiterhin gilt $H^n \bullet X^T \xrightarrow{\mathcal{H}^2} H \bullet X$, und da $d_X(H^n\mathbf{1}_{(0,T]}, H\mathbf{1}_{(0,T]}) \leqslant d_X(H^n, H)$, gilt auch $(H^n\mathbf{1}_{(0,T]}) \bullet X \xrightarrow{\mathcal{H}^2} (H\mathbf{1}_{(0,T]}) \bullet X$. Letztlich gilt aufgrund der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}(H^n \bullet X)^T - (H \bullet X)^T &= ((H^n - H) \bullet X)^T \\ &= ((H^n - H) \bullet \overline{N})^T + ((H^n - H) \bullet \overline{A})^T.\end{aligned}$$

Also folgt für die Norm

$$\begin{aligned}\|((H^n - H) \bullet X)^T\|_{\mathcal{H}^2} &= \|[(H^n - H) \bullet X, (H^n - H) \bullet X]_T^{1/2}\|_{L^2} \\ &\quad + \|\int_0^T |H^n - H|_s |\mathrm{d}A_s|\|_{L^2} \\ &\leqslant \|(H^n - H) \bullet X\|_{\mathcal{H}^2} \to 0. \quad ∎\end{aligned}$$

Auch bezüglich Regularität verhält sich das erweiterte stochastische Integral »wie üblich« – allein die Unstetigkeitsstellen des Integrators bestimmen die Unstetigkeitsstellen des Integrals.

4.8 **Satz** *Seien $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ und $X \in \mathcal{H}^2$. Der Sprungprozess $(\Delta(H \bullet X)_s)_{s \geqslant 0}$ ist ununterscheidbar von $(H \bullet (\Delta X_s))_{s \geqslant 0}$.* $\rtimes$

Beweis. Folgt unter Verwendung von Satz 2.11 und den Konvergenzeigenschaften des Integrals. ⋊

Wir benötigen insbesondere folgende Version von Satz 4.7 für die linksstetige Version des gestoppten Integrators.

4.2 **Korollar** *Seien $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$, $X \in \mathcal{H}^2$ und T eine endliche Stoppzeit. Dann gilt*

$$H \bullet (X^{T-}) = (H \bullet X)^{T-}. \quad \rtimes$$

Für Integratoren X von beschränkter Variation ist das Integral $H \bullet X$ auch ohne den in diesem Kapitel entwickelten Unterbau bereits als Lebesgue-Stieltjes-Integral erklärt. Darüber hinaus stimmt es mit dem in diesem Abschnitt konstruierten Integral überein.

4.9 **Satz** *Seien $X \in \mathcal{H}^2$ mit Pfaden von beschränkter Variation auf kompakten Mengen und $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Dann stimmt $H \bullet X$ mit dem pfadweise definierten Lebesgue-Stieltjes-Integral überein.* ⋊

Auch für Satz 2.13 existiert eine direkte Verallgemeinerung.

4.10 **Assoziativität** *Seien $X \in \mathcal{H}^2$ und $H, K \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Dann gilt $K \bullet X \in \mathcal{H}^2$ und*

$$H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X. \quad \rtimes$$

Während das stochastische Integral bezüglich eines Martingals im allgemeinen lediglich ein lokales Martingal darstellt, gilt für den Fall von Integratoren aus $\mathcal{H}^2$ deutlich mehr.

4.11 **Satz** *Seien $X \in \mathcal{H}^2$ ein Martingal (und damit ein quadratintegrierbares Martingal) und $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Dann ist auch $H \bullet X$ ein quadratintegrierbares Martingal.* ⋊

Mit dem folgenden Satz – ein Analogon zu Satz 2.19 – lässt sich die Berechnung des Kovariationsprozesses zweier stochastischer Integrale auf eine Integration bezüglich des Kovariationsprozesses der Integratoren zurückführen. Diese Identität ermöglicht es in vielen Anwendungen, stochastische Integrale tatsächlich zu berechnen.

4.12 **Satz** *Seien $X, Y \in \mathcal{H}^2$ und $H, K \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Dann gilt*

$$[H \bullet X, K \bullet Y]_t = \int_0^t H_s K_s \, \mathrm{d}[X, Y]_s, \qquad t \geqslant 0. \quad \rtimes$$

4-B Integration vorhersagbarer Prozesse

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Klasse der Integranden von b$\mathcal{P}$ ausgehend nochmals zu erweitern, indem wir auch unbeschränkte vorhersagbare Prozesse zulassen, welche einer gewissen Integrierbarkeitsbedingung genügen – ähnlich zu den $L^1(\mu)$-Funktionen im Fall des Lebesgue-Integrals. Darüber hinaus wollen wir die Einschränkung bezüglich der Integratoren auf $\mathcal{H}^2$-Semimartingale eliminieren, die wir am Anfang des Abschnittes gemacht haben, um das Integral zu verallgemeinern.

Zunächst zitieren wir ein technisches Lemma.

4.2 **Lemma** *Sei A ein FV Prozess mit $A_0 = 0$ und $\int_0^\infty |\mathrm{d}A_s| \in L^2$. Dann gilt $A \in \mathcal{H}^2$ und*

$$\|A\|_{\mathcal{H}^2} \leqslant 6\left\|\int_0^\infty |\mathrm{d}A_s|\right\|_{L^2}. \quad \rtimes$$

Man beachte, dass im Allgemeinen unter obigen Voraussetzungen $A = \overline{A}$ *nicht* gilt, d.h. $A = \overline{N} + \overline{A}$ wobei der lokale Martingalteil $\overline{N}$ ein von Null verschiedener reiner Sprungprozess ist. Im Besonderen ist A im Allgemeinen nicht vorhersagbar, andernfalls wäre ohnehin $\overline{A} = A$.

Ein Semimartingal ist ohne Zusatzannahmen kein spezielles Semimartingal, nicht einmal lokal. Insbesondere ist daher ein typisches Semimartingal kein lokales $\mathcal{H}^2$-Semimartingal. Um letzteres zu erreichen, müssen wir die Definition der Lokalität weiter abschwächen.

4.4 **Definition** *Sei X ein Prozess mit $X_0 = 0$. Eine Eigenschaft π gilt prälokal für X, falls eine Fundamentalfolge von Stoppzeiten (T_n) existiert, so dass X^{T^n-} für jedes n die Eigenschaft π besitzt, wobei*

$$X_t^{T-} \coloneqq X_t \mathbf{1}_{[0,T)}(t) + X_{T-}\mathbf{1}_{[T,\infty)}(t), \qquad t \geqslant 0. \quad \rtimes$$

Grob gesagt, wird der Prozess X nicht zum zufälligen Zeitpunkt T, sondern zu einem infinitesimal früheren Zeitpunkt $T-$ abgestoppt. Dadurch gewinnen wir zusätzliche Regularitätseigenschaften.

4.13 **Satz** *Jedes Semimartingal ist ein prälokales $\mathcal{H}^2$-Semimartingal.* $\rtimes$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass eine Fundamentalfolge von Stoppzeiten (T^n) existiert, so dass $X^{T^n-} \in \mathcal{H}^2$ für jedes n. Aus der Semimartingaleigenschaft von X folgt, dass $X = M + A$ mit einem lokalen Martingal M und einem FV-Prozess A. Nach dem

Fundamentalsatz für lokale Martingale 3.1 können wir dabei für $\beta > 0$ beliebig die Zerlegung so wählen, dass $|\Delta M| \leqslant \beta$. Setzen wir nun

$$T^n \coloneqq \inf\{t > 0 : [M,M]_t > 0 \text{ oder } \int_0^t |\mathrm{d}A_s| > n\},$$

so ist (T^n) eine Fundamentalfolge. Fixieren wir ein $n \geqslant 1$ und betrachten $Y \coloneqq X^{T_n-}$, so gilt $|\Delta Y| \leqslant \beta + 2n$. Also ist Y ein Semimartingal mit beschränkten Sprüngen und folglich nach Satz 3.6 ein spezielles Semimartingal, d.h. Y besitzt eine eindeutige Zerlegung in ein lokales Martingal und einen vorhersagbaren FV Prozess. Andererseits ist

$$\begin{aligned} Y &= M^{T_n-} + A^{T_n-} = M^{T_n} + A^{T_n-} - (M^{T_n} - M^{T_n-}) \\ &= M^{T_n} + C, \qquad C \coloneqq A^{T_n-} - \Delta M_{T_n} \mathbf{1}_{[T_n,\infty)}. \end{aligned}$$

Unabhängig von $t \geqslant 0$ gilt nun

$$[M^{T_n}, M^{T_n}]_t = [M^{T_n-}, M^{T_n-}] + (\Delta M_{T_n})^2 \leqslant n + \beta^2,$$

also ist M^{T_n} nach Satz 2.18 sogar ein L^2-Martingal und folglich in $\mathcal{H}^2$. Weiterhin ist die Totalvariation von C beschränkt durch

$$\int_0^\infty |\mathrm{d}C_s| \leqslant n + |\Delta M_{T_n}| \leqslant \beta + n.$$

Somit ist C von beschränkter Variation, und da $A^{T_n-} \in \mathbb{L}$ und $\mathbf{1}_{[T_n,\infty)}$ adaptiert ist, ist C sogar vorhersagbar und damit in $\mathcal{H}^2$. Deshalb ist $Y = X^{T_n-}$ in $\mathcal{H}^2$ und X ist ein prälokales $\mathcal{H}^2$-Semimartingal. ∎

Im vergangenen Abschnitt haben wir die Beschränktheit der Integranden nur dazu benötigt, dass die Integrale (1) und (2) endlich sind. Wenn wir dies einfach fordern, so sind auch unbeschränkte Integranden zulässig.

4.5 **Definition** *Sei $X \in \mathcal{H}^2$ mit kanonischer Zerlegung $X = \overline{N} + \overline{A}$. Ein Prozess $H \in \mathcal{P}$ heißt $(\mathcal{H}^2, X)$-integrierbar, falls*

$$\mathbf{E}\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}[\overline{N},\overline{N}]_s + \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |H_s|\,|\mathrm{d}\overline{A}_s|\right)^2 < \infty. \quad \rtimes$$

Man macht sich sofort klar, dass die $(\mathcal{H}^2, X)$-integrierbaren Prozesse einen metrischen Raum bilden bezüglich der Metrik d_X aus Definition 4.2, und dass diese Metrik durch eine Norm induziert wird. Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass man jeden $(\mathcal{H}^2, X)$-integrierbaren Prozess in der d_X-Metrik durch beschränkte vorhersagbare Prozesse approximieren kann.

4.14 **Satz** *Sei $X \in \mathcal{H}^2$ ein Semimartingal und $H \in \mathcal{P}$ ein $(\mathcal{H}^2, X)$-integrierbarer Prozess. Ferner sei H^n eine Folge in $\mathrm{b}\mathcal{P}$ mit $H^n \xrightarrow{f.s.} H$ und $|H^n| \leqslant |H|$ für $n \geqslant 1$, dann ist $H^n \bullet X$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}^2$, und ihr Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge H^n.* ⋊

Beweis. Nach Definition der $\mathcal{H}^2$-Norm 4.1 ist

$$\begin{aligned} d_X(H^n, H^m) &= \|H^n \bullet X - H^m \bullet X\|_{\mathcal{H}^2} \\ &= \left\| \left(\int_0^\infty (H_s^n - H_s^m)\, \mathrm{d}[\overline{N}, \overline{N}]_s \right)^{1/2} \right\|_{L^2} + \left\| \int_0^\infty |H_s^n - H_s^m|\, |\mathrm{d}\overline{A}_s| \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ferner gilt $H^n - H^m \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$ für $n, m \to \infty$ sowie $|H^n - H^m| \leqslant 2|H|$, und die Integratoren $[\overline{N}, \overline{N}]_s$ und $|\overline{A}|_s$ sind von beschränkter Variation. Also sind die Integrale als Lebesgue-Stieltjes-Integrale erklärt, und wir können den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden, um die Cauchy-Eigenschaft zu erhalten. Die Unabhängigkeit des Grenzwertes von der gewählten Folge H^n folgt dann genau wie in Satz 4.4. ∎

Nun können wir durch geeignete Approximation das Integral auch für unbeschränkte Integranden definieren.

4.6 **Definition** *Sei X ein Semimartingal in $\mathcal{H}^2$ und $H \in \mathcal{P}$ $(\mathcal{H}^2, X)$-integrierbar. Dann ist das stochastische Integral $H \bullet X$ definiert durch*

$$H \bullet X \coloneqq \mathcal{H}^2\text{-}\lim_{n \to \infty} H^n \bullet X,$$

mit $H^n \xrightarrow{f.s.} H$ und $H^n \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. ⋊

Somit haben wir die Klasse der Integranden von den linksstetigen Prozessen $\mathbb{L}$ auf die wesentlich größere Klasse der vorhersagbaren Prozesse $\mathcal{P}$ vergrößert, allerdings mussten wir uns dazu auf $\mathcal{H}^2$-Semimartingale als Integratoren zurückziehen. Im letzten Schritt wollen wir uns dieser Einschränkung wieder entledigen. Dazu verwenden wir Satz 4.13 nach dem jedes Semimartingal ein prälokales $\mathcal{H}^2$-Semimartingal ist.

4.7 **Definition** *Sei X ein Semimartingal und $H \in \mathcal{P}$. Falls es eine Fundamentalfolge von Stoppzeiten (T_n) gibt, so dass $X^{T^n-} \in \mathcal{H}^2$ für jedes $n \geqslant 1$ und H $(\mathcal{H}^2, X^{T^n-})$-integrierbar ist, so ist das stochastische Integral $H \bullet X$ definiert durch*

$$H \bullet X \coloneqq H \bullet (X^{T^n-}) \text{ auf } [0, T^n).$$

In diesem Fall heißt H X-integrierbar, kurz $H \in L(X)$. ⋊

Wir müssen noch zeigen, dass das so definierte stochastische Integral $H \bullet X$ nicht von der Wahl der Folge von Stoppzeiten abhängt.

Nachweis der Wohldefiniertheit. Sei T eine Stoppzeit, so dass $X^{T-} \in \mathcal{H}^2$ und H $(X^{T-}, \mathcal{H}^2)$-integrierbar ist. Weiter gelte $H^k \xrightarrow{\text{f.s.}} H$ mit $H^k \in \mathrm{b}\mathcal{P}$. Sei $S \leqslant T$ eine weitere Stoppzeit, dann gilt nach Korollar 4.2, dass

$$(H^k \bullet X^{T-})^{S-} = H^k \bullet (X^{(T\wedge S)-}) = H^k \bullet X^{S-}, \qquad k \geqslant 1.$$

Linke und rechte Seite bilden Cauchyfolgen in $\mathcal{H}^2$ und der Grenzwert hängt nicht von H^k ab, also gilt auch $(H \bullet X^{T-})^{S-} = H \bullet X^{S-}$.

Seien nun T^n und S^n zwei Fundamentalfolgen, so dass $X^{T_n-}, X^{S_n-} \in \mathcal{H}^2$ und H sowohl $(X^{T_n-}, \mathcal{H}^2)$ als auch $(X^{S_n-}, \mathcal{H}^2)$-integrierbar ist. Nach obiger Rechnung gilt dann

$$(H \bullet X^{T_n-})^{S_n-} = H \bullet (X^{(T_n\wedge S_n)-}) = (H \bullet X^{S_n-})^{T_n-},$$

folglich stimmen $H \bullet X^{T_n-}$ und $H \bullet X^{S_n-}$ auf $[0, T_n \wedge S_n)$ überein, und das Integral ist wohldefiniert. ∎

Offenbar gilt $\mathrm{b}\mathcal{P} \subset L(X)$ für jedes Semimartingal X. Die Klasse $L(X)$ ist aber wesentlich größer, denn auch lediglich lokal beschränkte Integranden sind zulässig.

4.15 **Satz** *Ist X ein Semimartingal und $H \in \mathcal{P}$ lokal beschränkt, dann existiert das stochastische Integral $H \bullet X$, kurz $H \in L(X)$.* ⋊

Beweis. Seien (S^n) und (T^n) zwei Fundamentalfolgen von Stoppzeiten, so dass $(H^{S^n} \mathbf{1}_{[T^n>0]})$ für alle $n \geqslant 1$ beschränkt ist, und X^{T_n-} in $\mathcal{H}^2$ liegt. Definieren wir nun $R^n \coloneqq S^n \wedge T^n$, so ist (R^n) eine Fundamentalfolge für die $Y \coloneqq H^{R^n} \mathbf{1}_{[R^n>0]}$ auf $(0, R^n)$ beschränkt ist, und ferner $\mathrm{d}X^{R^n-} = 0$ außerhalb von $(0, R^n)$ gilt. Also ist Y $(\mathcal{H}^2, X^{R^n-})$-integrierbar, und folglich ist das Integral $H \bullet X$ gemäß Definition 4.7 erklärt. ∎

Man kann zeigen, dass die in den Sätzen 4.6–4.12 des letzten Abschnitts genannten Eigenschaften in sinngemäßer Weise auch für das eben definierte stochastische Integral gelten.

4.16 **Linearität im Integranden** *Seien X ein Semimartingal und $H, J \in L(X)$. Dann gelten*

$$\alpha H + \beta J \in L(X), \qquad \textit{und} \qquad (\alpha H + \beta J) \bullet X = \alpha H \bullet X + \beta J \bullet X.$$

Also ist $L(X)$ ein linearer Raum. ⋊

4.17 **Linearität im Integrator** *Seien X, Y Semimartingale und $H \in L(X)$ und $H \in L(Y)$. Dann gelten*

$$H \in L(X+Y), \qquad \text{und} \qquad H \bullet (X+Y) = H \bullet X + H \bullet Y. \quad ⋊$$

4.18 **Satz** *Sei X ein Semimartingal und $H \in L(X)$. So ist der Sprungprozess $(\Delta(H \bullet X)_s)_{s \geqslant 0}$ ununterscheidbar von $(H \bullet (\Delta X_s))_{s \geqslant 0}$.*

4.19 **Satz** *Seien T eine Stoppzeit, X ein Semimartingal und $H \in L(X)$. Dann gilt*

$$(H \bullet X)^T = H1_{[0,T]} \bullet X = H \bullet \left(X^T\right).$$

Ferner gilt, mit der Konvention $\infty-$ gleich ∞,

$$(H \bullet X)^{T-} = H \bullet \left(X^{T-}\right). \quad ⋊$$

4.20 **Satz** *Seien X ein Semimartingal mit Pfaden von beschränkter Variation auf kompakten Mengen und $H \in L(X)$, so dass das Lebesgue-Stieltjes-Integral $\int_0^t |H_s| \, |\mathrm{d}X_s|$ f.s. existiert. Dann stimmt das stochastische Integral $H \bullet X$ mit dem pfadweise definierten Lebesgue-Stieltjes-Integral überein.* ⋊

4.21 **Assoziativität** *Sei X ein Semimartingal und $K \in L(X)$. Dann gilt $H \in L(K \bullet X)$ genau dann, wenn $HK \in L(X)$. In diesem Fall gilt auch*

$$H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X. \quad ⋊$$

4.22 **Satz** *Seien X, Y zwei Semimartingale, sowie $H \in L(X)$ und $K \in L(Y)$. Dann gilt*

$$[H \bullet X, K \bullet Y]_t = \int_0^t H_s K_s \, \mathrm{d}[X,Y]_s, \qquad t \geqslant 0.$$

Auch für unbeschränkte vorhersagbare Integranden aus $L(X)$ ist das stochastische Integral abgeschlossen unter quadratintegrierbaren Martingalen.

4.3 **Lemma** *Ist M ein quadratintegrierbares Martingal und $H \in \mathcal{P}$ mit*

$$\mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}[M,M]_s < \infty,$$

dann ist $H \bullet M$ ein quadratintegrierbares Martingal. ⋊

Beweis. Sei $H^k := H \cdot \mathbf{1}_{[|H| \leqslant k]}$, dann ist $H^k \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ mit $H^k \xrightarrow{\text{f.s.}} H$ und $H^k \bullet M$ ist nach Satz 4.11 ein quadratintegrierbares Martingal. Außerdem ist $(H^k \bullet M)$ eine $\mathcal{H}^2$-Cauchyfolge mit $H^k \bullet M \xrightarrow{\mathcal{H}^2} H \bullet M$. Insbesondere gilt daher $H^k \bullet M \xrightarrow{L^1} H \bullet M$, und folglich ist $H \bullet M$ ein Martingal. ∎

Wir können damit zeigen, dass auch die Klasse der lokal quadratintegirerbaren lokalen Martingale abgeschlossen unter Integration ist.

4.23 **Satz** *Sei M ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal und $H \in \mathcal{P}$. Falls eine Fundamentalfolge von Stoppzeiten (T^n) existiert, so dass*

$$\mathbf{E}\int_0^{T^n} H_s^2 \,\mathrm{d}[M,M]_s < \infty, \qquad n \geqslant 1,$$

dann existiert das stochastische Integral $H \bullet X$, d.h. $H \in L(X)$, und ist ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal. ⋊

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass eine Fundamentalfolge $(\tilde{T}^n)$ von Stoppzeiten existiert, so dass $M^{\tilde{T}^n}$ ein quadratintegrierbares Martingal ist, und weiter gilt

$$\mathbf{E}\int_0^{T^n} H_s^2 \,\mathrm{d}[M^{\tilde{T}^n}, M^{\tilde{T}^n}]_s < \infty, \qquad n \geqslant 1.$$

Mit Lemma 4.3 folgt, dass $H \bullet M^{\tilde{T}^n}$ ein quadratintegrierbares Martingal ist. Also ist $H \bullet M$ ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal. ∎

Als unmittelbares Korollar erhalten wir folgende Aussage.

4.24 **Satz** *Ist M ein lokales Martingal und $H \in \mathcal{P}$ lokal beschränkt, dann ist das stochastische Integral $H \bullet M$ ein lokales Martingal.*

Die lokale Quadratintegrierbarkeit bzw. lokale Beschränktheit als Voraussetzung für die Abgeschlossenheit der Integration unter lokalen Martingalen lässt sich jedoch nicht wesentlich weiter abschwächen. Für ein lokales Martingal M und einen Prozess $H \in L(X)$ ist das stochastische Integral $H \bullet M$ im Allgemeinen nämlich kein lokales Martingal, wie das Gegenbeispiel von Emery eindrücklich zeigt.

Die Klasse der lokal beschränkten vorhersagbaren Prozesse ist im Wesentlichen die größte Klasse von Integranden auf die sich die stochastische Integration ausdehnen lässt, ohne die zentrale Eigenschaft der Abgeschlossenheit unter Integration bezüglich lokaler Martingale zu verlieren.

5 Martingaldarstellungssätze

Ein interessantes Problem in den Anwendungen ist die Fragestellung, wann man einen gegeben Prozess als stochastisches Integral bezüglich einfacherer Prozesse darstellen kann. Dieses Problem umfasst beispielsweise die Frage nach der Hedgebarkeit des Werteprozesses eines dynamischen Portfolios. Wenn sich dieser Prozess nicht in geeigneter Weise als stochastisches Integral darstellen lässt, so riskiert die ausstellende Seite bei ungünstigen Kursverläufen große Verluste in Kauf zu nehmen.

5-A Der Raum der L^2-beschränkten Martingale

Der gefilterte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, P)$ erfülle wieder die üblichen Bedingungen. Wir betrachten zwei Martingale L und M und untersuchen die Fragestellung, unter welchen Voraussetzungen es einen stochastischen Prozess H gibt, so dass

$$L = H \bullet M.$$

Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, beschränken wir uns auf L^2-Martingale, denn für deren Analyse stehen uns Hilbertraummethoden zur Verfügung.

5.1 **Definition** *Der Raum der L^2-beschränkten Martingale ist definiert durch*

$$\mathcal{M}^2 \coloneqq \{M : M \text{ ist ein } L^2\text{-Martingal mit } M_0 = 0 \text{ f.s.}\},$$

und durch

$$\|M\| \coloneqq (\mathbf{E}M_\infty^2)^{1/2} = (\mathbf{E}[M, M]_\infty)^{1/2}$$

ist eine Norm auf $\mathcal{M}^2$ gegeben, durch die $\mathcal{M}^2$ zu einem Hilbertraum wird. ⋊

Die Norm auf $\mathcal{M}^2$ entspricht der $\mathcal{H}^2$-Norm, und es gilt

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{M}^2 \oplus \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A} \coloneqq \left\{ A \text{ ist FV, vorhersagbar und } \left\| \int_0^\infty |\mathrm{d}A_s| \right\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}^2$ vollständig bezüglich dieser Norm – siehe Satz 4.1.

Man verifiziert leicht, dass $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt und folglich durch ein Skalarprodukt induziert wird. Letzteres ist gegeben durch

$$\langle N, M\rangle_{\mathcal{M}^2} \coloneqq (\mathbf{E} N_\infty M_\infty)^{1/2}.$$

Somit ist $\mathcal{M}^2$ ein vollständiger Innenproduktraum, also ein Hilbertraum.

■ Stabilität

5.2 **Definition** *Ein abgeschlossener Unterraum F von $\mathcal{M}^2$ heißt stabiler Unterraum, falls er unter Stoppen stabil ist, d.h. für alle $M \in F$ und jede Stoppzeit T gilt $M^T \in F$.* ⋊

Der folgende Satz liefert uns eine nützliche Charakterisierung stabiler Unterräume.

5.1 **Satz** *Sei F ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}^2$. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

(a) *Für jedes $M \in F$ und für alle $t \geqslant 0$ und $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ gilt*

$$(M - M^t)1_\Lambda \in F.$$

(b) *F ist ein stabiler Unterraum von $\mathcal{M}^2$.*

(c) *Für jedes $M \in F$ und jeden Prozess $H \in \mathrm{b}\mathcal{P}$ gilt $H \bullet M \in F$.*

(d) *Für jedes $M \in F$ und jeden Prozess $H \in \mathcal{P}$ mit $\mathbf{E}\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}[M,M]_s < \infty$ gilt $H \bullet M \in F$.* ⋊

Beweis. (c)⇒(b): Sei $M \in F$ und T eine Stoppzeit. Setzen wir $H = \mathbf{1}_{[0,T]}$, so ist H vorhersagbar und beschränkt, und

$$M^T - M_0 = \int_0^T \mathrm{d}M = H \bullet M \in F.$$

Da $M_0 = 0$ folgt $M^T \in F$, also ist F stabil.

(b)⇒(a): Sei $M \in F$, $t \geqslant 0$ und $\Lambda \in \mathcal{F}_t$. Setzen wir nun

$$T \coloneqq t_\Lambda \coloneqq \begin{cases} t, & \omega \in \Lambda, \\ \infty, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist T eine Stoppzeit, und es gilt

$$(M - M^t)\mathbf{1}_\Lambda = M - M^T \in F,$$

denn $M \in F$ und $M^T \in F$.

(a)⇒(d): Sei H zunächst von folgender Gestalt

$$H = \mathbf{1}_{\Lambda_0}\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbf{1}_{\Lambda_i}\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}, \qquad \Lambda_i \in \mathcal{F}_{t_i},$$

wobei $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n < \infty$. Sei $M \in F$, dann ist $H \bullet M \in F$, denn

$$H \bullet M = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbf{1}_{\Lambda_i}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}),$$

und $\mathbf{1}_{\Lambda_i}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}) \in F$ nach (a), also auch jede Linearkombination. Die Prozesse H von obiger Gestalt liegen dicht in b$\mathbb{L}$ und b$\mathbb{L}$ liegt seinerseits dicht in b$\mathcal{P}$ bezüglich d_X. Ferner liegt b$\mathcal{P}$ dicht in der Menge

$$\{H \in \mathcal{P} : \mathbf{E}\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}[M,M]_s < \infty\}.$$

Für jedes solche H existiert also eine Approximation H^k mit $H^k \bullet M \in F$ und $(H^k \bullet M)$ Cauchyfolge in $\mathcal{H}^2$, die gegen $H \bullet M$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist F abgeschlossen, also liegt auch $H \bullet M$ in F. ∎

Da beliebige Durchschnitte abgeschlossener stabiler Unterräume wieder stabil und abgeschlossen sind, ist die folgende Definition sinnvoll.

5.3 **Definition** *Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}^2$. Der durch $\mathcal{A}$ erzeugte stabile Unterraum $S(\mathcal{A})$ ist der Durchschnitt aller $\mathcal{A}$ enthaltenden abgeschlossenen stabilen Unterräume.* ⋊

Bemerkung. Wenn $\mathcal{A}$ bereits stabil ist, so folgt $\mathcal{A} = S(\mathcal{A})$. ⊸

■ Schwache und starke Orthogonalität

Wir wollen nun die Geometrie des Hilbertraumes $\mathcal{M}^2$ genauer untersuchen.

5.4 **Definition** *Zwei Martingale $N, M \in \mathcal{M}^2$ heißen*

1. *schwach orthogonal, falls $\langle N, M\rangle_{\mathcal{H}^2} = \mathbf{E}(N_\infty M_\infty) = 0$, und*

2. *stark orthogonal, falls $L = NM$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.* ⋊

Es stehen uns also zwei Orthogonalitätsbegriffe zur Verfügung. Einerseits die schwache Orthogonalität, welche durch das Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^2}$ definiert wird, und andererseits die starke Orthogonalität, definiert durch die Martingaleigenschaft des Produktes NM. Sind zwei Martingale stark orthogonal, so sind sie auch schwach orthogonal, die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Starke Orthogonalität ist somit tatsächlich eine »stärkere Forderung« als schwache Orthogonalität.

5.5 **Definition** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$. $\mathcal{A}^\perp$ und $\mathcal{A}^\times$ bezeichnen die zu $\mathcal{A}$ schwach bzw. stark orthogonalen Mengen.* ⋊

Jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$ besitzt also zwei verschiedene orthogonale Komplemente, einerseits das durch das Innenprodukt definierte orthogonale Komplement $\mathcal{A}^\perp$, und andererseits $\mathcal{A}^\times$. Offenbar gilt $\mathcal{A}^\times \subset \mathcal{A}^\perp$, denn schwache Orthogonalität ist weniger restriktiv als starke. Weiterhin ist $\mathcal{A}^\perp$ stets abgeschlossen – für $\mathcal{A}^\times$ gilt mehr.

5.1 **Lemma** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$. Dann ist $\mathcal{A}^\times$ abgeschlossen und stabil.* ⋊

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{A}^\times$ abgeschlossen ist. Sei dazu M_n eine Folge in $\mathcal{A}^\times$ mit $M_n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} M$, so ist zu zeigen, dass auch $M \in \mathcal{A}^\times$. Sei also $N \in \mathcal{A}$ ein Martingal, dann gilt

$$MN = M_- \bullet N + N_- \bullet M + [M,N].$$

Die ersten beiden Summanden sind als stochastische Integrale bezüglich L^2-Martingalen selbst wieder L^2-Martingale nach Lemma 4.3. Wenn auch $[M,N]$ ein Martingal ist, dann ebenso MN und die starke Orthogonalität wäre gezeigt. Die quadratische Kovariation ist eine symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform und erfüllt daher die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Es gilt also

$$|[M^n,N] - [M,N]| = |[M^n - M, N]| \leqslant [M^n - M, M^n - M][N,N].$$

Somit folgt $[N,M^n]_t \xrightarrow{L^1} [N,M]_t$ für jedes $t \geqslant 0$, denn

$$\begin{aligned}\|[M^n,N]_t - [M,M]_t\|_{L^1} &\leqslant \|[M^n - M, M^n - M]_t [N,N]_t\|_{L^1} \\ &\leqslant \|M_t^n - M_t\|_{L^2} \|N_t\|_{L^2} \\ &\leqslant \|M^n - M\|_{\mathcal{M}^2} \|N\|_{\mathcal{M}^2} \to 0.\end{aligned}$$

Ferner ist $M^n N$ für jedes $n \geqslant 1$ ein Martingal, also auch $[M^n, N]$, d.h.

$$[N, M^n]_s = \mathbf{E}([N, M^n]_t \mid \mathcal{F}_s), \qquad s \leqslant t.$$

Die linke Seite konvergiert in L^1 gegen $[N, M]_s$, während die rechte Seite in L^1 gegen $\mathbf{E}([N, M]_t \mid \mathcal{F}_s)$ konvergiert, denn die bedingte Erwartung ist stabil unter L^1-Konvergenz. Also ist $[N, M]$ ein L^1-Martingal und $\mathcal{A}^\times$ ist abgeschlossen.

Sei nun $M \in \mathcal{A}^\times$ und $N \in \mathcal{A}$, dann ist MN ein Martingal. Sei weiter T eine Stoppzeit, dann ist auch $(MN)^T$ ein Martingal nach dem Optional Stopping Theorem. Somit ist $\mathcal{A}^\times$ abgeschlossen unter Stoppen und folglich stabil. ∎

Als nächstes erarbeiten wir die folgende Charakterisierung der starken Orthogonalität, die wir noch häufig verwenden werden.

5.2 **Lemma** *Seien $N, M \in \mathcal{M}^2$. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

(i) M und N sind stark orthogonal,

(ii) $S(M)$ und N sind stark orthogonal,

(iii) $S(M)$ und $S(N)$ sind stark orthogonal,

(iv) $S(M)$ und N sind schwach orthogonal,

(v) $S(M)$ und $S(N)$ sind schwach orthogonal. ⋊

Beweis. (i)⇒(ii): Seien M und N stark orthogonal, dann ist $M \in \{N\}^\times$ und folglich gilt $S(M) \subset \{N\}^\times$, denn $\{N\}^\times$ ist abgeschlossen und stabil, und enthält M.

(ii)⇒(iii): Seien $S(M)$ und N stark orthogonal, dann ist $N \in S(M)^\times$, und folglich gilt $S(N) \subset S(M)^\times$.

(iii)⇒(v): Klar nach Definition.

(v)⇒(iv): Ebenfalls klar.

(iv)⇒(i): Seien $S(N)$ und $S(M)$ schwach orthogonal. Um die starke Orthogonalität von M und N zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $[M, N]$ ein Martingal darstellt. Wir verwenden dazu Satz 1.17, und zeigen, dass für jede beschränkte Stoppzeit T gilt $\mathbf{E}[M, N]_T = 0 = \mathbf{E}[M, N]_0$, denn $M_0 = N_0 = 0$. Nun gilt

$$\mathbf{E}[M, N]_T = \mathbf{E}[M^T, N]_\infty = 0,$$

denn $M^T \in S(M)$, und $S(M)$ und N sind schwach orthogonal. ∎

Bemerkung. Der letzte Beweisschritt (iv)⇒(i) wäre nicht möglich gewesen, wenn M und N lediglich als schwach orthogonal vorausgesetzt würden. ⊸

■ Eine Folgerungen

Mit Hilfe dieser Charakterisierung erhalten wir eine erste Antwort auf unsere ursprüngliche Frage, wann für zwei Martingal L, M eine Darstellung

$$L = H \bullet M$$

mit H geeignet existiert.

5.2 **Satz** *Seien $M^1, \dots, M^n \in \mathcal{M}^2$ und M^i und M^j stark orthogonal für $i \neq j$. Dann besteht $S(M^1, \dots, M^n)$ aus der Menge aller stochastischen Integrale*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet M^i$$

mit vorhersagbaren Prozessen H^i, für die gilt, dass

$$\mathbf{E} \int_0^\infty (H_s^i)^2 \, \mathrm{d}[M^i, M^i]_s < \infty. \quad \rtimes$$

Beweis. Wir definieren die Menge der Prozesse mit der gewünschten Darstellung

$$\mathcal{I} \coloneqq \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet M^i \,:\, H^i \in \mathcal{P} \text{ und } \mathbf{E} \int_0^\infty (H_s^i)^2 \, \mathrm{d}[M^i, M^i]_s < \infty \right\},$$

und zeigen, dass $\mathcal{I} = S(M^1, \dots, M^n)$. Nach Satz 5.1 gilt, dass $\mathcal{I} \subset S(M^1, \dots, M^n)$. Zeigen wir also, dass $\mathcal{I}$ abgeschlossen und stabil ist, so folgt $\mathcal{I} = S(M^1, \dots, M^n)$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}$ abgeschlossen ist, setzen wir

$$L^2(M^j) \coloneqq \left\{ H \in \mathcal{P} \,:\, \|H\|_{L^2(M^j)}^2 \coloneqq \mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}[M, M]_s < \infty \right\},$$

und betrachten die lineare Abbildung

$$A : L^2(M^1) \oplus \cdots \oplus L^2(M^n) \to \mathcal{M}^2, \quad (H^1, \dots, H^n) \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet M^i.$$

Wir berechnen nun direkt, dass

$$\begin{aligned}
\|A(H^1, \dots, H^n)\|_{\mathcal{H}^2} &= \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet M^i, \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} H^j \bullet M^j \right] \\
&= \mathbf{E} \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} H_i H_j \bullet [M^i, M^j] \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{E} H_i^2 \bullet [M^i, M^i] \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|H^i\|_{L^2(M^i)},
\end{aligned}$$

also ist A sogar eine Isometrie. Die direkte Summe $L^2(M^1)\oplus\cdots\oplus L^2(M^n)$ ist vollständig und ihr Bild unter A ist gerade $\mathcal{I}$, folglich ist auch $\mathcal{I}$ vollständig und insbesondere abgeschlossen.

Ferner ist $\mathcal{I}$ abgeschlossen unter Stoppen, denn für $H^j \bullet M^j \in \mathcal{I}$ und eine Stoppzeit T gilt

$$(H^j \bullet M^j)^T = (H^j \mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet M^j \in \mathcal{I},$$

also ist $\mathcal{I}$ stabil. ∎

5.3 **Satz** *Sei $\mathcal{A}$ eine stabile Teilmenge von $\mathcal{M}^2$. Dann ist auch $\mathcal{A}^\perp$ stabil und jedes Martingal $M \in \mathcal{A}^\perp$ ist stark orthogonal zu $\mathcal{A}$, also*

$$\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\times \quad \textit{und} \quad S(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}^{\times\perp} = \mathcal{A}^{\times\times}. \quad \rtimes$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\times$. Sei dazu $M \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{A}^\perp$. Da $\mathcal{A}$ stabil ist, gilt $S(M) \subset \mathcal{A}$, also ist N schwach orthogonal zu $S(M)$. Nach Lemma 5.2 ist daher N stark orthogonal zu M, und da $M \in \mathcal{A}$ beliebig war, folgt dass $N \in \mathcal{A}^\times$. Also ist $\mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{A}^\times$ und folglich gilt $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\times$.

Ferner ist $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\times$ stabil nach Lemma 5.1, also erhalten mit exakt derselben Argumentation, dass

$$(\mathcal{A}^\times)^\perp = (\mathcal{A}^\perp)^\perp = (\mathcal{A}^\perp)^\times = (\mathcal{A}^\times)^\times.$$

Da $\mathcal{M}^2$ ein Hilbertraum ist, gilt außerdem $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\perp\perp}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}$ aber stabil und damit abgeschlossen, folglich gilt $S(\mathcal{A}) = \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$. ∎

Aus den Hilbertraumeigenschaften von $\mathcal{M}^2$ folgt, dass wenn $\mathcal{A}$ ein abgeschlossener *Teilraum* von $\mathcal{M}^2$ ist, zu jedem Martingal $M \in \mathcal{M}^2$ eine *eindeutige* Zerlegung

$$M = A + B, \qquad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A}^\perp$$

existiert. Wenn $\mathcal{A}$ nun einen stabilen Unterraum darstellt, dann ist $\mathcal{A}$ insbesondere abgeschlossen und es gilt $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\times$, also erhalten wir dieselbe Zerlegung für $\mathcal{A}^\times$.

5.1 **Korollar** *Sei $\mathcal{A}$ ein stabiler Unterraum von $\mathcal{M}^2$. Dann besitzt jedes $M \in \mathcal{M}^2$ eine eindeutige Zerlegung $M = A + B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}^\times$.* $\rtimes$

Als direkte Anwendung erhalten wir einen weiteren Darstellungssatz.

5.2 **Korollar** *Seien $N, M \in \mathcal{M}^2$ und L die Projektion von N auf $S(M)$. Dann existiert ein vorhersagbarer Prozess H mit $L = H \bullet M$.*

Beweis. Setzen wir $\mathcal{A} \coloneqq S(M)$, so ist $\mathcal{A}$ stabil und folglich existiert ein eindeutig bestimmtes $L \in S(M)$, so dass $N = L + C$, wobei $C \in \mathcal{A}^{\times}$. Nach Satz 5.2 lässt sich jedes Element in $S(M)$ als stochastisches Integral bezüglich M darstellen, also insbesondere L. ∎

5-B Martingaldarstellung

Unser Ziel ist es nun, Bedingungen dafür anzugeben, dass zu gegebenen Martingalen $M^1, \ldots, M^n$, »möglichst alle« Prozesse über eine Darstellung wie in Satz 5.2 angegeben verfügen. Wir präzisieren dies mit folgender Definition.

5.6 **Definition** *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge schwach orthogonaler Martingale in $\mathcal{M}^2$. Dann besitzt $\mathcal{A}$ die vorhersagbare Darstellungseigenschaft, falls*

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet M^i : M^i \in \mathcal{A},\ H^i \in \mathcal{P} \text{ mit } \mathbf{E} \int_0^\infty (H^i_s)^2 \,\mathrm{d}[M^i, M^i]_s < \infty \right\}. \quad \rtimes$$

Somit können wir ein hinreichendes Kriterium dafür formulieren, dass sich die Menge der darstellbaren Prozesse nicht weiter vergrößern lässt.

5.3 **Korollar** *Sei $\mathcal{A} = \{M^1, \ldots, M^n\} \subset \mathcal{M}^2$ mit stark orthogonalen M^i und M^j für $i \neq j$. Ferner gelte für jedes $N \in \mathcal{M}^2$, dass $N \perp \mathcal{A}$ (im starken Sinne) bereits $N = 0$ impliziert. Dann besitzt $\mathcal{A}$ die vorhersagbare Darstellungseigenschaft.* $\rtimes$

Beweis. Aus Satz 5.2 folgt, dass alle Prozesse aus $S(\mathcal{A})$ über die gewünschte Darstellung verfügen. Weiterhin erhalten wir mit Korollar 5.2 die orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{M}^2 = S(\mathcal{A}) \oplus S(\mathcal{A})^{\times}.$$

Wählen wir nun ein $N \in S(\mathcal{A})^{\times}$, so gilt auch $N \in \mathcal{A}^{\times}$. Aus den Voraussetzungen folgt somit $N = 0$, also ist $\mathcal{M}^2 = S(A)$, und dies war zu zeigen. ∎

Im verbleibenden Teil dieses Kapitels suchen wir nach Wegen, die Bedingungen an die Menge $\mathcal{A}$ aus obigem Korollar weiter abzuschwächen.

■ $\mathcal{M}^2$-Martingalmaße

5.7 **Definition** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$. Die Menge $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ der $\mathcal{M}^2$-Martingalmaße zu $\mathcal{A}$ ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{F})$, für die gilt:*

1. *$Q \ll P$,*
2. *$Q = P$ auf $\mathcal{F}_0$, und*
3. *jedes $X \in \mathcal{A}$ ist ein L^2-beschränktes Q-Martingal zur Filtration $\mathbb{F}$.* ⋊

5.3 **Lemma** *Die Menge $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ ist konvex.* ⋊

Beweis. Seien Q, R zwei Maße in $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ und $0 < \lambda < 1$, so haben wir zu zeigen, dass auch $S \coloneqq \lambda Q + (1-\lambda)R \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$. Als Konvexkombination von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist auch S ein solches. Ferner lassen sich 1. und 2. direkt an der Definition von S ablesen. Sei nun $X \in \mathcal{A}$, dann ist X sowohl ein Q-Martingal, als auch ein R-Martingal. Sei nun $A \in \mathcal{F}_s$ und $t \geqslant s$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_S(X_t\mathbf{1}_A) &= \lambda\mathbf{E}_Q(X_t\mathbf{1}_A) + (1-\lambda)E_R(X_t\mathbf{1}_A)\\ &= \lambda\mathbf{E}_Q(X_s\mathbf{1}_A) + (1-\lambda)E_R(X_s\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_S(X_s\mathbf{1}_A),\end{aligned}$$

und X ist ein S-Martingal. Weiterhin verifizieren wir

$$\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}_S X_t^2 \leqslant \lambda \sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}_Q X_t^2 + (1-\lambda)\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}_Q X_t^2 < \infty,$$

denn X ist L^2-beschränkt bezüglich Q und P. Also gilt $S \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ und die Konvexität ist gezeigt. ∎

Betrachtet man lineare Abbildungen – wie beispielsweise Integraloperatoren – auf konvexen Mengen, so ist deren Verhalten maßgeblich durch das Verhalten auf den extremalen Punkten der konvexen Menge bestimmt. Auch in unseren Fall spielen diese Punkte eine zentrale Rolle.

5.8 **Definition** *Das Maß $Q \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ ist ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, falls aus der Darstellung $Q = \lambda R + (1-\lambda)S$ mit $R, S \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, $R \neq S$ und $\lambda \in [0,1]$ entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ folgt.* ⋊

Wenn die stabile Hülle einer Menge $\mathcal{A}$ bereits der gesamte Raum $\mathcal{M}^2$ ist, so muss P ein Extremalpunkt sein, was uns eine handhabbare Charakterisierung von Extremalpunkten liefert.

5.4 **Satz** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$. Falls $S(\mathcal{A}) = \mathcal{M}^2$, dann ist P ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$.* ⋊

Beweis. Angenommen P ist als Konvexkombination von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$-Maßen gegeben, also

$$P = \lambda Q + (1 - \lambda)R, \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad Q,\ R \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A}).$$

So gilt $Q \leqslant \lambda^{-1}P$, und Q ist absolutstetig bezüglich P. Also ist

$$L_t \coloneqq \mathbf{E}_P\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

ein P-Martingal, und da außerdem $L_\infty = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}P \leqslant \lambda^{-1}$, ist L sogar beschränkt. Ferner gilt für jedes $A \in \mathcal{F}_0$, dass

$$\mathbf{E}_P(L_0\, \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_P(L_\infty\, \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_Q(\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_P(\mathbf{1}_A),$$

denn $P = Q$ auf $\mathcal{F}_0$. Folglich ist $L_0 \equiv 1$ f.s., und $L - L_0$ ist ein Martingal in $\mathcal{M}^2$.

Sei nun $X \in \mathcal{A}$, dann ist X sowohl ein Q-Martingal als auch ein R-Martingal, und da $P = \lambda Q + (1 - \lambda)R$, ist X somit auch ein P-Martingal. Sei ferner $A \in \mathcal{F}_s$ für ein $s \leqslant t$, dann gilt

$$\mathbf{E}_P(X_t L_t \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_P(X_t L_\infty \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_Q(X_t \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_Q(X_s \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_P(X_s L_s \mathbf{1}_A),$$

also ist XL ein P-Martingal. Somit ist auch $XL - X = X(L - L_0)$ ein P-Martingal, und folglich sind X und $L - L_0$ stark orthogonal bezüglich P. Daher ist $L - L_0$ nach Lemma 5.1 sogar stark orthogonal zu $S(\mathcal{A}) = \mathcal{M}^2$, d.h. $L - L_0 \in S(\mathcal{A})^\times = (0)$ also ist $L \equiv 1$ und $P = Q$. ∎

Der vorangegangene Satz besagt, dass, wenn jedes zu $\mathcal{A}$ stark orthogonale $\mathcal{M}^2$-Martingal bereits identisch Null ist, P ein Extremalpunkt ist. Der folgende Satz liefert die Umkehrung allerdings nur für beschränkte Martingale.

5.5 **Satz** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^2$. Ist P ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, dann ist jedes beschränkte und in Null startende P-Martingal, welches stark orthogonal zu $\mathcal{A}$ ist, gleich Null.* ⋊

Beweis. Sei L ein beschränktes und zu $\mathcal{A}$ stark orthogonales P-Martingal mit $L_0 = 0$. Wählen wir ein $c > 0$ mit $|L| \leqslant c$ und definieren

$$\mathrm{d}Q \coloneqq \left(1 - \frac{L_\infty}{2c}\right)\mathrm{d}P, \qquad \mathrm{d}R \coloneqq \left(1 + \frac{L_\infty}{2c}\right)\mathrm{d}P,$$

so sind Q und R wohldefinierte Wahrscheinlichkeitsmaße, denn $\mathbf{E}_P L_\infty = 0$. Wir zeigen nun, dass Q und R Maße in $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$ sind. Zunächst gilt $P = (Q+R)/2$, und daher ist $Q \ll P$ und $R \ll P$. Weiterhin folgt mit $L_0 = 0$, dass $Q = R = P$ auf $\mathcal{F}_0$. Sei ferner $X \in \mathcal{A}$, so ist zu zeigen, dass X bezüglich Q ein L^2-beschränktes Martingal ist. Nach Konstruktion ist $1 - (2c)^{-1} L_\infty \leqslant 3/2$, also folgt

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}_Q X_t^2 = \sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}_P \left(\left(1 - \frac{L_\infty}{2c} \right) X_t \right) \leqslant \frac{3}{2} \sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}_P X_t^2 < \infty,$$

und daher ist X auch $L^2(Q)$-beschränkt. Ferner gilt für jedes $A \in \mathcal{F}_s$ und $s \leqslant t$, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_Q (X_t \mathbf{1}_A) &= \mathbf{E}_P \left(\left(1 - \frac{L_t}{2c} \right) X_t \mathbf{1}_A \right) \\ &= \mathbf{E}_P \left(\left(1 - \frac{L_s}{2c} \right) X_s \mathbf{1}_A \right) = \mathbf{E}_Q (X_s \mathbf{1}_A), \end{aligned}$$

denn X ist ein P-Martingal, und ebenso XL, denn nach Voraussetzung gilt ja $L \perp \mathcal{A}$. Somit ist gezeigt, dass $Q \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$.

Aus Symmetriegründen folgt eine analoge Aussage für R. Also sind Q und R Maße in $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$. Nach Voraussetzung ist $P = (Q+R)/2$ aber ein Extremalpunkt, also gilt $Q = R = P$ und daher ist $L_\infty = 0$. Also ist $L \equiv 0$, und dies war zu zeigen. ∎

Wir wenden uns nun wieder unserem Ziel für dieses Kapitel zu, aus möglichst schwachen Bedingungen an die Menge $\mathcal{A}$ die vorhersagbare Darstellungseigenschaft zu folgern. Ist P ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, dann gilt nach vorigem Satz, dass $N \equiv 0$ für jedes *beschränkte* Martingal $N \in \mathcal{A}^\times$ folgt. Um Korollar 5.3 anwenden zu können, und so die vorhersagbare Darstellungseigenschaft zu folgern, benötigen wir letztere Eigenschaft aber für beliebige *eventuell unbeschränkte* Martingale $N \in \mathcal{A}^\times$. Im folgenden Satz sichern wir eine minimale Regularität für alle Martingale in $\mathcal{A}^\times$, und erhalten so, dass all diese Martingale *lokal beschränkt* sind. Wir können dann wie üblich verfahren.

5.6 **Satz** *Sei $\mathcal{A} = \{M^1, \dots, M^n\} \subset \mathcal{M}^2$, wobei M^i stetig und M^i und M^j stark orthogonal für $i \neq j$. Ist P ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, dann besitzt $\mathcal{A}$ die vorhersagbare Darstellungseigenschaft.* ⋊

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, dass jedes beschränkte P-Martingal bereits stetig ist – für Details siehe [7, p. 186].

Wir zeigen nun, dass dies dann sogar für jedes gleichgradig integrierbare P-Martingal gilt. Sei also N gleichgradig integrierbar, so besitzt N einen Abschluss

N_∞. Definieren wir nun

$$N_t^n \coloneqq \mathbf{E}_P(N_\infty \mathbf{1}_{[|N_\infty| \leqslant n]} \mid \mathcal{F}_t),$$

so ist N^n für jedes $n \geqslant 1$ ein beschränktes Martingal und daher stetig. Weiterhin ist $|N - N^n|$ für jedes $n \geqslant 1$ ein positives Submartingal und mit der Maximalungleichung von Doob 1.19 folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{t \geqslant 0} |N_t - N_t^n| \geqslant \varepsilon\right] &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}_P|N_\infty^n - N_\infty| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}_P(|N_\infty|\mathbf{1}_{[|N_\infty| \leqslant n]}) \to 0, \qquad n \to \infty, \end{aligned}$$

denn der Integrand verschwindet und $|N_\infty|$ ist eine integrierbare Majorante. Somit gilt $(N - N^n)^* \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, und es existiert eine fast sicher konvergente Teilfolge. Also konvergiert $N^{n_k} \twoheadrightarrow M$ für fast alle Pfade gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}_+$. Als gleichmäßige Limites stetiger Pfade sind daher fast alle Pfade von M stetig.

Sei nun $N \in \mathcal{A}^\times$, dann ist N nach dem eben gezeigten stetig und folglich lokal beschränkt. Es existiert also eine Fundamentalfolge (T^m) von Stoppzeiten, so dass N^{T^m} beschränkt ist. Weiterhin folgt aus der Stabilität, dass $N^{T^m} \in \mathcal{A}^\times$. Somit können wir Satz 5.5 anwenden und erhalten $N^{T^m} \equiv 0$. Da dies für jedes $m \geqslant 1$ gilt, folgt $N \equiv 0$. Somit ist Korollar 5.3 anwendbar und die vorhersagbare Darstellungseigenschaft von $\mathcal{A}$ folgt. ∎

Quintessenz *Sei $\mathcal{A} = \{M^1, \dots, M^n\}$ eine Menge von stetigen und paarweise stark orthogonalen P-Martingalen. Es lässt sich jedes P-Martingal genau dann als eine Summe von Integralen $H^i \bullet M^i$ mit vorhersagbaren Prozesse H^i darstellen, falls P ein extremaler Punkt in der Menge derjenigen Wahrscheinlichkeitsmaße ist, bezüglich derer die M^i auch Martingale sind.* ⋊

■ Martingaldarstellung bezüglich einer Brownschen Bewegung

Jetzt behandeln wir den wichtigen Spezialfall, dass $\mathcal{A}$ aus den Komponenten einer n-dimensionalen Standard-Brownschen Bewegung besteht.

5.7 **Satz** *Sei $X = (X^1, \dots, X^n)$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung und $\mathbb{F}$ die dazugehörige vollständige natürliche Filtration. Dann besitzt jedes lokal quadratintegrierbare lokale Martingal M bzgl. $\mathbb{F}$ die Darstellung*

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t H_s^i \, \mathrm{d}X_s^i$$

mit vorhersagbaren Prozessen $H^i \in L(X^i)$. ⋊

Beweis. Sei $t_0 > 0$, dann ist $Y \coloneqq X^{t_0} = (Y^1, \dots, Y^n)$ ein L^2-beschränktes Martingal, und folglich

$$\mathcal{A} \coloneqq \{Y^1, \dots, Y^n\} \subset \mathcal{M}^2.$$

Sei $Q \in \mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$, dann ist Y auch bezüglich Q ein Martingal, und folglich nach dem Satz von Lévy 2.26 eine Brownsche-Bewegung, denn $[Y^i, Y^j]_t = t\delta_{ij}$ ist unabhängig vom zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß. Für jedes $t \geqslant s$ ist daher $Y_t - Y_s$ multivariat Standard-normalverteilt sowohl bezüglich P als auch bezüglich Q. Somit sind die Bildmaße identisch, also

$$P_{Y_t - Y_s} = Q_{Y_t - Y_s}, \qquad t \geqslant s,$$

und folglich gilt $P = Q$ auf $\mathcal{F}_{t_0}$, das heißt $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A}) = \{P\}$. Daher ist P trivialerweise eine Extremalpunkt und $\mathcal{A}$ besitzt nach Satz 5.6 die vorhersagbare Darstellungseigenschaft.

Sei nun M ein lokal quadratintegirerbares lokales Martingal, so existiert auf $[0, t_0]$ eine Fundamentalfolge von Stoppzeiten T^m, so dass $M^{T^m} \in \mathcal{M}^2$. Aus der vorhersagbaren Darstellungseigenschaft von $\mathcal{A}$ folgt, daher dass vorhersagbare Prozesse $H^{i,m,0}$ existieren mit

$$M^{T_m} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^{i,m,0} \bullet Y^i, \qquad m \geqslant 1.$$

Zusammengenommen erhalten wir auf $[0, t_0]$ eine gemeinsame Darstellung

$$M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^{i,0} \bullet Y^i, \qquad H^{i,0} \coloneqq \sum_{m \geqslant 1} H^{i,m,0} \mathbf{1}_{(T^{m-1}, T^m]},$$

wobei $H^{i,0} \in L(Y^i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Wir wählen nun eine deterministische Fundamentalfolge $t_1 < t_2 < \cdots \uparrow \infty$ und verfahren wie zuvor mit t_l anstatt t_0. So erhalten wir eine Folge von Prozessen $H^{i,l}$, so dass auf $[0, t_l]$

$$M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^{i,l} \bullet (X^i)^{t_l}, \qquad l \geqslant 1.$$

Setzen wir nun

$$H^i \coloneqq \sum_{l \geqslant 1} H^{i,l} \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

so folgt für M auf ganz $\mathbb{R}_+$ die gewünschte Darstellung

$$M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} H^i \bullet X^i. \quad \blacksquare$$

Die Stetigkeit der Brownschen Bewegung schlägt sich signifikant in der durch sie erzeugten natürlichen Filtration nieder. Letztere lässt nämlich keine unstetigen Martingale zu.

5.4 **Korollar** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.7 ist jedes lokale Martingal M bzgl. $\mathbb{F}$ stetig.* $\rtimes$

Beweis. Nach Satz 5.7 ist P ein Extremalpunkt von $\mathfrak{m}^2(\mathcal{A})$. Aus dem Beweis von Satz 5.6 folgt weiterhin, dass jedes gleichgradig integrierbare P-Martingal bereits stetig ist. Stoppen ergibt die Behauptung. ∎

Im letzten Schritt zeigen wir, dass sich jedes lokale Martingal als stochastisches Integral bezüglich einer Brownschen Bewegung schrieben lässt.

5.5 **Korollar** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.7 besitzt jedes lokale Martingal M bzgl. $\mathbb{F}$ die Darstellung*

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t H_s^i \, \mathrm{d}X_s^i$$

mit vorhersagbaren Prozessen $H^i \in L(X^i)$. $\rtimes$

Beweis. Nach Korollar 5.4 ist jedes lokale Martingal unter diesen Voraussetzungen stetig und daher insbesondere lokal quadratintegrierbar. Somit ist Satz 5.7 anwendbar und die Behauptung folgt. ∎

Index

Symbolverzeichnis

Allgemein

$\mathcal{A}^{\perp}$	Schwach orthogonales Komplement, 124
$\mathcal{A}^{\times}$	Stark orthogonales Komplement, 124
$\mathbb{F}$	Filtration, 12
$\mathcal{F}$	σ-Algebra, 11
$\mathcal{F}_T$	σ-Algebra der T Vergangenheit, 25
$\mathcal{P}$	vorhersagbare σ-Algebra bzw. vorhersagbare Prozesse, 104
σ	Partition von $\mathbb{R}_+$, 63
$S(\mathcal{A})$	Stabile Hülle, 123
$\mathbf{Var}_I(X)$	Totalvariation auf I, 39
d_X	siehe, 108
P, Q	Wahrscheinlichkeitsmaße, 11
$Q \ll P$	Q ist absolutstetig bezüglich P, 91
$Q \sim P$	$Q \ll P$ und $P \ll Q$, 91
S, T	Stoppzeiten, 12

Konvergenz

$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$	$X_n \to X$ f.s.
$X_n \xrightarrow{\mathcal{H}^2} X$	$X_n \to X$ in $\mathcal{H}^2$, 105
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	$X_n \to X$ in L^p
$X_n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} X$	$X_n \to X$ in $\mathcal{M}^2$, 121
$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$	$X_n \to X$ stochastisch
$X_n \xrightarrow{\text{ucp}} X$	$X_n \to X$ in ucp.

Stochastische Integrale

$H \bullet X$	Stochastisches Integral von H gegen X, 48
$I_X(H)$	Stochastisches Integral von H gegen X, 48
$J_X(H)$	Stochastisches Integral von H gegen X, 55

Literaturverzeichnis

[1] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilities and potential C.* potential theory for discrete and continuous semigroups. North Holland, Jan. 1988.

[2] J. Dippon. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Ws 09/10 edition.

[3] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer Verlag, 1991.

[4] F. C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications.* Imperial College Pr, 2005.

[5] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie (Springer-Lehrbuch Masterclass) (German Edition).* Springer, 2., korr. aufl. edition, Apr. 2008.

[6] D. Meintrup and S. Schäffler. *Stochastik: Theorie und Anwendungen (Statistik und ihre Anwendungen) (German Edition).* Springer, 1 edition, Sept. 2004.

[7] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations.* Springer Verlag, 2004.

[8] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).* Springer, Dec. 2010.

[9] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2 edition, Jan. 1991.

[10] D. Werner. *Funktionalanalysis (Springer-Lehrbuch) (German Edition).* Springer, 6., korr. aufl. edition, Sept. 2008.